Lezioni di Matematica

PROGRAMMA BIENNIO SCUOLE SUPERIORI
Vol. 1

di
EMANUELE CASTAGNA

Docente di ruolo nelle scuole secondarie superiori di MATEMATICA

STAMPA AUTONOMA
DIFFUSIONE GRATUITA
(1^a edizione: gennaio 2023)

Emanuele castagna -"Lezioni di Matematica" - Vol.1
ISBN: 979-12-210-3136-2

Prefazione

Questo testo è il primo volume dei tre scritti come supporto ai corsi di Matematica tenuti presso l'I.T.T.S "E. Scalfaro" di Catanzaro e liberamente distribuito sotto licenza *CC License* dal prof. E.Castagna. La necessità di avere un libro più snello, economico ed appassionante, soprattutto "non pesante" per i propri studenti è stata la motivazione principale alla stesura di questo lavoro. La struttura è semplice: un volume per i due anni del primo biennio, un secondo volume per gli argomenti del secondo triennio ed un terzo volume per i "complementi" sempre del secondo triennio. Si cercherà di privilegiare il ragionamento e la parte dimostrativa delle affermazioni che verranno fatte, nonché la risoluzione dei problemi che, di volta in volta, si troveranno nello sviluppo del discorso. Certo non si daranno solo tecniche risolutive di calcolo che, anche se importanti per i passaggi più elementari, certamente non fanno capire bene né l'importanza della Matematica, né la sua vera natura. I capitoli che si troveranno sono, in genere, autocontenuti: sarebbe il caso di leggerli e studiarli in ordine per come sono stati scritti, ma nessuno vieta che si possano affrontare invertendone l'ordine ed iniziando dagli argomenti che si ritiene più congeniale all'approccio didattico con la propria Classe. Questa opera è stata scritta con l'intento dichiarato di **far appassionare i giovani,** che affrontano gli studi superiori, **alla Matematica.** Sono anni, purtroppo, che si prova insoddisfazione dalla lettura dei libri di testo in circolazione nelle scuole italiane: sia che siano stati già adottati, sia che siano proposti dai vari rappresentati come "nuove edizioni di stupefacente bellezza ed efficacia". Purtroppo noi, tutta questa "bellezza" nei libri attualmente pubblicati, non la troviamo, anzi ci rammarica constatare che si cerca di captare l'attenzione dei giovani studenti con una "accattivante" veste grafica e presentazioni varie (anche a carattere multimediale), piuttosto che **presentare la bellezza della Matematica per quello che è:** ovvero qualcosa di concreto che **non ha bisogno degli "effetti speciali"** per attirare l'attenzione su di essa. Nei libri di oggi si notano colori, disegni, proposte di esperimenti in laboratori d'informatica ecc.. ecc.., che, secondo noi, hanno preso il posto dei contenuti importanti ed hanno distratto gli studenti dagli obbiettivi principali di un corso "avanzato" di Matematica. Inoltre, abbiamo notato che non ci sono testi che presentano la disciplina in maniera ordinata con un filo logico conduttore che possa essere seguito dall'inizio fino alla fine: i libri di testo saltano "di palo in frasca" mischiando argomenti e presentando, magari, contenuti che dovrebbero discendere da altri, prima ancora che questi ultimi siano stati affrontati! Noi crediamo, invece, che uno dei

punti di forza della Matematica sia proprio la *consenguenzialità logica* dei vari argomenti: vedere come si procede nella sistemazione logica di quanto già appreso negli studi inferiori ed apprendere nuovi argomenti che risolvo i problemi che, via via, vengono trovati e definiti.
Si parlerà molto di geometria, il cui studio, purtroppo, sembra quasi "scomparso"dalle scuole oppure, al più, relegato a livello di curiosità o, ancora, lasciato alla buona volontà degli studenti: con questo intendiamo che non si fa più una costruzione razionale del sistema teorico geometrico, ma solo si enunciano (nei casi più fortunati) i principali teoremi e si fa vedere come essi si applicano per risolvere qualche "problemuccio da poco". Ecco: non è così che si dovrebbe "fare Matematica". Con l'intento di far leggere questo libro e non di usarlo unicamente per trarre gli esercizi o come formulario, abbiamo utilizzato un linguaggio discorsivo e proprio per questo, gli esercizi, sono stati tutti raccolti nell'ultimo capitolo, quinta parte dedicata unicamente ad essi e, per altro, volendo discutere la loro risoluzione con l'intera Classe, si è evitato -di proposito- di indicare i risultati corretti conseguenti alle giuste soluzioni. *Sarà giusta l'idea che permette di ottenere una soluzione, dopo aver ragionato opportunamente sul problema, non il risultato meramente numerico a cui si perviene attraverso un calcolo più o meno laborioso!* ci riserviamo, comunque, di pubblicare un altro testo, "appendice" del presente libro, dedicato esclusivamente alla risoluzione di tutti gli esercizi qui proposti.
Sebbene faremo iniziare il nostro discorso dalla costruzione della Geometria "alla maniera di Euclide" e, pertanto, presenteremo anche la costruzione dei numeri razionali come "rapporti di grandezze (geometriche)", dedicheremo dei capitoli alla costruzione degli insiemi numerici partendo da considerazioni insiemistiche puramente astratte e quozientando, tramite opportune relazioni di equivalenza, i prodotti cartesiani di insiemi già noti. Qualcuno potrebbe obbiettare che ci sono problemi nel considerare la "Classe di tutti gli insiemi" e questo inficerebbe la bontà del discorso fin dall'inizio, ma i paradossi a cui si può giungere approfondendo ulteriormente il discorso, non crediamo opportuno presentarli a questo livello di studio, né intendiamo rinunciare ad un approccio tanto elegante ed efficace per la costruzione degli insiemi numerici: c'è sempre tempo per approfondire e raffinare "la Ricerca".
Nel raccomandare di *dedicare tempo* e pazienza, soprattutto allo studio della geometria, approfittiamo per invitare i gentili lettori ad essere sempre ottimisti: non è vero che quel che si studia deve essere immediatamente tutto chiaro (ed a tutti). La virtù della pazienza è ben esercitata nello studio della Matematica: perseveranza e fiducia, alla fine, faranno godere di piaceri tanto raffinati quanto frequenti, che poc'altre

discipline o attività umane riusciranno ad eguagliare. Significativo è quanto sosteneva il grande Matematica francese Henri Poicaré:

> ***"L'improvvisa illuminazione è segno evidente di un lungo lavoro inconscio che l'ha preceduta"***

o, come diciamo molto più sommessamente noi, per esperienza personale da studente o per anni spesi in attività di insegnamento: *"la Matematica deve sedimentare come un buon vino: forse oggi non si capisce bene cosa si sta facendo, ma un giorno sarà tutto chiaro!*

Ringraziamenti. Si ringraziano tutti coloro che hanno preso parte, in modo diretto od indiretto, all'elaborazione della presente opera: in primis i miei genitori, i miei insegnanti, i miei familiari ed i miei amici, che hanno, in tutto questo tempo, supportato ed incoraggiato il nostro lavoro, studio e formazione.

Un particolare ringraziamento al *prof. Vincenzo Rubino*, che si è fatto carico di correggere le bozze e suggerire miglioramenti: attivo soprattutto nell'inventare nuovi problemi per far divertire gli studenti e rendere più chiari gli argomenti appresi. Resta chiaro che la responsabilità di ogni eventuale errore che si trovi nella presente opera è sicuramente attribuibile unicamente al sottoscritto.

Catanzaro, 26.12.2022

Emanuele Castagna

Immagini in copertina selezionate ed assemblate dall'autore e tratte dalle tavole d'illustrazione del libro *"Pratica di Geometria in carta e in campo"* a cura di *Veneziano Monaldini Mercante*- Libraro al Corso -Roma, A.D.: *MDCCLXI*-.

L'intera opera è stata scritta utilizzando l'ambiente LaTeX in un sistema *Linux,* per cui si ringraziano i creatori e curatori dei relativi progetti per la possibilità offerta di utilizzare questi mezzi informatici nella libera divulgazione di opere d'ingegno e culturali. Le figure sono state realizzate con *Geoegebra,* di cui si raccomanda l'utilizzo per chiarire molte delle idee presentate o per approcciare gli esercizi proposti.

Si invita alla massima pubblicazione e diffusione, grazie.

"Alle mie figlie adorate
ed alla loro madre amatissima.
Ai miei genitori: esemplari nella loro vita".

Ai miei allievi, che in questi anni di docenza
hanno plasmato il mio modo di insegnare.

"Ed a tutti coloro che mi vogliono bene."

Indice

Parte 1

Geometria

(per iniziare con ordine)

CAPITOLO 1

Primi passi nel ragionamento matematico

1. Matematica... cosa sarebbe?

Spesso la Matematica viene confusa con gli strumenti che essa utilizza per arrivare a conclusioni interessanti od utili. Quando si domanda in giro cosa sia la Matematica, è alto il pericolo di sentirsi rispondere banalità del tipo "l'arte dei numeri", "calcoli su espressioni (varie)", "equazioni" ecc... roba da far accapponare la pelle, se non fosse stimolante per una ulteriore riflessione sul fatto che si insegnano "tecniche" utili senza far vedere "utili a cosa". Insomma, bisognerebbe davvero cercare, ad inizio di ogni discorso, di chiarire i termini dello stesso e dire, o almeno fare una dichiarazione d'intenti, su cosa si vorrebbe fare e far studiare. Ora, definire con esattezza cosa sia la Matematica, nella sua più ampia accezione e completezza, è davvero difficile anche per i professionisti del settore: questo perché la Matematica ha molteplici sfaccettature e può includere una varietà di attività e significati a seconda del contesto in cui la si collochi. Però è sempre utile partire dall'etimologia della parola e poi chiedersi come mai quel significato sia stato racchiuso in quel dato nome. **Matematica,** secondo il dizionario etimologico della lingua italiana, pubblicato da Zanichelli, proviene da *mathematica(m)* (sottointeso *artem*), come calco del greco ***mathematike*** (téchne) che significa **arte apprensiva**, dato che il verbo *mathánein* significa proprio **imparare.** Pertanto il *Matematico* è *colui che impara* e questo sembra molto lontano dalla concezione comune che viene data ai termini "matematica" e "matematico". Ma se la Matematica è l'arte di imparare, allora è chiaro che essa rappresenta l'attività principale dell'uomo e di molte altre specie viventi: in verità, è la stessa vita che impone di "imparare" per adattarsi e proseguire. A questo punto ci si dovrebbe domandare come mai, attualmente, la Matematica non è intesa assolutamente come l'arte di imparare, ma come qualcosa di astratto, difficile e spesso inutile per vivere: in fondo, si vive benissimo senza dover ricorre direttamente agli strumenti della Matematica per fare il pane, procurarsi da mangiare o riprodursi.
Ecco, sarebbe il caso di capire che gli strumenti, più o meno evoluti

di cui si avvale una disciplina, non sono l'essenza della disciplina stessa, ma solo delle "comodità" per esprimere meglio e con linguaggio più efficace quel di cui si vuole parlare od il proprio pensiero. Detto questo, non è un caso se la *nascita* della Matematica, almeno per il mondo occidentale, la si attribuisce alla cultura ellenistica, la stessa a cui si attribuisce il merito immenso di aver fondato la Filosofia come disciplina di pensiero ed attività culturale. I Greci avevano tempo a disposizione per pensare e porsi domande: soprattutto avevano il tempo, avendo sviluppato una società opulenta con agiatezza diffusa, di trovare risposte agli interrogativi che si ponevano. Ecco perché Matematica e Filosofia trovarono terreno fertile di nascita e propagazione presso le popolazioni della Grecia e di tutte le società che avessero avuto rapporti con esse. All'incirca, si suole porre la fondazione della Matematica occidentale attorno al 600 A.C. ad opera di Talete, il quale manifestava apertamente la propria esigenza, tipicamente intellettuale, di giustificare affermazioni riguardo a fenomeni che osservava. La prima sistemazione omnicomprensiva del "sapere" greco si deve ad Euclide attorno al 300 A.C.: la sua opera, intitolata "*Elementi*" è una costruzione mirabile [1] di quello che noi, oggi, chiameremmo *una teoria.* L'importanza degli "Elementi" è notevole per tutta la cultura occidentale: basti pensare che è il libro più pubblicato, studiato e diffuso dopo la Bibbia e questo lo è stato fin da quando sono stati scritti, fino a poco tempo fa, quando -erroneamente, a nostro giudizio- si è inteso eliminare in modo più o meno intenzionale, lo studio della Geometria (razionale) dai programmi di scuola superiore.

2. Costruzione di una Teoria

Riprendiamo ancora una volta in mano il dizionario etimologico e leggiamo, per il lemma *Matematica,* la seguente definizione: "Disciplina che si avvale di metodi deduttivi per lo studio degli enti numerici e geometrici e per l'applicazione dei suoi risultati alle scienze" (Brunetto Latini, 1294). Concentriamoci sulla locuzione *metodi deduttivi* che rappresenta la chiave di comprensione di cosa fa la matematica e come *fare Matematica.* Il discorso è molto semplice, pulito, lineare e chiaro: bisogna trovare risultati "nuovi" (perché questo significa "capire" cosa succede) partendo da precedenti "verità" già assodate; questo significa, essenzialmente, *dedurre* qualcosa. Potremmo tranquillamente dire che la Matematica si occupa di fondare, discutere, capire, studiare **sistemi ipotetico-deduttivi** e, così facendo, dare giustificazioni e risposte alle domande che uno si potrebbe porre.

[1]Lo stesso A. Einstein si riferima ad essa come un "sontuoso edificio".

In grande sintesi, la struttura di un discorso matematico potrebbe essere la seguente:

$$\begin{array}{ccc} \text{“Affermazioni vere”} & \Longrightarrow & \text{“Affermazioni vere”} \\ \boxed{1} & \Longrightarrow & \boxed{2} \end{array}$$

La prima parte a sinistra della freccia, il numero $\boxed{1}$, si chiama “premessa”, mentre la seconda parte, il numero $\boxed{2}$, è la “conseguenza”. La freccia stessa si chiama *implicazione* ed indica che dalle premesse, tramite un ragionamento (corretto), si deduce la conseguenza. Questo schema logico è il **paradigma** su cui si basa la geometria euclidea, ovvero è il *modello* che viene utilizzato per costruire tutto il discorso geometrico e che dovrebbe essere utilizzato per la fondazione di qualsiasi costruzione razionale.

2.1. Terminologia. Diremo che una *Teoria* è un insieme di affermazioni tutte vere. Di queste affermazioni, alcune servono per iniziare il discorso e non possono essere dedotte da altre: in questo caso esse verranno chiamate *“postulati o assiomi”* : la verità o validità di tale affermazioni sarà assunta come un *atto di fede*, ovvero non si discute e viene accettato in modo intuitivo, oppure richiesto come informazione iniziale. Tutto il resto, che viene dedotto e, quindi *va dimostrato* essere vero, si chiama *teorema.* . Chiaramente si cercherà di ridurre al massimo il numero dei postulati ”fondanti” una teoria, richiedendone il numero minimo sufficiente per dimostrare tutto il resto e, soprattutto, che essi non siano affermazioni contraddittorie l’uno con l’altro, nemmeno per eventuali conseguenze che possano andare a contraddire altri teoremi già dimostrati essere veri. Questa struttura, come dicevamo poc’anzi, è il paradigma su cui si poggia qualsiasi costruzione razionale: è così importante che addirittura viene ripetuto a livello di Teorema! questi ultimi, infatti, sono essi stessi costruiti da due parti secondo lo schema:

$$\begin{array}{ccc} \text{“Affermazioni vere”} & \Longrightarrow & \text{“Affermazioni vere”} \\ \boxed{Hp} & \Longrightarrow & \boxed{Th} \end{array}$$

In questo caso, la parte indicata come $\boxed{Hp}$ si chiama *ipotesi* mentre la seconda parte, $\boxed{th}$, è denominata *tesi* . Attenzione, quindi, *le ipotesi non si dimostrano,* mentre la parte che va dimostrata -tramite un corretto ragionamento- è la *tesi.* I teoremi stessi, a seconda dell'importanza che assumono all'interno del corpo teorico, prendono diversi nomi: essi sono *Lemmi, Proposizioni, Teoremi* (veri e propri) e *Corollari.* All'incirca si può dire che un "lemma" si dimostra al fine di dimostrare qualcosa di più importante successivamente (quindi è un teorema che è finalizzato a semplificare la dimostrazione di qualche teorema che, altrimenti, sarebbe abbastanza lungo e contorto da dimostrare). Una "proposizione" è un teorema che comunque non è fondamentale che venga ricordato come tra le affermazioni più importanti della Teoria. A quelle affermazioni fondamentali, su cui si basano conseguenze importanti per lo sviluppo della Teoria, ci si riserva di dare il nome di "Teorema" ed anche un nome a cui si attribuisce la stessa affermazione (ad esempio Talete, Pitagora, Euclide) oppure un appellativo che lo identifichi immediatamente (ad esempio "Teorema dell'angolo esterno"). I "corollari" sono conseguenze più o meno immediate di altre proposizioni dimostrate precedentemente: in genere le dimostrazioni sono semplici osservazioni che si fanno e che permettono di applicare direttamente un teorema. Prima di iniziare la costruzione della Geometria (piana, euclidea) diciamo anche che le affermazioni che si faranno devono riguardare degli "oggetti del discorso" che, nel caso specifico, sono *punti, rette, piani e spazi* (e loro insiemi o sottoinsiemi). Questi oggetti del discorso prendono il nome di *Enti Primitivi* e non possono essere definiti in alcun modo, dato che qualsiasi tentativo di definirli implicherebbe di utilizzare loro sinonimi all'interno della definizione stessa. In pratica sarebbe come dire "il punto è quella cosa che è un punto" e cose del genere, chiaramente prive di significato conoscitivo, sebbene corrette dal punto di vista logico (sono infatti tautologie). A parte gli Enti Primitivi, si darà per scontato, perché già conosciuti sotto forma intuitiva (o come idea innata delle nostre menti) locuzioni del tipo "Insieme", "l'elemento appartiene", "questo non sta dentro", "Incluso", "Unione", "Precede", "Segue" ecc... comunque, quando servirà, si daranno descrizioni più chiarificatrici sull'argomento.

3. Postulati per iniziare

Come prima cosa "chiediamo" di essere tutti d'accordo che se ci servono punti, rette, piani o spazi, essi sono dati in modo illimitato: ovvero quanti ce ne servono, tanti ne potremo trovare ed utilizzare.

POSTULATO 1. *Esistono "infiniti" punti, rette, piani (e spazi).*

Chiamiamo *Figura* qualsiasi insieme di punti. Anche un insieme costituito da un solo punto è, quindi, una figura. Gli elementi che costituiscono una figura si dice che *appartengono* a quella figura e, di contro, la figura si dice *costitutita* da quei punti. Se due figure hanno alcuni elementi in comune, allora l'insieme di tutti i punti in comune tra le due figure si chiama *intersezione* tra le due figure.

3.1. Le rette. Fissato un punto possiamo immaginare che esso appartiene a tutte le rette che "passano" da esso: lo richiediamo con il seguente postulato.

POSTULATO 2. *Per un punto passano infinite rette*

Se però fissiamo due punti, allora il numero di rette che passano per essi si riduce drasticamente ad uno!

POSTULATO 3. *Per due punti distinti passa una ed una sola retta*

Come conseguenza immediata si ha

COROLLARIO 1. *Se due rette hanno due punti distinti in comune, allora le rette devono coincidere*

Dim.: In genere le dimostrazioni le daremo per esteso ed in modo esauriente, però, per questo corollario, vogliamo che sia lo stesso studente a provare a dare una giustificazione ragionevole della tesi.

□

Non potendo dare una definizione degli Enti primitivi, in genere ci si limita a descriverli tramite mutue relazioni che li leghino tra loro. Questi qui di seguito sono richieste ragionevoli che vorremmo fossero soddisfatte dagli enti di cui abbiamo già una idea intuitiva innata.

POSTULATO 4. *Una retta contiene almeno due punti distinti*

e ci assicuriamo che non siano solo due i punti appartenenti ad una retta!

POSTULATO 5. *Tra due punti di una retta ce n'è almeno un terzo.*

Ammettiamo che ci sia un ordinamento, per altro del tutto arbitrario, tra i punti della retta.

POSTULATO 6. *Fissati due punti distinti A e B di una retta, se A precede B, allora diremo che B segue A.*

Inoltre, chiediamo che valga la seguente *proprietà transitiva*:

POSTULATO 7. *Dati tre punti distinti su di una retta, se A precede B e B precede C, allora A precede C.*

Una conseguenza abbastanza immediata del postulato n. 5 è la seguente affermazione.

COROLLARIO 2. *Tra due punti distinti di una retta ve ne sono infiniti altri.*

Dim.: Tra due distinti ve n'è almeno un altro, tra l'ultimo trovato ed i due di prima ce n'è almeno un altro ecc... ecc...

□

Inoltre "sistemiamo" il comportamento della retta "all'esterno" di due punti prefissati.

POSTULATO 8. *sulla retta non c'è un punto che preceda, né uno che segua tutti gli altri.*

Questo significa che la retta *si estende all'infinito in emtrambe le direzioni:* da notare che per Euclide la retta non è quella di cui noi abbiamo intuizione innata, infatti egli dice che la retta "si estende" nelle due direzioni per quanto vogliamo (che è equivalente al postulato appena dato). Quindi, negli Elementi, si intende come retta "un pezzo" di essa, delimitato da due punti, quello che noi invece chiamiamo "segmento".

DEFINIZIONE 1. *Una semiretta è ciascuna delle due parti che si ottiene fissando un punto su una retta. Il punto scelto si chiamerà* origine *delle due semirette.*

Se fissiamo invece due punti, oltre alle due semirette si ottiene, come accennato precedentemente, un segmento:

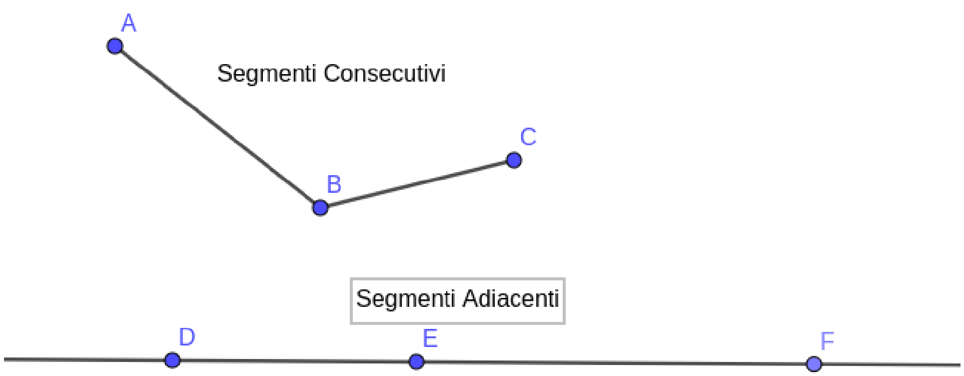
DEFINIZIONE 2. *Fissati due punti distinti su una retta, la parte di retta compresa tra i due punti si chiama* segmento. *I punti fissati, che originano il segmento, si chiamano* estremi. *Inoltre, dati due punti A e B, il segmento* [2] *i cui estremi sono tali punti si chiama anche* distanza *tra A e B.*

Premesso che -per ora- ci occuperemo solo di **figure che appartengono ad uno stesso piano,** ovvero studieremo solo "geometria piana", presi due segmenti nel piano, essi possono assumere poche posizioni particolari: o non hanno punti in comune, e quindi diremo che non si intersecano, oppure hanno tutti i punti in comunque, nel qual caso diremo che coincidono; potrebbe poi succedere che uno dei due segmenti ha tutti i punti in comune con l'altro, ma quest'ultimo ne ha qualcuno che non sta nel primo segmento e quindi diremo che il primo segmento è *incluso* nel secondo (oppure che il secondo contiene il primo) e, infine, può succedere che l'intersezione tra i due segmenti

[2] Ce n'è solo uno: sai dire perché?

sia esattamente un punto. Per questo ultimo caso, importanti sono le seguente definizioni.

DEFINIZIONE 3. *Se due segmenti hanno uno degli estremi in comune (e solo quello), allora si diranno* consecutivi. *Se oltre ad essere consecutivi, appartengono anche alla stessa retta, si diranno* adiacenti.



3.2. I piani. Per caratterizzare i piani, elenchiamo le relazioni che ci piacerebbe fossero presenti con gli elementi "a dimensione" inferiore.

POSTULATO 9. *Se due punti distinti di una retta appartengono ad un piano, allora tutta la retta deve stare in quel piano.*

Questo significa che un piano, così come la retta, non è limitato, ma di più, chiediamo anche che nel piano le rette si possono trovare "in qualsiasi direzione si voglia".

POSTULATO 10. *In ogni piano ci stanno almeno tre punti distinti non allineati* [3].

Anzi, chiediamo che tre punti non allineati determinano completamente il piano!

POSTULATO 11. *Per tre punti non allineati passa uno ed un solo piano.*

Lo studente giustifichi questo corollario immediato:

COROLLARIO 3. *Una retta appartiene ad infiniti piani mentre, per una retta ed un punto che non le appartiene passa uno ed un solo piano.*

[3] Ovvero che non stanno tutti sulla stessa retta.

Immaginate una porta ed i suoi due cardini: la porta dà l'idea di un piano che potendo ruotare attorno ai cardini, cambia di posizione... quindi per i due punti di ancoraggio passano infiniti piani (ma per i due punti cardini, passa anche una sola retta, ergo...). Se però fissiamo un ulteriore punto da cui la porta deve passare, allora vincoliamo il piano della porta ad essere uno solo: ecco che per tre punti passa un solo piano!

Definizione 4. *Fissata una retta in un piano, quest'ultimo viene diviso in due* semipiani *di* origine *(la retta prefissata) comune.*

Diamo per scontato anche quest'altra affermazione:

Postulato 12. *Fissati i due semipiani del piano, se due punti appartengono ad uno stesso semipiano, il segmento che li unisce sta tutto nel semipiano a cui appartengono i due estremi; invece, se si fissano i punti uno in un semipiano e l'altro nell'altro, allora il segmento che ha come estremi questi punti deve intersecare l'origine dei semipiani in esattamente un punto.*

Si può anche pensare di fissare due semirette con origine comune in un piano: in tal caso useremo la seguente terminologia.

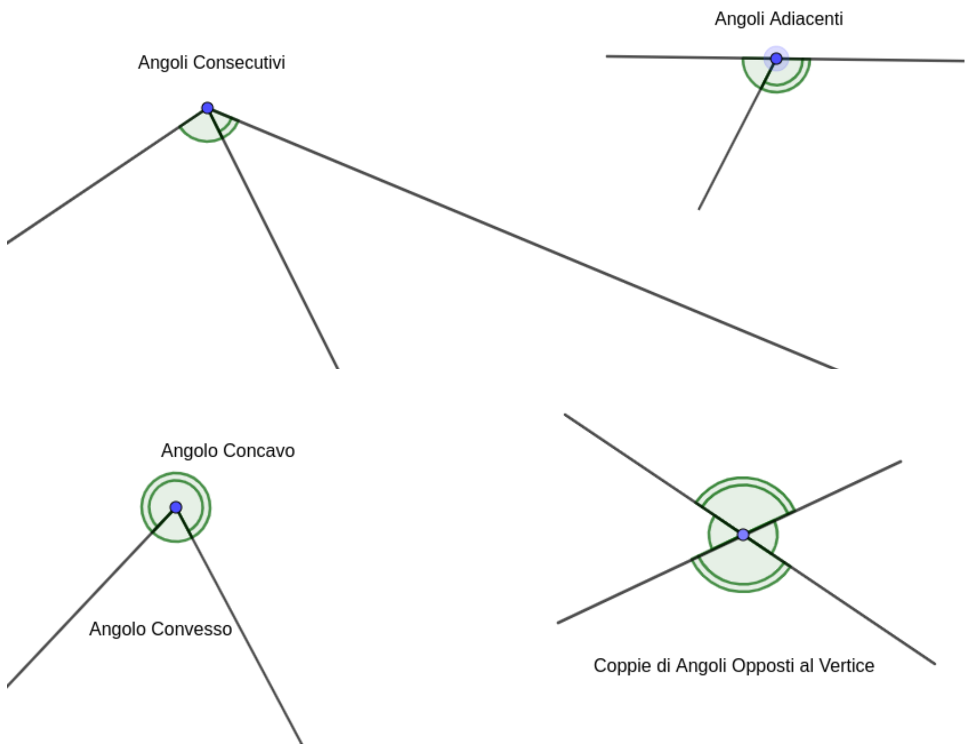
Definizione 5. *Si chiama* angolo *ciascuna delle due parti in cui rimane ripartito un piano una volta che si fissino due semirette con origine comune. Le due semirette si chiameranno i* lati *e l'origine comune delle due semirette* vertice *dell'angolo.*

Se le semirette appartengono alla stessa retta, ovvero -come si dicesono *semirette opposte,* allora l'angolo si chiamerà **piatto.** Se si fissano altrimenti due semirette con stessa orgine, allora la parte di piano che contiene i prolungamenti dei lati si dirà *angolo concavo,* l'altra parte *angolo convesso.* Come per i segmenti, anche per gli angoli si può parlare di consecutività ed adiacenza.

Definizione 6. *Due angoli che abbiano la stessa origine ed un lato in comune si chiameranno* consecutivi. *Se sono consecutivi e gli altri due lati sono semirette opposte, allora si diranno* adiacenti.

Molto importante per il proseguo è la seguente definizione.

Definizione 7. *Due angoli che siano formati l'uno con i prolungamenti dei lati dell'altro si diranno* opposti al vertice.



4. La Congruenza

Prima di proseguire, occorre richiedere che le figure si possano "spostare" senza che subiscano deformazioni -come si dice- in modo *rigido* ovunque ci faccia piacere [4]. Pertanto richiediamo il seguente postulato.

Postulato 13. *Ogni figura può essere spostata nel piano (o nello spazio) senza che subisca deformazioni.*

Forti di tale postulato introduciamo la principale relazioni di cui ci occuperemo nei prossimi capitoli: la *congruenza.*

Definizione 8. *Due figure si dicono* congruenti *se esiste un movimento (rigido) che li faccia coincidere* [5]*.*

Indichiamo la congruenza con il simbolo "riservato" $\cong$, quindi la scrittura $A \cong B$ si legge *la figura* A *è congruente alla figura* B.

[4] Volendo essere pignoli, questa richiesta dovrebbe apparire abbastanza imbarazzante da un punto di vista logico, dato che noi non sappiamo cosa significhi realmente "deformare" una figura! Sarebbe bene capire che uno spostamento rigido richiede essenzialmente che si debbano conservare le distanze tra punti che si corrispondono a seguito dello spostamento... e conservare le distanze è la chiave di lettura della geometria euclidea, almeno nella visione moderna della Geometria.

[5] Ovvero tale che i punti dell'una sono esattamente i punti dell'altra e viceversa!

4.1. Proprietà della congruenza. In generale si definisce ***relazione di equivalenza*** un legame che si riferisce a uno o più elementi di un insieme che gode delle proprietà *riflessiva, simmetrica* e *transitiva* qui di seguito enunciate. Una relazione si dice *riflessiva* se "si riflette" sugli stessi elementi: ad esempio, "essere nato lo stesso giorno" è una relazione riflessiva poiché chiunque è nato lo stesso giorno in cui è nato! per contra la relazione "essere più alto" non è riflessiva poiché ogni persona non è più alta di se stessa. Una relazione è simmetrica se si può dire che ogni volta che un elemento è in relazione con un altro, anche quest'ultimo lo è con il primo elemento; ad esempio, essere nato lo stesso giorno" è una relazione simmetrica, dato che se Tizio è nato lo stesso giorno di Caio, allora Caio è nato lo stesso giorno di Tizio. Analogamente possiamo dire che "essere più alto" non è simmetrica: infatti se Tizio è più alto di Caio, allora Caio non è più alto di Tizio. In ultimo, una relazione è transitiva se ogni volta che due elementi hanno una relazione con un terzo, allora la stessa relazione la si trova tra loro oppure, in alternativa, se un primo elemento è in relazione con un secondo e questo con un terzo, allora si può concludere che il primo elemento è in relazione con il terzo. Ad esempio: "essere nati lo stesso giorno" è una relazione transitiva poiché se Tizio e Caio sono nati lo stesso giorno di Sempronio, allora Tizio è nato anche lo stesso giorno di Caio. In verità anche "essere più alto" è una relazione transitiva, infatti se Tizio è più alto di Caio e Caio lo è di Sempronio, allora Tizio è più alto di Sempronio. In formule il discorso diventa anche più chiaro (oltre che sintetico); se a è un elemento di un insieme a cui appartengono anche b e c, indicata con $\mathcal{R}$ la relazione tra gli elementi di quell'insieme, possiamo affermare le seguenti proprietà:

Riflessività: $a\,\mathcal{R}\,a$

Simmetricità: se $a\mathcal{R}\,b \implies b\,\mathcal{R}\,a$.

Transitività: se $a\mathcal{R}\,b$ e $b\,\mathcal{R}\,c \implies a\,\mathcal{R}\,c$.

La prima richiesta ragionevole da fare per la congruenza è che sia una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva, ovvero:

POSTULATO 14. *La congruenza è una relazione di equivalenza.*

Altre proprietà che richiediamo e che non ha nemmeno senso chiedersi se si possano dimostrare o no, sono dati dai seguenti postulati.

POSTULATO 15. *I punti sono tutti congruenti tra di loro. Stessa affermazione vale per le rette, i piani e gli spazi, ma anche per le semirette ed i semipiani.*

POSTULATO 16. *Il segmento di estremi A e B indicato generalmente come segmento $\overline{AB}$ è congruente al segmento di estremi B*

ed A, ovvero al segmento $\overline{BA}$. Una affermazione analoga vale per gli angoli.

Mettiamo in risalto il fatto che un sottoinsieme di una figura non può essere congruente alla figura per intero, ovvero richiediamo il seguente postulato.

POSTULATO 17. *Una figura non potrà mai essere congruente ad una sua parte (propria).*

4.2. Confronto tra segmenti/angoli ed operazioni. Definita la congruenza, possiamo, come conseguenza secondaria, introdurre anche un relazione d'ordine tra i segmenti o tra gli angoli. Il punto è che se trasportiamo, ad esempio, i due segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ su una stessa retta in modo che due estremi coincidano (diciamo A e C)e tali segmenti si sovrappongono, per intero o parzialmente, immediatamente potremmo fare le seguenti affermazioni:

a) se anche gli estremi B e D si sovrappongono (quindi si sovrappongono per intero i due segmenti) i due segmenti risultano congruenti: ovvero $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
b) se l'estremo D è un punto interno al segmento $\overline{AB}$ allora diremo che $\overline{AB}$ è *maggiore* del segmento $\overline{CD}$ e scriveremo $\overline{AB} > \overline{CD}$,
c) se l'estremo B è interno al segmento $\overline{CD}$ allora diremo che $\overline{AB}$ è *minore* del segmento $\overline{CD}$, scrivendo altresì $\overline{AB} < \overline{CD}$.

Dovrebbe risultare chiaro che è equivalente dire che $\overline{AB} > \overline{CD}$ ovvero $\overline{CD} < \overline{AB}$. La relazione "essere maggiore" ovvero "essere minore", detto altrimenti "essere più grande" oppure "essere più piccolo" gode delle proprietà transitiva, anti-simmetrica ed anti-riflessiva: ovvero, oltre ad essere transitiva, gode delle seguenti due proprietà:

Anti-Riflessività: $a \not\mathcal{R} a$ e
Anti-Simmetricità: se $a\mathcal{R}b \implies b\not\mathcal{R}a$.

Una relazione di questo tipo si chiama anche *relazione d'ordine stretto*. Una relazione d'ordine, in generale, basta che sia "transitiva ed antisimmetrica".

Una volta detto come confrontare i segmenti, possiamo stabilire la seguente

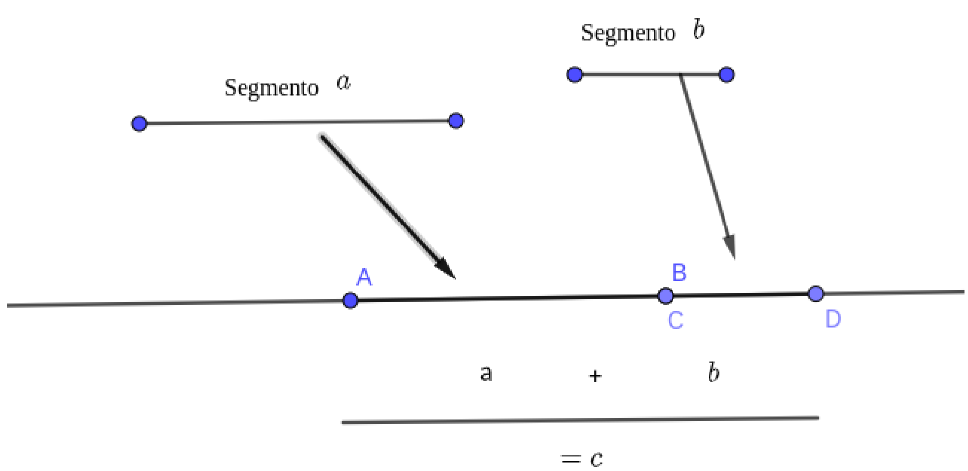
Legge di Esclusione: dati due segmenti a e b risulterà sempre solo uno dei seguenti casi: o è $a \cong b$ oppure $a > b$ o $a < b$.

Per gli angoli si procede in modo simile: si trasportano i due angoli in modo che abbiano vertice coincidente ed uno dei lati sovrapposti. Gli altri due lati o si sovrappongono anche essi, nel caso gli angoli siano congruenti, oppure uno di essi apparterrà alla parte di piano delimitato dai lati dell'altro angolo. In questo ultimo caso l'angolo con il lato interno all'altro angolo si dirà *minore* e, nel contempo, l'altro si dirà maggiore.

Il trasporto rigido però permette anche di definire in modo semplice e naturale una operazione di **addizione** tra segmenti (o angoli) e, di conseguenza, anche l'operazione di differenza, di prodotto e di quoziente. Le operazioni definiti in tal guisa risultano facilmente comprensibili perché intuitivamente naturali: è esattamente quello che ognuno di noi si aspetta che succeda! Procediamo quindi a definire queste "quattro" operazioni sui segmenti, lasciando il compito di definire analoghe operazioni per gli angoli.

Definizione 9. *Dati i segmenti a e b si definisce la loro somma c come il segmento formato da due segmenti adiacenti congruenti rispettivamente ad a e b.*

L'idea è di trasportare rigidamente uno dei due segmenti, ad esempio a su una retta e successivamente anche l'altro segmento b sulla stessa retta in modo da renderlo consecutivo al primo: la somma è -per definizione- il segmento che si ottiene trascurando gli estremi coincidenti e prendendo quelli rimanenti come estremi del nuovo segmento.



Dalla definizione seguono immediatamente le seguenti proprietà.

a) **Proprietà Commutativa:** La somma non cambia se si cambia l'ordine con cui si sommano i segmenti.

b) **Proprietà Associativa:** La somma di tre o più segmenti non cambia se a due o più di essi si sostituisce la loro somma.
c) La somma di segmenti congruenti dà segmenti congruenti.
d) Sommando disuguaglianza dello stesso senso membro a membro, si ottiene ancora una disuguaglianza dello stesso senso.

Definita la somma di due segmenti, la differenza è immediatamente definita come "operazione inversa": sapendo il risultato della somma di due segmenti ed uno dei due segmenti "addendi", quale è l'altro? è giusto una osservazione dire che non ha senso fare la differenza tra due segmenti di cui il primo è minore del secondo!

DEFINIZIONE 10. *Dati i segmenti* a *e* b *con* $a > b$, *la differenza* c *tra i due segmenti è quel segmento che sommato al minore dà il maggiore, ovvero tale che* $b + c = a$. *Si scriverà* $c = a - b$.

Si invitano gli studenti a dimostrare che somme o differenze di segmenti congruenti sono ancora segmenti congruenti.

Molto importanti sono le seguenti definizioni.

DEFINIZIONE 11. *Dato un segmento* a *che viene sommato con se stesso* n *volte, ottenendo il segmento* b, *diremo che* b *è il* ***multiplo*** *secondo* n *di* a *e scriveremo* $b = n \cdot a$. *Si può anche dire, più praticamente, che* b *è* n *volte* a. *Altresì, nelle condizioni testé descritte, si dirà anche che* a *è il* ***sottomultiplo*** *secondo* n *di* b, *oppure che è l'*$n-$*esimo sottomultiplo di* b *o ancora più chiaramente è una parte di* b *secondo* n *(ovvero l'*$n-$*esima parte di* b *). Scriveremo anche che* $a = \frac{1}{n} \cdot b$.

Ad esempio, immaginiamo di sommare tre volte a con se stesso ottenendo b. Quindi scriviamo:

$$b = a + a + a$$

$$b = 3 \cdot a.$$

In modo equivalente scriveremo anche

$$a = \frac{1}{3} \cdot b.$$

Bisogna porre molto attenzione al fatto che i numeri scritti prima dei segmenti sono *indicatori* di operazioni ripetute, precipuamente di somme ripetute e non reali moltiplicazioni di "oggetti matematici": non avrebbe alcun senso fare un prodotto tra un numero, che appartiene al "regno" dell'aritmetica, ed un segmento, che appartiene al mondo della geometria!

Degno di nota è il fatto notevole che per quanto grande prendiamo un segmento e per quanto piccolo ne prendiamo un altro, sommando ripetutamente il minore, prima o poi riusciremo ad ottenere un segmento maggiore del più grande! Questo fatto è una richiesta a cui si attribuisce pure il nome di due grandi Matematici del passato, che utilizzarono questa osservazione per ottenere grandi risultati.

POSTULATO 18 (Postulato di Eudosso-Archimede). *Dati due segmenti disuguali, esiste sempre un multiplo del minore che sia più grande del maggiore* [6]

Dulcis in fundo una richiesta che ha creato non pochi grattacapi ai Matematici di ogni tempo: infatti dire che una cosa si può fare non significa che effettivamente si sappia fare! e questo è qualcosa di molto sottile da comprendere.

POSTULATO 19 (Postulato di Divisibilità). *Dato un segmento, si può trovare il suo sottomultiplo secondo un qualsiasi numero n. Detto altrimenti: si può dividere in parti uguali un segmento per quanto lo si desidera.*

In particolare questo postulato garantisce che un segmento può essere diviso a metà [7] ed il punto che si fissa per effettuare tale divisione prende il nome di **punto medio** del segmento. In verità se volessimo dividere il segmento in sette, dieci o diecimila parti uguali, in virtù di questo postulato lo potremmo benissimo fare: più avanti vedremo come realizzare queste divisioni come conseguenza del *Teorema di Talete.* Ora, quanto detto per i segmenti, può tranquillamente essere affermato anche per gli angoli. Il postulato di divisibilità applicato agli angoli, garantisce l'esistenza di una semiretta, di origine il vertice dell'angolo, che divide a metà l'angolo stesso: questa semiretta prende il nome di **bisettrice** dell'angolo [8]. Impensabile per i Matematici greci era trovare difficoltà nel dividere in tre parti uguali un angolo qualsiasi utilizzando solo "riga e compasso" [9]. Diciamo subito che il problema è **irrisolvibile** con riga e compasso: pur assicurando, il postulato di divisibilità, la possibilità di poter dividere in tre parti uguali un angolo qualsiasi, non c'è alcuna costruzione con riga e compasso che permetta di farlo!

[6] L'affermazione è eqivalente a dire **Sommando ripetutamente un segmento, per quanto piccolo, lo si può rendere arbitrariamente grande!**

[7] ovvero in due parti uguali

[8] Più avanti vedremo come realizzare la divisione in due parti uguali dell'angolo come conseguenza della proprietà della semiretta bisettrice

[9] Le costruzioni classiche dei greci dovevano essere fatte tutte tramite un listello "non graduato" -chiamato *riga* ed una corda a cui si fissava una estremità, consentendo all'altra di ruotare liberamente -chiamata *compasso*

Famosi altri problemi non risolvibili con riga e compasso, passati alla storia anche con aneddoti fantasiosi e riferimenti alla mitologia classica, sono *duplicazione del cubo, quadratura del cerchio* e *rettificazione della circonferenza.* La duplicazione del cubo consiste nel cercare il lato del cubo di volume doppio rispetto a quello di un cubo assegnato. Gli altri due problemi sono equivalenti l'uno con l'altro e consistono nel trovare il lato di un quadrato che abbia stessa area del cerchio, oppure stesso perimetro della circonferenza. Su questi ultimi due problemi ci torneremo più avanti, quando avremo a disposizione abbastanza strumenti per affrontarli e cercare di arrivare ad una soluzione soddisfacente.

Concludiamo questo capitolo con le ultime definizioni, ulteriore terminologia utile e qualche Teorema che useremo di frequente a partire dal prossimo capitolo.

DEFINIZIONE 12. *Ricordiamo che un angolo piatto è formato con lati che sono semirette opposte. La metà dell'angolo piatto prende il nome di* angolo retto*. Il doppio dell'angolo piatto si chiama* angolo giro*. Inoltre, se un angolo è minore dell'angolo retto, esso si dirà* acuto*, se è maggiore del retto (ma minore dell'angolo piatto), si dirà* ottuso.

Se la somma di due (o più angoli) dà l'angolo retto, questi angoli si chiameranno **complementari,** altresì diremo che se la somma è l'angolo piatto, sono **supplementari** ed infine, se la somma è l'angolo giro, questi angoli si diranno **esplementari.**

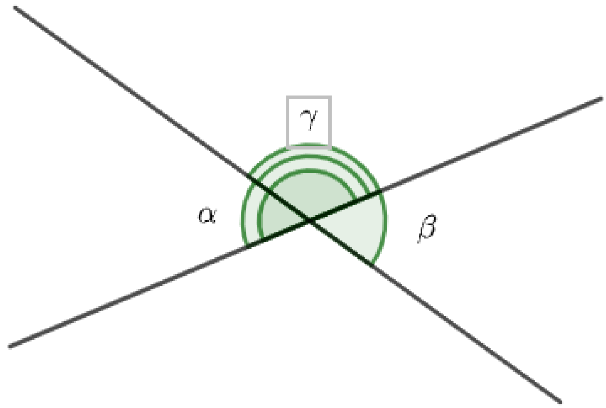
DEFINIZIONE 13. *Se due rette si intersecano formando quattro angoli retti, allora si diranno* perpendicolari *od anche* ortogonali.

E' giusto una osservazione notare che l'angolo adiacente ad un angolo retto deve essere anche esso retto e pertanto, affinché due rette siano ortogonali basta che si verifichi che si formi un angolo retto [10].

TEOREMA 1. *Angoli opposti al vertice sono congruenti.*

Dim.: Come utile esercizio, in riferimento alla figura d'appresso, scriviamo il teorema separando nettamente le ipotesi dalle tesi.

[10] Essendo gli altri adiacenti ad esso o tra loro.



Hp: α , e β sono opposti al vertice. **Th:** $\alpha \cong \beta$.

Basta notare che $\alpha + \gamma$ è un angolo piatto così come $\gamma + \beta$. dato che tutti gli angoli piatti sono congruenti e sottraendo angoli congruenti da angoli congruenti, il risultato sarà ancora una coppia di angoli congruenti, possiamo scrivere:

$$\alpha + \cancel{\gamma} \cong \cancel{\gamma} + \beta$$

da cui

$$\alpha \cong \beta,$$

avendo indicato con $\cancel{\gamma}$ la contemporanea sottrazione dell'angolo γ da entrambi i membri della congruenza.

c.v.d. [11]

[11] c.v.d. sta per **Come Volevasi Dimostrare** ed ogni volta che si giunge alla dimostrazione della tesi del Teorema, si può apporre questo acronimo con grande soddisfazione.

CAPITOLO 2

I criteri di Congruenza per i Triangoli.

1. Classificazione e prime nozioni sui poligoni

Iniziamo con una definizione abbastanza elementare, nel senso che la si incontra già in seconda elementare.

DEFINIZIONE 14. *Una successione di segmenti consecutivi, tutti nello stesso piano, si chiama* spezzata *o* poligonale aperta.

I segmenti si diranno anche *lati* della spezzata, mentre gli estremi dei segmenti saranno i *vertici.* Vertici che sono estremi di uno stesso lato si dicono *consecutivi,* così come si diranno consecutivi i lati che abbiano un estremo in comune. Una poligonale per la quale un vertice è sempre consecutivo a qualche altro vertice si dice *chiusa.* Inoltre diremo che una spezzata è *intrecciata* se esiste una coppia di lati non consecutivi con intersezione non vuota, altrimenti si dirà *non-intrecciata.*

DEFINIZIONE 15. *Una spezzata, non intrecciata, chiusa assieme alla parte di piano che essa delimita si chiama* poligono.

Dato un poligono, la spezzata che lo individua si chiama anche *contorno* o *perimetro;* i punti che stanno all'interno del poligono, diconsi *interni,* gli altri, che quindi non stanno né sul perimentro, né all'interno di esso, si dicono *esterni.* E' giusto un'osservazione che il numero di lati di un poligono coincide con il numero dei vertici; quindi c'è una duplice classificazione che può essere messa in atto per identificare i poligoni, però esse risultano perfettamente equivalenti: o si indicano il numero dei lati, oppure quello dei vertici che, per l'occasione, si identificano anche con gli angoli che la poligonale determina considerando i lati come parte di due semirette aventi origine comune. Se siamo interessati al numero di lati, la classificazione individua

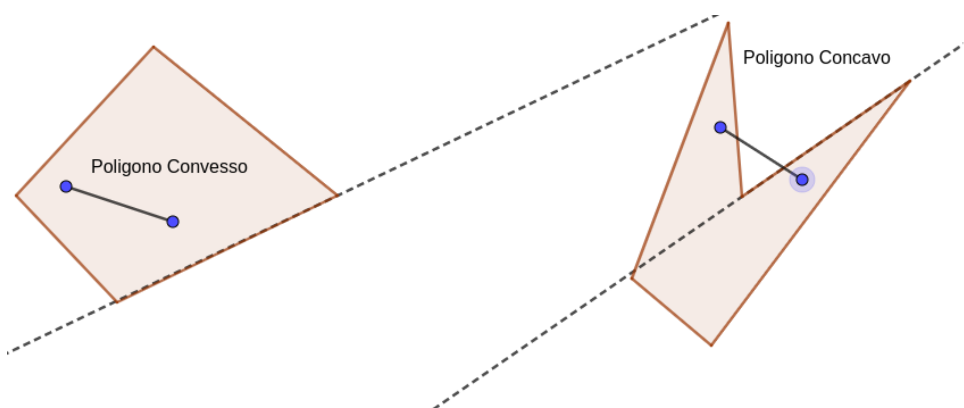
- trilateri: poligoni con tre lati;
- quadrilateri: poligoni con quattro lati;
- pentalateri: poligoni con cinque lati; ecc...

Se invece si è interessati ad indicare il numero dei vertici/angoli, allora si parla di

- triangoli: poligoni con tre angoli;
- quadrangoli: poligoni con quattro angoli;
- pentagoni: poligoni con cinque angoli; ecc...

Inoltre si classificano i poligoni in due macro-famiglie, a seconda che le rette su cui giacciono i lati non hanno punti interni al poligono stesso, oppure alcune di esse "atttraversano" il poligono stesso.

Definizione 16. *Un poligono si dice* convesso *se i punti interni stanno tutti dalla stessa parte rispetto alla retta su cui giace ciascun lato. Questo significa anche che le rette su cui giacciono i lati non "attraversano" la parte interna del poligono stesso. Si può anche verificare che è lo stesso dire che presi due punti qualsiasi interni al poligono, il segmento che li congiunge è formato tutto da punti interni del poligono. Se non avviene una delle proprietà dette or ora, il poligono si dirà* concavo.



Richiediamo, senza alcuna dimostrazione, anche se di potrebbe -con molta fatica- dimostrare la seguente affermazione, che è intuitivamente chiara.

Postulato 20. *Ogni segmento che ha un estremo in un punto interno al poligono e l'altro in un punto esterno, deve intersecare il perimetro del poligono in esattamente un punto.*

Altre due definizioni ed iniziamo a divertirci sul serio...

Definizione 17. *Segmenti con estremi sul contorno, che non siano i lati del poligono stesso, si chiamano* corde. *Tra le corde, particolare interesse suscitano quelle che hanno come estremi due vertici* [1]*: esse si chiameranno* diagonali *del poligono.*

[1]evidentemente non consecutivi.

Un poligono che abbia tutti i lati congruenti si dice *equilatero,* mentre uno che abbia tutti gli angoli congruenti si dirà *equiangolo.*

DEFINIZIONE 18. *Un poligono* regolare *è sia equilatero che equiangolo.*

Precisiamo che da qui in avanti noi ci occuperemo solo di **geometria euclidea, piana, convessa,** intendendo con questo che tutte le figure verranno considerate prese in uno stesso piano e che i poligoni saranno tutti convessi [2]

2. I triangoli

Prima di parlare della famiglia dei triangoli, evidentemente i poligoni di tipo più semplice, vogliamo precisare ancora un po' di terminologia. Iniziamo con l'osservare che ogni vertice di un triangolo è consecutivo a qualche altro, il ché implica che un triangolo non può avere diagonali. Inoltre osserviamo anche che un triangolo non potrà mai essere concavo. A questo punto introduciamo la classificazione in base al numero di lati uguali: un triangolo con tutti i lati uguali -già lo sappiamo- si chiama *triangolo equilatero.* Se il triangolo ha due lati congruenti, allora lo si chimerà *isoscele.* Se non ha lati uguali, lo si dirà *scaleno.* C'è da notare che un triangolo equilatero è evidentemente isoscele per ogni coppia di lati: in un certo senso è triplicemente isoscele. Nei triangoli isosceli -e solo in essi- si identifica *il vertice* che è quello formato dai lati congruenti e *la base,* che è il lato del poligono che si oppone al vertice. In più i lati uguali si chiamano semplicemente *lati* del triangolo isoscele. Per altro, gli angoli adiacenti alla base si diranno *angoli alla base,* mentre quello opposto alla base si chiamerà *angolo al vertice.*

DEFINIZIONE 19. *Gli elementi di un poligono che si corrispondono tramite un trasporto rigido si dicono* omologhi.

Quindi, per dimostrare che due figure sono congruenti, in particolare per dimostrare che due poligoni sono congruenti, occorre far vedere che gli elementi omologhi sono congruenti. Per i triangoli, visto che ci sono tre angoli e tre lati, bisognerebbe far vedere che i tre angoli, sovrapposti tramite il movimento rigido, combaciano e lo stesso vale per i lati: ovvero che lati e angoli omologhi sono congruenti. In verità le condizioni si riducono alla metà e di questo ci occuperemo a brevissimo:

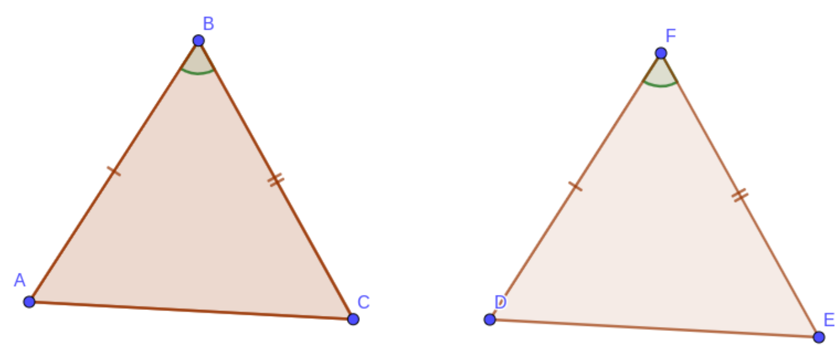
[2] Il primo attributo *euclideo* sarà chiarito più avanti, per ora basti sapere che trattiamo la geometria per come è stata presentata della monumentale opera "Elementi" di Euclide.

per dimostrare la congruenza di due triangoli basta verificare che siano congruenti solo tre tra i sei elementi omologhi, perché se sono congruenti quei tre elementi, in automatico dovranno essere congruenti tutt'e sei. Le proposizioni che seguono e che affermano quanto testé scritto si chiamano "criteri di congruenza". La parola *criterio,* d'altra parte, significa etimologicamente "distinguere", "giudicare" e quando si stabilisce un "criterio", in Matematica, si intende fornire una condizione necessaria e sufficiente a ché si verifichi qualche cosa, ovvero:

1° E' necessario che la condizione sia verificata, affinché accada quello che si dice dopo;
2° E' sufficiente che la condizione sia verificata, a ché quel che si dice dopo sia vero.

Teorema 2 (Primo criterio di congruenza:). *Due triangoli sono congruenti se e solo se hanno due lati e l'angolo tra essi compreso congruenti*

Dim.:



Immaginiamo di avere le seguenti ipotesi (e, come conviene fare, scriviamoci la tesi separatamente).

Hp: $\overline{AB} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, e $\hat{B} \cong \hat{F}$, come da figura.

Th: $\overline{ABC} \cong \overline{DEF}$.

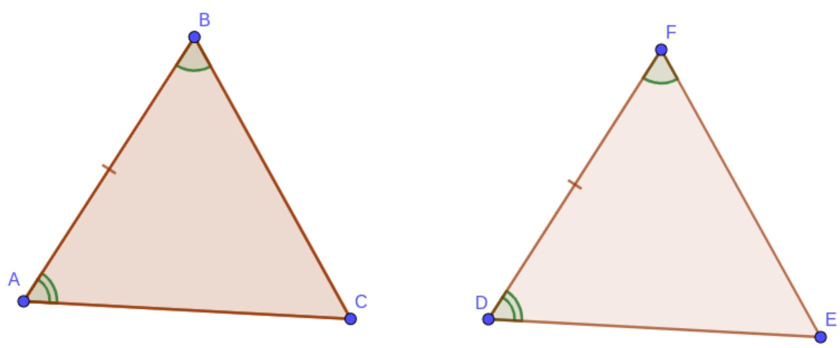
Ora, dato che gli angoli $\hat{B}$ e $\hat{F}$ sono congruenti, sicuramente è possibile sovrapporli tramite un movimento rigido in modo che essi combacino alla perfezione: il ché significa che il lato BA (dell'angolo) andrà a sovrapposi al lato FD, così come il lato BC andrà a sovrapporsi al lato FE. Ma se i punti B ed F si fanno coincidere ed anche le rette a cui appartengono vengono sovrapposte, allora i punti A e D, così come C ed E, dovranno anche coincidere poiché i segmenti

$\overline{AB}$ e $\overline{DF}$, così come $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$ sono supposti congruenti [3]. Se questo è vero, come lo è, allora i segmenti $\overline{AC}$ e $\overline{DE}$, avendo gli estremi coincidenti, dovranno essere congruenti. Questo basta per dimostrare la tesi, poiché tutti gli elementi dei due triangoli, nel moto rigido che ha fatto sovrapporre $\hat{B}$ con $\hat{F}$, saranno concidenti.

c.v.d.

TEOREMA 3 (Secondo criterio di congruenza). *Due triangoli sono congruenti se e solo se hanno un lato ed i due angoli ad esso adiacenti congruenti.*

Dim.:



Immaginiamo di avere le seguenti ipotesi.

Hp: $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\hat{B} \cong \hat{F}$, e $\overline{AB} \cong \overline{DF}$, come da figura.

Th: $\overline{ABC} \cong \overline{DEF}$.

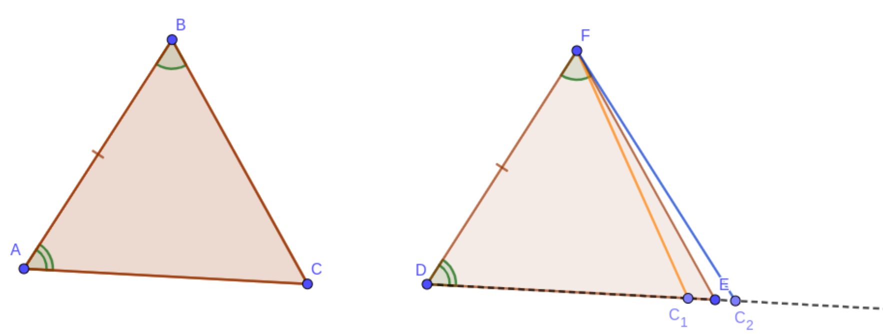
Dato che i lati $\overline{AB}$ e $\overline{DF}$ sono congruenti per ipotesi, allora si potrebbero sovrapporre in modo che coincidano tramite un movimento rigido. Avendo fatto sovrapporre i due lati, evidentemente gli estremi dovranno pure coincidere, per cui i lati degli angoli in $\hat{A}$ e $\hat{D}$ dovranno essere sovrapposti, essendo essi congruenti per ipotesi. Lo stesso dicasi per i lati degli angoli $\hat{B}$ e $\hat{F}$. A questo punto possiamo dire che i lati dell'angolo $\hat{A}$, le semirette AC e AB, si sono sovrapposti ai lati dell'angolo $\hat{D}$, che sono DE e DF. Lo stesso avviene per gli altri due lati degli angoli in $\hat{B}$ e in $\hat{F}$. Basta ora dimostrare che quando i lati degli angoli in A e B si incontrano, lo fanno in un punto che va a coincidere sul punto d'intersezione dei lati degli angoli in D e in F.

[3] Successivamente al moto rigido di congruenza che sovrappone i due angoli citati.

La dimostrazione può essere fatta in modo diretto [4] però, per illustrare un altro "metodo dimostrativo", procederemo **per assurdo.**

Un breve inciso prima di continuare la dimostrazione del criterio di congruenza: "dimostrare un teorema per assurdo" significa far vedere che la tesi non può essere falsa. Il modo di operare è: che succede se la tesi fosse falsa? dopo un ragionamento più o meno lungo, avendo supposto la tesi falsa, si arriva ad affermare qualcosa, che noi già sappiano essere vero, essere falso! tipicamente si andrà a contraddire qualche ipotesi o la tesi di un teorema già dimostrato. Chiaramente le ipotesi non possono essere false (su questo non si discute) ed i teoremi già dimostrati sono sicuramente con tesi vere, quindi l'errore è stato nel supporre la tesi da dimostrare falsa, per cui essa deve essere vera! E' un modo di procedere molto elegante, però presuppone che ciò che non è vero sia falso e ciò che non è falso, sia vero! insomma, questo tipo di dimostrazione può funzionare solo in un sistema logico binario in cui si possono attribuire solo due valori di verità ("V" o "F") e mai contemporaneamente: *tertium non datur* [5].

Riprendiamo la dimostrazione del criterio, per completare il discorso. Supponiamo per assurdo che il punto C non si sovrapponga al punto E. Poiché C appartiene alla semiretta AC che è andata a sovrapporsi alla semiretta DE (si scrive $C \in AC$), allora questo punto C dovrà trovarsi su DE o prima o dopo il punto E. Ora ci sono solo due casi: o il punto C è finito su un punto C_1 appartenente al segmento $\overline{DE}$, oppure su un punto C_2 esterno al segmento $\overline{DE}$, ma sempre sulla retta DE.



[4]Ed invitiamo gli studenti a farla, imitando la dimostrazione del primo criterio di congruenza.

[5]Tipicamente la logica aristotelica, su cui si basa la costruzione geometrica euclidea, rispetta queste richieste.

Nel primo caso succede che il lato BC dell'angolo $\hat{B}$ è comunque sovrapposto al lato FC_1 dell'angolo in $\hat{F}$, avendo i punti B ed F, sovrapposti così come C e C_1 ed A con D. Quindi gli angoli $A\hat{B}C$ e $D\hat{F}C_1$ sono congruenti [6] ma è anche $A\hat{B}C \cong D\hat{F}E$ per ipotesi *ergo,* per la transitività della congruenza, $D\hat{F}C_1 \cong D\hat{F}E$ che è impossibile, dato che il primo angono è contenuto nel secondo e questo contraddirebbe il postulato n. 17 . Analogamente si può dimostrare [7] che se C andasse a sovrapporsi al punto C_2 allora l'angolo $\hat{F}$ dovrebbe essere congruente ad uno che lo contiene come parte propria. Questo significa che non è vero che C non va a coincidere con E : quindi in effetti C ed E devono necessariamente sovrapporsi e questo basta per dimostrare la tesi, poiché poi tutti gli elementi omologhi dovranno combaciare.

c.v.d.

Prima di procedere con l'enunciato e la dimostrazione del terzo (ed ultimo) criterio di congruenza, è d'uopo iniziare a vedere qualche notevole conseguenza dei criteri già dimostrati, in particolare le prime proprietà dei triangoli isosceli. Premettiamo dell'altra terminologia utile.

DEFINIZIONE 20. *Si chiama* bisettrice *dell'angolo di un triangolo il segmento che parte dal vertice dell'angolo ed ha l'altro estremo sul lato opposto e che giace sulla semiretta bisettrice dell'angolo stesso. Altresì chiameremo* mediana *quel segmento che ha un estremo in un vertice del triangolo e l'altro nel punto medio del lato opposto a quel vertice. L'*altezza *(relativa) di un triangolo è quel segmento che ha un estremo in un vertice e l'altro sul lato opposto perpendicolarmente al lato stesso. Il punto sul lato, estremo dell'altezza relativa, si chiama anche* piede *dell'altezza. In ultimo, l'*asse *di un segmento è quella retta perpendicolare al segmento che passa dal suo punto medio.*

Evidentemente, dato che i triangoli hanno tre lati e tre vertici, tutti i segmenti presentati nella definizione testé data sono in numero di tre: quindi un triangolo ha tre bisettrici, tre altezze, tre mediane e tre assi.

2.1. I triangoli isosceli. Ricordiamo che nella definizione di "triangolo isoscele" l'unica cosa che si richiede è che abbia due lati uguali. Ora dimostreremo che da questa richiesta consegue che questi triangoli hanno anche due angoli uguali ed altre belle proprietà che saranno utili nel proseguo.

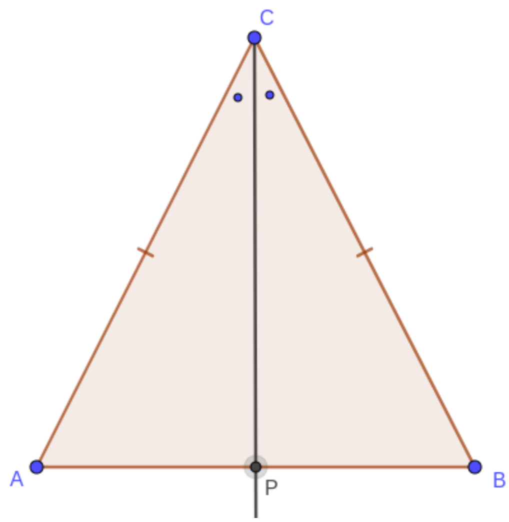
[6] Avendo i lati sovrapposti!

[7] Ed invitiamo lo studente a svolgere tutto il ragionamento per intero, in modo da esercitarsi con il modo di dimostrare indiretto.

Proposizione 1. *Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti.*

Dim.: **Hp:** $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, come da figura seguente.

Th: $\hat{A} \cong \hat{B}$.



Si tracci la bisettrice dell'angolo in $\hat{C}$, essa divide il triangolo in due altri triangoli congruenti per il primo criterio, avendo $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ per ipotesi, $A\hat{C}P \cong P\hat{C}B$ poiché CP è stata scelta bisettrice di $\hat{C}$ ed il lato $\overline{CP}$ in comune ai due triangoli. Segue che gli elementi omologhi sono congruenti e quindi, in particolare, anche $\hat{A} \cong \hat{B}$.

c.v.d.

Corollario 4. *La bisettrice dell'angolo al vertice (di un triangolo isoscele) è anche mediana ed altezza relativa alla base del triangolo.*

Dim.: Basta considerare che, per la dimostrazione precedente, in riferimento alla stessa figura, sia ha $\overline{AP} \cong \overline{PB}$ essendo lati omologhi dei triangoli congruenti [8] e $A\hat{P}C \cong B\hat{P}C$ essendo angoli omologhi, ma essendo anche angoli adiacenti, allora devono essere entrambi retti [9].

c.v.d.

[8] Questo dimostra che $\overline{CP}$ è bisettrice

[9] Questo dimostra che $\overline{CP}$ è anche altezza.

COROLLARIO 5. *In un triangolo equilatero tutti gli angoli sono congruenti* [10]*, così come tutte le bisettrici, tutte le altezze e tutte le mediane anche tra di loro.*

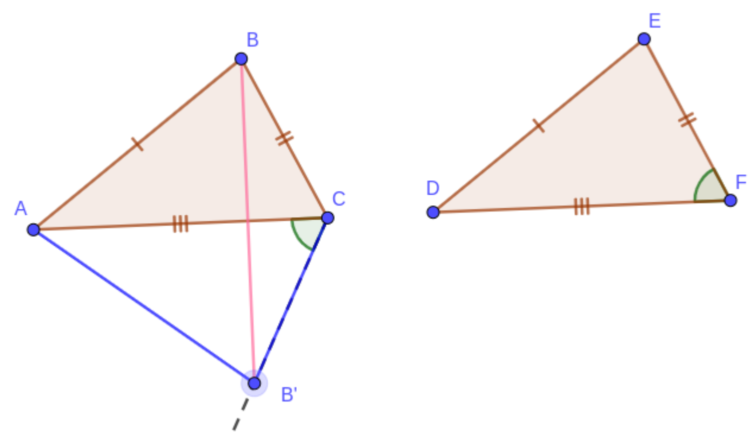
Dim.: Un triangolo equilatero è isoscele su ogni coppia di lati, quindi che sia equiangolo segue dal fatto che gli angoli alla base del triangolo isoscele sono congruenti. La seconda parte, riguardante la congruenza delle bisettrici, altezze e mediane è lasciata come esercizio allo studente solerte.

c.v.d.

TEOREMA 4 (Terzo criterio di congruenza). *Due triangoli sono congruenti se e solo se hanno tutt'e tre i lati ordinatamente congruenti.*

Dim.: **Hp:** $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, come da figura seguente.

Th: $\overline{ABC} \cong \overline{DEF}$.



Tracciamo da C la semiretta che formi con AC un angolo congruente all'angolo $\hat{F}$. Fissiamo su tale semiretta il punto B' tale che $\overline{CB'} \cong \overline{EF}$. A questo punto consideriamo il triangolo di vertici A, C e B'. Per il primo criterio si ha $\overline{ACB'} \cong \overline{DEF}$ avendo $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ per ipotesi, $A\hat{C}B' \cong D\hat{F}E$ per costruzione, così come $\overline{CB'} \cong \overline{EF}$. Quindi

[10]E' notevole "dirla" in quest'altro modo: **Un triangolo equilatero è il poligono regolare di tre lati.** Solo per i trilateri è vera questa affermazione: infatti i quadrilateri equilateri non devono necessariamente essere anche equiangoli e la stessa cosa dicasi per i poligoni con un numero maggiore di lati.

possiamo dire che $\overline{AB'} \cong \overline{DE}$ in quanto lati omologhi nella congruenza. Ma allora è, per transitività, anche $\overline{AB'} \cong \overline{AB}$ essendo entrambi congruenti a $\overline{DE}$. *Ergo* i triangoli $\overline{ABB'}$ e $\overline{BCB'}$ sono isosceli avendo due lati congruenti. Ma allora i loro angoli alla base sono congruenti, quindi possiamo scrivere

$$A\hat{B}B' \cong A\hat{B}'B$$

e

$$C\hat{B}B' \cong C\hat{B}'B.$$

Sommando angoli uguali, si ottengono ancora angoli uguali e quindi, sommando membro a membro, otteniamo

$$A\hat{B}C \cong A\hat{B}'C.$$

A questo punto, possiamo dedurre, applicando il primo criterio [11], che i triangoli $\overline{ABC}$ e $\overline{ACB'}$ sono congruenti e, dato che quest'ultimo è anche congruente a $\overline{DEF}$, per la transitività della congruenza, risulta $\overline{ABC} \cong \overline{DEF}$.

c.v.d.

2.2. Un teorema fondamentale. Si chiama *angolo esterno* ad un poligono, quello che si forma tra il prolungamento di un lato ed il lato consecutivo ad esso. Si osserva che da questa definizione, per ogni vertice del poligono, si trovano due angoli esterni, dato che i lati consecutivi ad un altro sono due, a seconda se sei sceglie di percorre i lati del poligono stesso in verso orario od antiorario. Comunque questi angoli esterni sono sempre a due a due congruenti, risultando, su ogni vertice, opposti al vertice. Un fatto notevole, che riguarda gli angoli esterni di un triangolo, è dimostrato nel prossimo teorema.

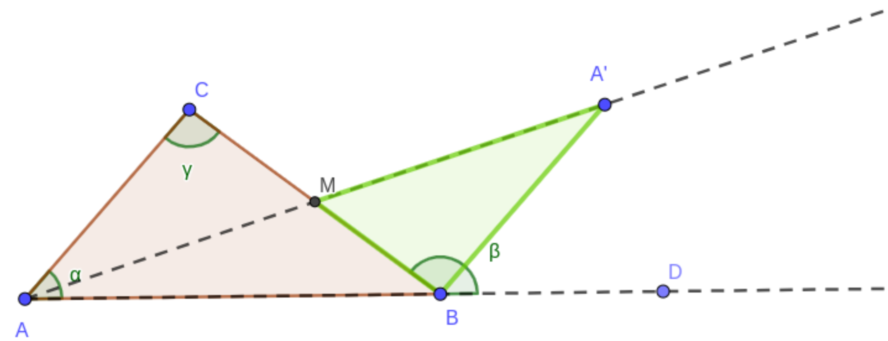
Teorema 5 (Teorema dell'angolo esterno). *Gli angoli esterni di un triangolo sono sempre maggiori degli angoli interni non adiacenti ad essi.*

Dim.: **Hp:** $\overline{ABC}$ è un triangolo e $\beta = D\hat{B}C$ è un angolo esterno

e $\alpha = B\hat{A}C, \gamma = B\hat{C}A$ sono angoli interni non adiacenti a β, come da figura seguente.

Th: $\beta > \alpha$ e $\beta > \gamma$.

[11]Lo studente elenchi le ipotesi verificate affiché si possa applicare il primo criterio!



Si tracci da A la semiretta che passa dal punto medio M del lato $\overline{BC}$. Su tale semiretta si fissi il punto A' tale che $\overline{MA'} \cong \overline{AM}$. I triangoli $\overline{AMC}$ e $\overline{BMA'}$ risultano congruenti per il primo criterio, avendo $\overline{AM} \cong \overline{MA'}$ per costruzione, $\overline{CM} \cong \overline{MB}$, avendo scelto M punto medio di $\overline{BC}$ e $A\hat{M}C \cong B\hat{M}A'$ in quanto opposti al vertice. *Ergo* gli angoli $A\hat{C}M$ e $M\hat{B}A'$ risultano congruenti essendo omologhi. Ma allora γ risulta congruente ad un angolo contenuto dentro l'angolo β come sua parte propria e quindi $\gamma < \beta$. La dimostrazione che $\alpha < \beta$ è analoga: basta considerare il punto medio del lato $\overline{AB}$ e tracciare la semiretta di origine C e passante da esso. Il resto viene lasciato come esercizio al lettore attento, con l'avvertimento che non troverà immediatamente un angolo contenuto in β e congruente ad α, ma tutto si aggiusta considerando gli angoli "opposti al vertice" [12].

c.v.d.

3. Conseguenze del teorema dell'angolo esterno.

L'ultimo teorema dimostrato ha notevoli conseguenze non solo per i triangoli, ma per la geometria stessa di Euclide. In questa sezione vogliamo illustrare diversi corollari di quel teorema ma, soprattutto, introdurre il discorso che porterà alla giustificazione dell'attributo *euclidea* per la geometria che stiamo sviluppando in questo libricino.

Corollario 6. *Se un triangolo ha un angolo retto, gli altri due devono essere acuti.*

Dim.: Infatti, l'angolo esterno adiacente all'angolo retto deve essere anche retto, per cui gli interni non adiacenti, dovendo essere minori di esso, sono entrambi acuti.

c.v.d.

[12] Provare per credere.

Oss.: E' importante capire che un triangolo non può avere, proprio in virtù del teorema dell'angolo esterno, due angoli retti; questo è una affermazione che consegue dal corollario testé dimostrato e che utilizzeremo a breve in modo "pesante".

COROLLARIO 7. *Se un triangolo ha un angolo ottuso, gli altri due devono essere acuti.*

Dim.: L'angolo esterno adiacente all'angolo interno ottuso deve essere acuto e quindi i due interni non adiacenti, essendo minori, a fortiori devono essere acuti.

c.v.d.

In forza di questi due corollari, si è soliti anche fare una "classificazione" dei triangoli in base alle caratteristiche degli angoli: se il triangolo ha un angolo retto, lo si chiamerà *rettangolo* (ed in questo caso -e solo in questo caso!- i lati perpendicolari si chiameranno *cateti,* mentre quello opposto all'angolo retto *ipotenusa*). Se è presente un angolo ottuso, il triangolo si chiamerà *ottusangolo,* se invece tutt'e tre gli angoli sono acuti, il triangolo prende il nome di *acutangolo.*

In ultimo il seguente utile corollario, che dà modo a chiunque voglia disegnare due rette parallele, di utilizzare le squadrette per come si insegna normalmente nei corsi di "disegno".

COROLLARIO 8. *Rette perpendicolari ad una stessa retta sono tra loro parallele.*

Dim.: Se si incontrassero si dovrebbe formare, da qualche parte, un triangolo con due angoli retti e questo non è possibile.

c.v.d.

3.1. Rette perpendicolari e rette parallele.

DEFINIZIONE 21. *Ricordiamo che due rette si dicono* perpendicolari *od* ortogonali *se incontrandosi formano angoli retti. Se r è perpendicolare ad s, noi scriveremo anche $r \perp s$. Due rette si dicono* parallele *se l'intersezione non è un punto* [13]. *Se due rette sono parallele, utilizzeremo il simbolo $\parallel$.*

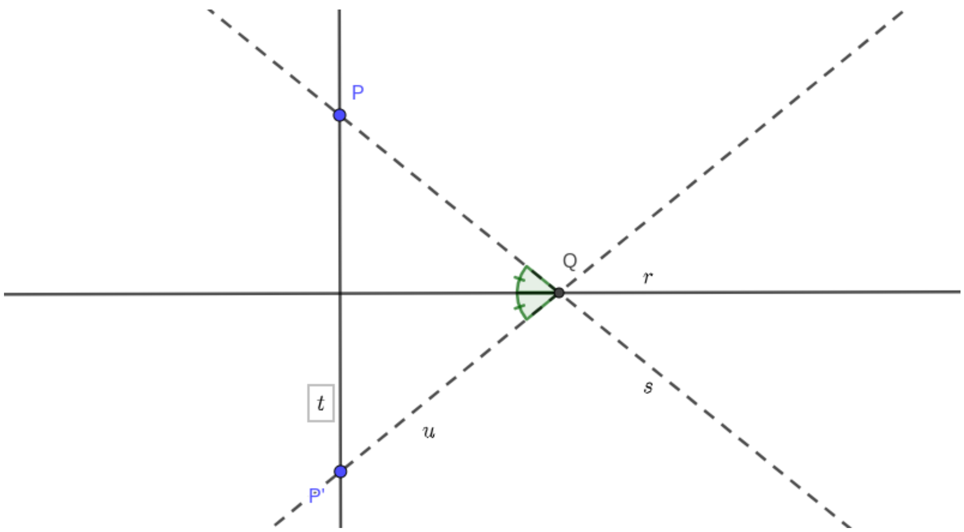
Un fatto che dovette sconvolgere Euclide, in primis, e successivamente tutti gli autori che trattarono di geometria, almeno fino a tempi

[13] Ovvero o non si incontrano mai, oppure sono sovrapposte e combaciano.

piuttosto recenti [14], fu l'osservazione che nel parlare di perpendicolarità, delle proposizioni facilmente dimostrabili potevano essere riportate -fino ad un certo punto- anche per le rette parallele, ma una di esse risultava particolarmente ostica da dimostrare, anche se intuitivamente ragionevole [15].

PROPOSIZIONE 2. *Data una retta ed un punto che non le appartiene,* esiste ed è unica *la retta perpendicolare alla retta data e passante dal punto.*

Dim.: Dobbiamo dimostrare due cose: per prima che esiste una retta con le proprietà richieste e, successivamente, che quella trovata è unica.



Sia data la retta r e $P \notin r$. Tracciamo, passante per P una retta s [16] che interseca la r nel punto Q. Da Q tracciamo ora una retta u che formi con r un angolo congruente a quello che la retta s formava con la stessa retta r. Infine fissiamo su u un punto P' tale per cui $\overline{QP'} \cong \overline{QP}$. A questo punto osserviamo che il triangolo $\overline{PQP'}$ è isoscele e che

[14] Finché Matematici del calibro di Gauss, Bolyai e Lobačevskij, attorno alla prima metà del XIX secolo, non fecero vedere che si potevano creare anche geometrie non-euclidee.

[15] Ed in effetti non poteva essere dimostrata, ma doveva essere data come richiesta tramite postulato, indipendente da tutti gli altri postulati già dati precedentemente.

[16] Se s fosse perpendicolare avremmo già finito, ma nessuno ci assicura che essa sia perpendicolare: noi, invece, costruiremo una retta che sicuramente è perpendicolare ad r.

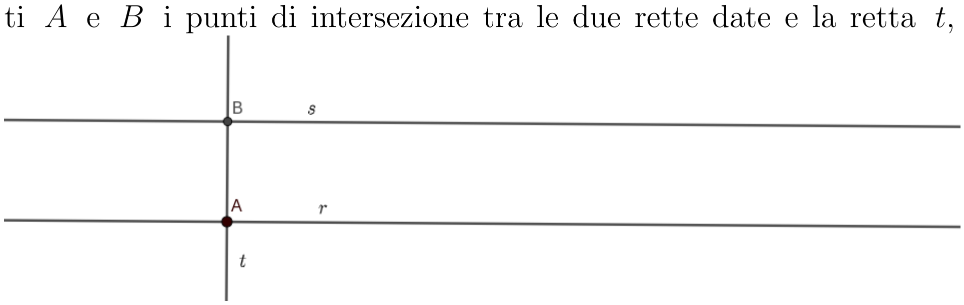
la retta r è proprio la bisettrice dell'angolo in Q, che è l'angolo al vertice del triangolo dato. Questo implica che r è anche la retta su cui giace l'altezza relativa alla base del triangolo isoscele, ovvero che $r \perp \overline{PP'}$, quindi, se consideriamo la retta t passante dai punti P e P', questa è sicuramente ortogonale ad r. Abbiamo appena dimostrato che *esiste* una retta ortogonale ad r e passante da P. L'unicità, come spesso accade, si può facilmente dimostrare tramite un ragionamento per assurdo.
Supponiamo $t \perp r$ non sia unica: quindi ce ne deve essere ancora almeno un'altra, chiamiamola t', perpendicolare ad r e passante da P. Queste due rette, t e t', incontrandosi con r dovrebbero determinare due punti che, assieme al punto P sono i vertici di un triangolo. Questo però è assurdo, in quanto gli angoli che t e t' formano con r sono entrambi retti e quindi dovremmo avere un triangolo con ben due angoli retti! Quindi l'ulteriore retta t' non può esistere.

c.v.d.

Il fatto sconvolgente era che per le rette parallele si può dimostrare un teorema analogo a questo appena scritto, ma **l'unicità della retta parallela** non si può dimostrare!

LEMMA 1. *Rette perpendicolari ad una stessa retta sono parallele tra di loro.*

Dim.: Se r ed s sono entrambe perpendicolari alla retta t e si incontrassero, per assurdo, in qualche punto, diciamo C, allora, detti A e B i punti di intersezione tra le due rette date e la retta t,



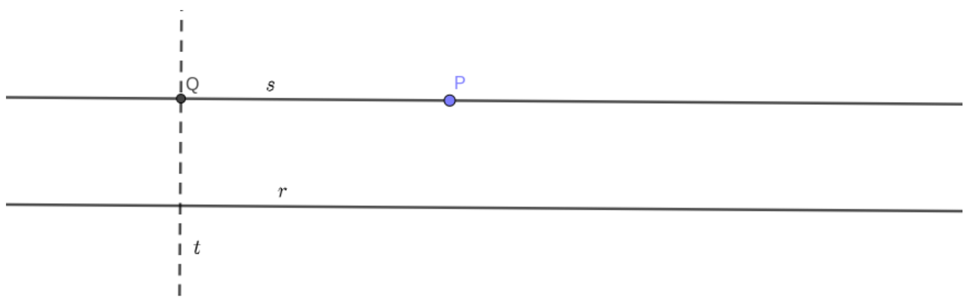
il triangolo $\overline{ABC}$ dovrebbe avere due angoli retti (quelli in A e in B)

e questo non può essere! quindi il punto C di intersezione tra r ed s non si può trovare.

c.v.d.

PROPOSIZIONE 3. *Data una retta ed un punto che non le appartiene, esiste una retta parallela a quella data e passante per il punto.*

Dim.: Da notare la palese asimmetria di questa proposizione con quella enunciata per le perpendicolari: manca l'unicità! e questo doveva sembrare intollerabile, poiché "a naso" che la retta che troveremo sia unica, è una cosa piuttosto ragionevole.



Sia data la retta r e $P \notin r$. Consideriamo un altro punto che non sia P e che non appartenga ad r: chiamiamolo Q. Ora, da Q tracciamo la retta perpendicolare ad r, che esiste ed è unica per la proposizione precedente. Tale retta la chiamiamo t. Da P tracciamo la retta perpendicolare a t, che esiste ed è unica, sempre per la proposizione precedente: chiamiamola s. Ora, due rette ortogonali alla stessa retta sono tra loro parallele, per quanto stabilito nel lemma, per cui $r \parallel s$.

c.v.d.

Oss.: Nella dimostrazione del teorema appena fatta, abbiamo *esibito* una retta parallela a quella data e passante dal punto; attenzione che **trovarne una non significa che essa sia la sola!** anche, addirittura, se essa è stata costruita utilizzando **le uniche** rette ortogonali passanti per il dato punto. Siamo solo riusciti a trovarne una che è unica limitatamente al metodo che abbiamo utilizzato per "costruirla", ma nessuno ci assicura che non ne esista almeno un'altra! Nel corso dei secoli si è cercato di dimostrare che la retta trovata da noi sia anche la sola possibile, ma i tentativi risultarono tutti infruttuosi. Da ricordare sicuramente il tentativo di *Girolamo Saccheri* che, cercando di dimostrare per assurdo che la retta trovata fosse unica, riuscì, verso l'inizio del XVIII secolo, a dedurre una quindicina di nuove proposizioni di geometria non-euclidea che egli pensava fossero sbagliate, ma alla luce di ulteriori studi, durati quasi un secondo e mezzo, risultarono invece perfettamente compatibili e giuste, ma in un altro inquadramento teorico in cui la geometria sviluppata rispettava tutti i postulati di Euclide ad eccezione dell'ultimo che egli diede. Questo ultimo postulato, storicamente enunciato come ***quinto postulato*** di Euclide, evidentemente allo stesso Euclide faceva storcere il naso: infatti non solo lo diede come ultimo nel suo sistema teorico, ma cercò in tutti i modi di evitare di utilizzarlo finché ne avesse avuto la possibilità.

POSTULATO 21 (Postulato delle parallele [17]). *La retta parallela ad una data e passante per un punto (che non le appartine) è unica.*

Con questo postulato che, per altro, è fondamentale per continuare la costruzione della nostra Teoria, abbiamo "ristabilito" la simmetria nelle affermazioni tra rette perpendicolari e rette parallele: infatti possiamo affermare che **"Data una retta ed un punto che non le appartiene, esistono e sono uniche sia la retta perpendicolare, sia la retta parallela a quella data e passante dal punto".**

La geometria che stiamo costruendo passo-passo si chiama *Geometria Euclidea* essenzialmente perché è richiesto che valga questo ultimo postulato. Ci sono altre geometrie in cui questo postulato non è richiesto ed esse appartengono alla famiglia delle *Geometrie Non-Euclidee.* Un esempio tipico di geometria non-euclidea è quella che si può studiare sulla superficie di una sfera. Su di essa esistono triangoli con addirittura tre angoli retti (ad esempio basti considerare "un ottante"), ma bisogna dapprima stabilire e chiarire bene cosa siano i segmenti e le rette su una superficie che non è "piana". Il discorso porterebbe lontano dagli obbiettivi che ci siamo prefissati, per cui tralasciamo, accontentandoci di aver messo "una pulce nell'orecchio" del lettore attento.

[17] Anche "V postulato di Euclide"

CAPITOLO 3

I criteri di parallelismo.

Per definizione, due rette parallele hanno intersezione che non sia un solo punto: diffusa, invece, è la "versione" che *non si incontrano mai.* In verità, per la nostra definizione è equivalente a quest'altra: "Due rette sono parallele se non si incontrano mai, oppure sono coincidenti [1]". Il vantaggio della nostra definizione è che permette di affermare che **il parallelismo è una relazione di equivalenza.** Infatti, una retta, coincidendo con se stessa (ovvero avendo tutti i punti in comune con se stessa) è parallela a se stessa! questo verifica la proprietà riflessiva [2]. Se una retta è parallela ad un'altra, allora quest'altra è parallela alla prima (proprietà simmetrica). In ultimo, se due rette sono parallele ad una terza, lo sono anche tra di loro (proprietà transitiva) [3].

1. Breve excursus sulle Relazioni di Equivalenza.

Ci si potrebbe domandare come mai è così interessante stabilire che una relazione sia d'equivalenza. Ebbene, immaginiamo di avere un insieme [4] di elementi e di aver dato una relazioni tra gli elementi di questo insieme.

Definizione 22. *Sia A un insieme e $a \in A$ un elemento generico di A. Si chiama* Classe di Equivalenza di *a l'insieme costituito da tutti gli elementi di A che siano equivalenti ad a. In linguaggio "simbolico" si scrive, se $\sim$ indica la relazione posta tra gli elementi:*

$$[a] := \{x | x \in A, x \sim a\}.$$

Se consideriamo l'insieme formato da tutte le classi di equivalenza, evidentemente ritroviamo l'insieme di partenza A, ma con gli elementi messi ciascuno in una sola classe di equivalenza [5]: questo nuovo

[1] Ovvero hanno tutti i punti in comune.

[2] Se dicessimo che due rette parallele non si incontrano mai, allora la proprietà riflessiva non sarebbe rispettata!

[3] Il lettore cerchi di giustificare questa ultimo proprietà.

[4] Un **insieme** è un *Ente Primitivo* e, pertanto, non può essere definito: ognuno di noi ha un'idea di cosa sia un insieme e questo basta. Gli insiemi sono costituiti da elementi che, come si dice, gli appartengono.

[5] Lo dimostreremo tra poco.

insieme si chiama Insieme Quoziente di A modulo la relazione $\sim$ *e si indica con* $A_{/\sim}$*. Pertanto, in linguaggio più formale:*

$$A_{/\sim} := \{[a]\,|a \in A\}.$$

L'insieme quoziente è l'insieme di partenza A con una *classificazione* degli elementi che vengono raggruppati per classi di equivalenza, da cui emerge la caratteristica comune degli elementi messi tutti in una stessa classe di equivalenza. Si badi bene che, però, sebbene le Classi di equivalenza siano costituite tutte da elementi di A, l'insieme quoziente, in effetti, rappresenta un nuovo insieme rispetto ad A stesso! Si dice anche che *la relazione ripartisce l'insieme in classi di equivalenza.* Introduciamo, per comodità i simboli insiemistici che utilizzeremo a breve.

Definizione 23. *Se A e B sono due insiemi, la loro* intersezione *è indicata con $A \cap B$ ed indica l'insieme degli elementi comuni ai due insiemi:*

$$A \cap B := \{x\,|\,x \in A \quad e \quad x \in B\}.$$

L'unione è l'insieme formato con tutti gli elementi di A e B riuniti in un nuovo gruppo:

$$A \cup B := \{x\,|\,x \in A \quad o \quad x \in B\}.$$

Per ora basti questo, sapendo che un capitolo intero sarà dedicato all'*insiemistica.*

Proposizione 4. *Le* classi di equivalenza *sono disgiunte a due a due* [6] *e la loro unione è tutto l'insieme di partenza.*

Dim.: Consideriamo due classi di equivalenza $[a]$ e $[b]$ costituite da elementi dell'insieme A. Se $[a] \cap [b]$ fosse diversa dall'insieme vuoto [7], allora ci dovrebbe essere almeno un elemento, diciamo c, che appartiene ad entrambi. A questo punto, dato che la relazione di equivalenza gode della proprietà transitiva, tutti gli elementi di $[a]$ sono in relazione con c così come lo devono essere tutti gli elementi di $[b]$ e questo significa, in particolare, che anche $a \sim b$. Quindi si avrebbe che $[a]$ include tutti gli elementi di $[b]$ e viceversa, $[b]$ include tutti gli elementi di $[a]$; ovvero le due classi di equivalenza coincidono: $[a] = [b]$. Riassumendo, o le classi di equivalenza coincidono, basta che abbiano un solo elemento in comune! oppure sono separate. Visto che l'insieme quoziente considera tutti gli elementi dell'insieme di partenza, è chiaro che esso, per tramite delle classi di equivalenza, deve riportare

[6] Ovvero non hanno elementi in comune: la loro intersezione è vuota!

[7] Ovvero i due insiemi avessero qualche elemento in comune.

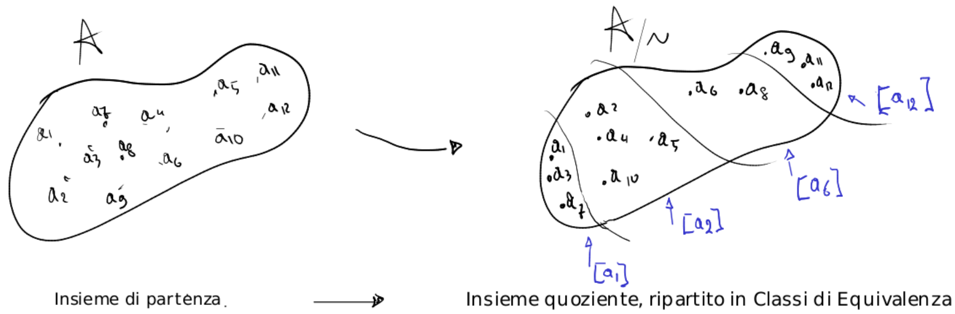
tutti gli elementi dell'insieme A : quindi l'unione di tutte le classi di equivalenza dà A.

c.v.d.

Interessante è notare che in una classe di equivalenza, ogni elemento ha la stessa importanza dell'altro: in parole povere, se prendiamo un elemento qualsiasi in una classe di equivalenza ebbene... la classe di equivalenza di tale insieme coincide con la classe di equivalenza da cui l'abbiamo "prelevato". Come si dice: "ogni elemento di una classe di equivalenza rappresenta tutta classe"!

$$\text{se} \quad x \in [a] \quad \text{allora} \quad [x] = [a].$$

La seguente rappresentazione grafica dà un'idea abbastanza intuitiva di cosa sta succedendo.



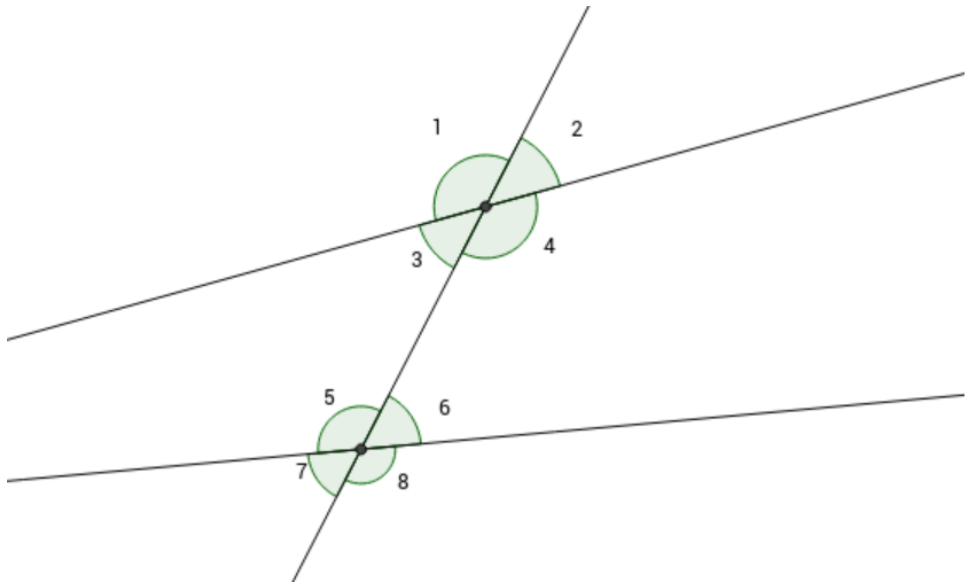
Dato che stiamo parlando di "parallelismo", l'esempio è immediato e spontaneo. L'insieme di tutte le rette del piano è ripartito in classi di equivalenza tramite la relazione di parallelismo: tali classi raggruppano tutte le rette mutuamente parallele in un unico insieme. Se le classi di equivalenza vengono considerate come un unico elemento nell'insieme quoziente, allora esse hanno un nome che universalmente è riconosciuto essere quello di **direzione.** Facciamo giusto notare che anche la *congruenza* è una relazione di equivalenza [8], pertanto l'insieme delle figure piane viene ripartito, dalla relazione di congruenza, in classi di equivalenza, che raggruppano in un unico insieme tutte le figure congruenti tra di loro.

2. Come stabilire se due rette sono parallele.

Prima di riprendere il discorso, introduciamo la seguente terminologia.

[8]E ne incontreremo altre di relazioni di equivalenza...

DEFINIZIONE 24. *Date due rette ed una terza che le interseca come in figura, quest'ultima la si chiama* trasversale *e gli angoli indicati in figura si diranno, a coppie:*



(1) *Gli angoli* 3 *e* 6 *(ed anche* 4 *e* 5 *) si chiamano* alterni interni.
(2) *Gli angoli* 3 *e* 5 *(ed anche* 4 *e* 6 *) si dicono* coniugati interni.
(3) *Gli angoli* 1 *e* 8 *(ed anche* 2 *e* 7 *) so dicono* alterni esterni.
(4) *Gli angoli* 1 *e* 7 *(ed anche* 2 *e* 8 *) si dicono* coniugati esterni.
(5) *Gli angoli* corrispondenti *sono quelli indicati dalle coppie* 1 *e* 5, 3 *e* 7, 2 *e* 6 *od ancora* 4 *e* 8.

Rispondiamo ora alla domanda chiave: come si stabilisce il parallelismo tra due rette, dato che non possiamo immaginare di camminare all'infinito, in entrambe le direzioni, per assicurarci che non abbiano un punto in comune?

TEOREMA 6 (Criteri di parallelismo). *Due rette sono parallele se e soltanto se una delle coppie di angoli alterni interni, alterni esterni o corrispondenti risultano congruenti.*

Dim.: In verità basta dimostrare per una sola coppia di angoli indicati, dato che se una di essere risulta formata da angoli congruenti, allora saranno congruenti anche gli angoli delle altre coppie [9]. Pertanto noi dimostreremo solo per il caso di angoli alterni interni congruenti.

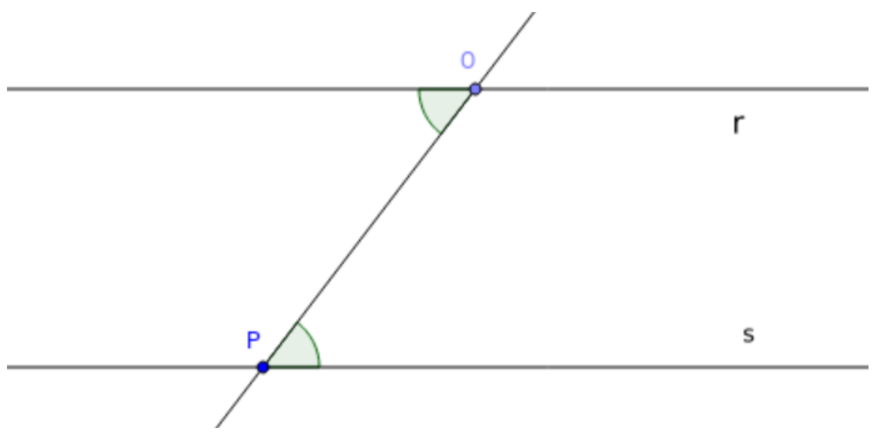
[9] Si invita il lettore a soffermarsi su questa affermazione e darne una giustificazione.

Dobbiamo dimostrare due implicazioni: la prima è la parte "se", ovvero che se gli angoli alterni interni sono congruenti, allora le rette sono parallele. La seconda e la parte del "solo se", ovvero che se le rette sono parallele, allora gli angoli alterni interni sono congruenti.

Prima parte

Hp: $\hat{O} \cong \hat{P}$ angoli alterni interni come in figura.

Th: $r \parallel s$.



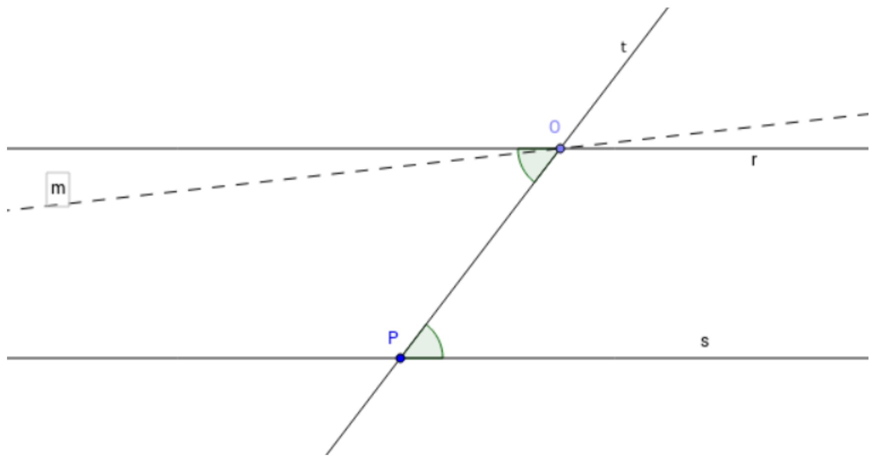
Consideriamo la situazione come in figura: per assurdo siano r ed s non parallele. Esisterà allora un punto Q ad esse in comune. Il triangolo $\overline{OPQ}$ avrebbe un angolo esterno uguale ad uno degli angoli interni non adiacente ad esso. Questo contraddice il teorema dell'angolo esterno. Quindi r ed s non possono avere punti in comune, ovvero sono parallele.

$\diamond$

Seconda parte

Hp: $r \parallel s$.

Th: $\hat{O} \cong \hat{P}$ angoli alterni interni come in figura.



Siano r ed s le due rette parallele e t la trasversale. Supponiamo per assurdo che non sia vera la tesi: vuol dire che gli angoli sono disuguali e quindi, modificando opportunamente la posizione della retta r, ruotandolo attorno al punto O, potremo trovare una nuova posizione della retta per la quale gli angoli alterni interni siano congruenti. Indichiamo con m la retta ottenuta ruotando la r fino ad ottenere gli angoli alterni interni congruenti. Ora, per la prima parte del criterio, già dimostrata, abbiamo che $m \parallel s$, dato che forma angoli alterni interni congruenti con la trasversale data; ma per ipotesi è anche $r \parallel s$ e -purtroppo o per fotuna!- esse passano tutt'e due da O. Il postulato delle parallele però afferma che per un punto non appartenente ad una retta data, passa **un'unica** retta parallela ad essa! ergo è assurdo negare la tesi, dovendo contraddire il V postulato di Euclide, per cui le due rette formano necessariamente angoli alterni interni congruenti se esse sono parallele.

c.v.d.

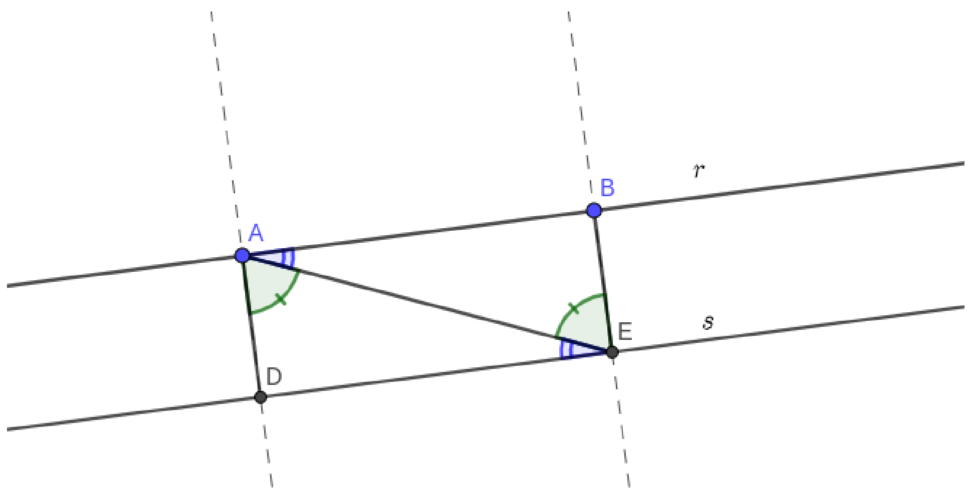
Oss.: è importante sottolineare che se non richiedessimo la validità del postulato delle parallele, la dimostrazione appena scritta non porterebbe ad alcuna situazione "assurda" e quindi non sarebbe utile: insomma, non ci sarebbe alcun valido motivo per il quale dal punto O non potrebbero passare due rette parallele ad s, il ché vuol dire che potrebbe benissimo succedere che le rette siano parallele pur non formando angoli alterni interni congruenti!

3. Prime conseguenze dei criteri di parallelismo

Notevoli sono le conseguenze dei criteri di parallelismo, specie per quanto riguarda i quadrilateri particolari, di cui ci occuperemo del prossimo capito. Per ora dimostriamo un po' di fatti noti.

PROPOSIZIONE 5. *I punti di una retta sono tutti equidistanti da una retta ad essa parallela.*

Dim.: Siano date due rette parallele r ed s. Consideriamo due punti *qualsiasi* A e B di r e dimostriamo che le loro distanze dalla retta s sono congruenti. Dall'arbitrarietà della scelta dei punti, poi segue che tale proprietà è vera per tutti i punti della retta r. Ricordiamo che le distanze di prendono *ortogonalmente,* per cui indichiamo con D ed E i "piedi", sulla retta s, delle perpendicolari passanti rispettivamente per A e B.



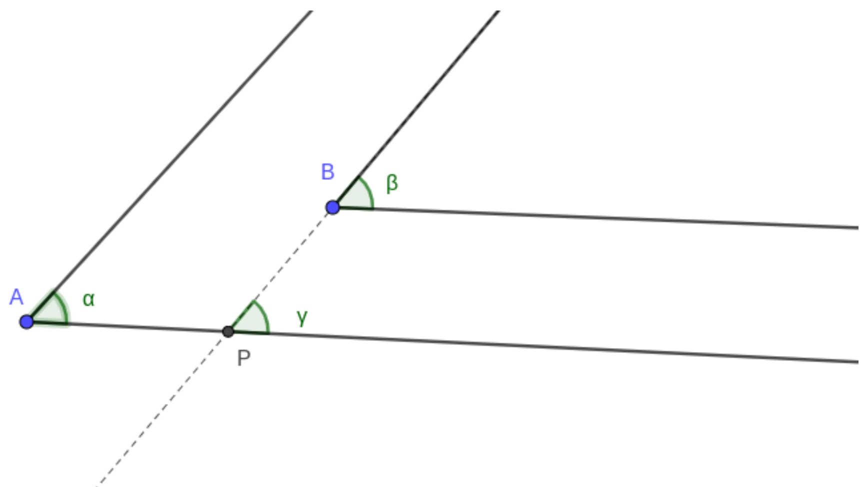
Tracciamo le distanze $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ ed il segmento $\overline{AE}$. I triangoli $\overline{ADE}$ e $\overline{ABE}$ risultano congruenti per il secondo criterio, avendo il lato $\overline{AE}$ in comune e gli angoli $B\hat{A}E \cong D\hat{E}A$ (alterni interni sotto le rette parallele r ed s) e, essendo $AD \perp s$ così come $BE \perp s$ possiamo concludere che anche $AD \parallel BE$ e pertanto sarà pure $D\hat{A}E \cong B\hat{E}A$ (alterni interni sotto le rette parallele AD e BE). La tesi segue dal fatto che $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ sono lati omologhi nella congruenza dei due triangoli.

c.v.d.

Definizione 25. *Chiameremo* concordi *delle semirette che appartengono allo stesso semipiano originato dalla retta che passa dalle origini delle semirette.*

Proposizione 6. *Angoli con lati paralleli e concordi sono congruenti.*

Dim.: Vogliamo dimostrare che gli angoli in figura α e β sono congruenti, avendo i lati paralleli e concordi.

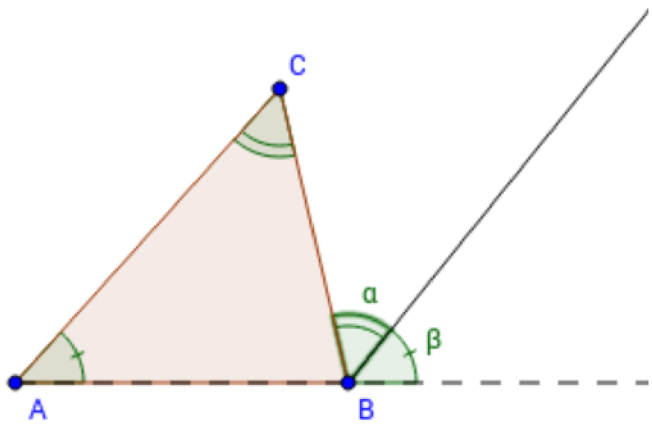


Prolunghiamo un lato dell'angolo β fino ad incontrare il lato dell'angolo α. Chiamiamo γ l'angolo che si forma. Ora, $\beta \cong \gamma$ poiché corrispondono sotto rette parallele, ma anche $\alpha \cong \gamma$ per lo stesso motivo. Per la transitività della congruenza segue la tesi.

c.v.d.

Proposizione 7. *La somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto*

Dim.: Tracciamo da un vertice una parallela al lato opposto e si considerino i due angoli in cui è rimasto ripartito l'angolo esterno: uno è alterno interno e l'altro corrispondente agli altri due angoli interni del triangolo, per cui, dato che sommando a questo angolo esterno l'interno adiacente si ottiene un angolo piatto, così sarà per la somma dei tre angoli interni del triangolo.



Nel caso specifico della figura; α è alterno interno all'angolo (interno al triangolo) $\hat{C}$, mentre β è corrispondente all'angolo (interno) $\hat{A}$, sotto rette parallele; sommando a questi due angoli il terzo angolo interno $\hat{B}$ si ottiene l'angolo piatto, da cui la tesi.

c.v.d.

Osserviamo che la dimostrazione della precedente proposizione è essenzialmente consistita nel dimostrare che *l'angolo esterno è congruente alla somma degli interni non adiacenti del triangolo.*

COROLLARIO 9. *Se due triangoli hanno congruenti due angoli, allora anche il terzo angolo devono averlo congruente.*

Dim.: giusto una osservazione, dato che il terzo angolo è supplementare della somma degli altri due e quindi, dato che queste somme sono uguali, anche i loro supplementari lo sono.

c.v.d.

COROLLARIO 10 (Secondo Criterio di Congruenza generalizzato). *Due triangoli sono congruenti se e solo se hanno un lato e due angoli (qualsiasi) congruenti.*

Dim.: Se hanno due angoli congruenti, anche il terzo angolo ce l'avranno uguale per il corollario di prima, per cui si può sempre applicare il secondo criterio di congruenza che richiede, come verifica delle ipotesi, un lato ed i due angoli adiacenti ad esso.

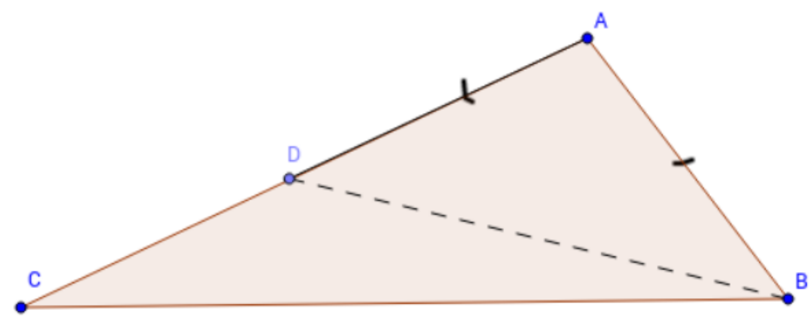
c.v.d.

4. Disuguaglianze tra gli elementi dei triangoli.

Queste che presenteremo ora sono delle relazioni tra gli elementi dei triangoli che fanno parte di una grande famiglia denominata: *disuguaglianze triangolari.* Tra esse, ad una sola -per antonomasia- viene attribuita il nome di "Disuguaglianza triangolare" e questa è presa come principio base, nella Matematica moderna, per introdurre strutture fondamentali su spazi generali, quali, ad esempio, le metriche o le norme.

PROPOSIZIONE 8. *Se un triangolo ha due lati disuguali allora l'angolo maggiore si oppone al lato maggiore.*

Consideriamo il triangolo $\overline{ABC}$ e sia, per esempio, $AC > AB$ (come in figura).



Prendiamo su $\overline{AC}$ il segmento $\overline{AD}$ congruente ad $\overline{AB}$ e poi tracciamo il segmento $\overline{BD}$. L'angolo $A\hat{B}C$ è maggiore dell'angolo $A\hat{B}D$ (dato che questi ne è una sua parte); d'altra parte, per costruzione abbiamo gli angoli $A\hat{B}D$ e $A\hat{D}B$ uguali (angoli alla base di un triangolo isoscele). Pertanto anche $A\hat{B}C > A\hat{D}B$. L'angolo $A\hat{D}B$ è un angolo esterno al triangolo $\overline{BCD}$, per cui si ha anche $A\hat{D}B > A\hat{C}B$. Mettendo insieme tali disuguaglianze si ottiene che $A\hat{B}C > A\hat{C}B$.

c.v.d.

Si può facilmente dimostrare anche la proposizione inversa.

PROPOSIZIONE 9. *Se un triangolo ha due angoli disuguali, allora il lato maggiore si oppone all'angolo maggiore.*

Dim.: Consideriamo il triangolo disegnato nella dimostrazione del teorema precedente. L'angolo in B sia più grande dell'angolo in C.

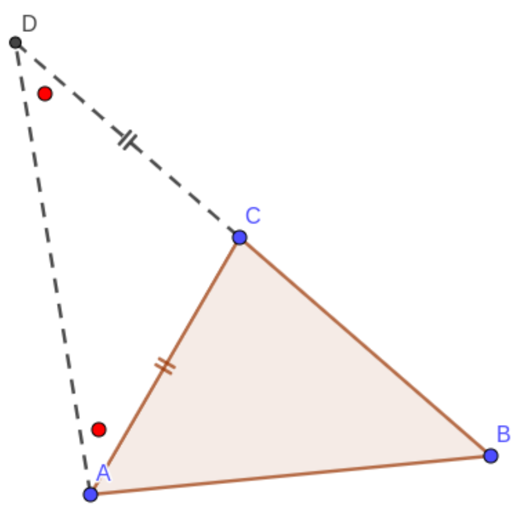
Supponiamo che la tesi sia falsa: ci sono due possibilità, o che i lati $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ sono uguali, oppure che $\overline{AC}$ è minore di $\overline{AB}$.
Nel primo caso si avrebbe che il triangolo $\overline{ABC}$ è isoscele e quindi i due angoli alla base sarebbero uguali, ma ciò è da escludere... Nel secondo caso, per il teorema precedente dovrebbe essere l'angolo in B minore dell'angolo in C e questo è contro l'ipotesi. L'unica possibilità resta dunque $\overline{AC} > \overline{AB}$

c.v.d.

Oss.: E' giusto osservare che in un triangolo rettangolo, l'angolo maggiore è l'angolo retto, per cui *l'ipotenusa è sempre il lato più lungo* di quel triangolo. Evidentemente anche nei triangoli ottusangoli, in cui l'angolo ottuso è sicuramente il maggiore dei tre angoli, il lato opposto ad esso sarà sempre il lato maggiore.

TEOREMA 7 (Disuguaglianza triangolare). *In ogni triangolo, ciascun lato è minore della somma degli altri due.*

Dim.: Consideriamo un triangolo $\overline{ABC}$ come nella figura seguente.



Supponiamo che il lato $\overline{AB}$ sia il maggiore fra i tre. Se dimostriamo che $\overline{AB} < \overline{BC} + \overline{CA}$, essendo $\overline{AB}$ il più grande, a maggior ragione dovranno essere soddisfatte anche le altre disuguaglianze.
Prolunghiamo $\overline{BC}$ dalla parte di C di un segmento $\overline{CD} \cong \overline{AC}$. Il triangolo $\overline{ACD}$ è, per costruzione, isoscele, pertanto gli angoli alla base saranno uguali: $D\hat{A}C \cong A\hat{D}C$. Ora, l'angolo $D\hat{A}C$ è una parte dell'angolo $D\hat{A}B$, pertanto $D\hat{A}C < D\hat{A}B$. Quindi anche $A\hat{D}C < D\hat{A}B$. Visto che all'angolo maggiore si oppone il lato maggiore, nel

triangolo $\overline{ABD}$, si ha $\overline{AB} < \overline{BD}$. Ma $\overline{BD}$ non è altro che $\overline{BC} + \overline{CD}$ e, dato che $\overline{CD} \cong \overline{AC}$, si ricava anche che $\overline{BD} = \overline{AC} + \overline{CB}$. Basta sostituire per ottenere $\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{CB}$, ovvero la tesi.

c.v.d.

A conclusione di questo capitolo, si invita a ragionare su questa affermazione: *"In un triangolo ogni lato è maggiore della differenza degli altri due"* [10]. Inoltre si vuole ricordare che se tre segmenti non rispettano la disuguaglianza triangolare, non possono "chiudersi" per formare un triangolo: quella disuguaglianza è una condizione necessaria a ché si possa formare il triangolo! deve essere rispettata per ogni coppia di somme di lati (e terzo lato rimanente). In verità diventa anche una condizione sufficiente, ma questo non lo dimostriamo ora, dato che abbiamo ancora tanti argomenti da affrontare e non è nostra intenzione scrivere un trattato completo di geometria euclidea.

[10] Nel senso che si invita a dimostrare questa affermazione, partendo dalla "disuguaglianza triangolare" appena dimostrata.

CAPITOLO 4

I quadrilateri

1. La grande famiglia dei parallelogrammi

Dopo aver visto le proprietà principali dei trilateri, passiamo ai successivi poligoni convessi piani, aventi quattro lati. Essi iniziano ad essere interessanti quanto presentano coppie di lati opposti paralleli.

DEFINIZIONE 26. *Quadrilateri con una coppia di lati opposti paralleli si dicono* trapezi. *Se un quadrilatero presenta due coppie di lati paralleli, allora esso si chiama* parallelogramma.

Va da sé, secondo questa definizione, che un parallelogramma è anche un trapezio, ma non tutti i trapezi sono parallelogrammi. Inoltre, almeno per ora, noi concentreremo la nostra attenzione quasi esclusivamente ai parallelogrammi, dato che hanno numerose ed utili proprietà che si utilizzeranno spesso in futuro. I parallelogrammi, inoltre, a seconda di alcune particolarità si classificano secondo quanto scritto nella successiva definizione.

DEFINIZIONE 27. *Un parallelogramma equilatero si chiama* rombo *(o losanga); un parallelogramma equiangolo si chiama* rettangolo. *Il poligono regolare di quattro lati si chiama* quadrato *ed è quindi un rombo equiangolo, ovvero un rettangolo equilatero: in ogni caso deve avere sia lati congruenti che angoli "uguali".*

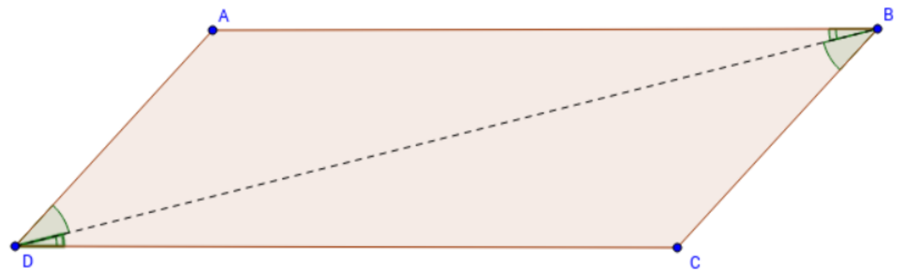
Oss.: il nome "rettangolo" è veramente appropriato, dato che la somma degli angoli interni di un poligono è pari a tanti angoli piatti quanto sono i lati meno due [1] e nei quadrilateri, quindi, i quattro angoli sommano a due angoli piatti. Se si dividono i due angoli piatti, pari ad un angolo giro, in quattro angoli uguali, chiaramente ciascuno di essi deve essere un angolo retto, da cui il nome "rettangolo".

Elenchiamo, in un unico teorema, le proprietà principali dei parallelogrammi, di cui godono anche rombi, rettangoli e quadrati (essendo essi stessi parallelogrammi) ed ai quali, per ciascuna sottofamiglia rilevante, se ne aggiungeranno altre di esclusive.

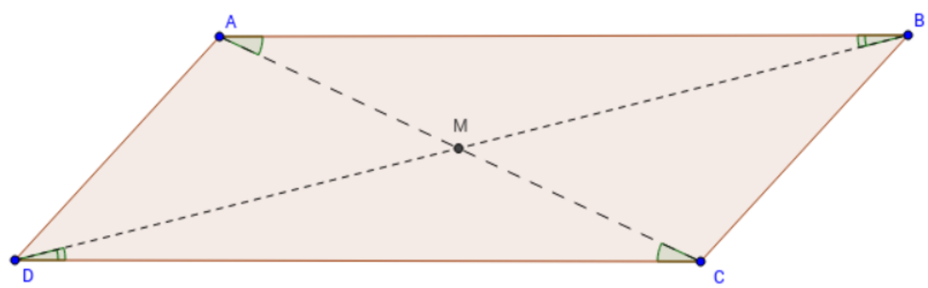
[1] Dare una dimostrazione di questa affermazione.
Hint: si considerino tutte le diagonali che si possono tracciare da un solo vertice...

Proposizione 10. *In un parallelogramma*
a) I lati opposti e gli angoli opposti sono congruenti.
b) Le diagonali di bisecano [2].
c) Gli angoli consecutivi sono supplementari.

Dim.: Consideriamo il parallelogramma $\overline{ABCD}$ come nella figura seguente e tracciamo una diagonale, ad esempio $\overline{BD}$.



I triangoli $\overline{ABD}$ e $\overline{BCD}$ risultano congruenti per il secondo criterio, avendo il lato $\overline{BD}$ in comune, gli angoli $A\hat{B}D$ e $B\hat{D}C$ congruenti poiché alterni interni sotto le rette parallele AB e CD e per un motivo analogo $A\hat{D}B \cong D\hat{B}C$ [3]. Per cui i lati e gli angoli omologhi risultano congruenti, in particolare: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$; ed ancora $\hat{A} \cong \hat{C}$ e gli altri due angoli opposti congruenti come somma di angoli uguali [4]. Questo dimostra il primo punto.
Tracciamo ora anche l'altra diagonale e consideriamo i triangoli $\overline{ABM}$ e $\overline{CDM}$, come nella seguente figura.



Essi hanno i lati $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ congruenti, essendo lati opposti di un pa-

[2]Ovvero si tagliano scambievolmente a metà (o anche "si intersecano nel loro punto medio").

[3]Lo studente dica esplicitamente quale sarebbe questo motivo!

[4]Per quanto attiene all'uguaglianza degli angoli opposti, si poteva osservare anche che i lati del parallelogramma sono, appunto, paralleli e concordi, per cui gli angoli che si formano sono a due a due congruenti.

rallelogramma [5] ; gli angoli in $B\hat{A}M$ e in $M\hat{C}D$ congruenti, essendo alterni interni sotto rette parallele [6] ed analogamente $M\hat{B}A \cong M\hat{D}C$. Ergo, per il secondo criterio di congruenza, $\overline{ABM} \cong \overline{CDM}$ da cui segue la bisezione delle diagonali, essendo $\overline{DM} \cong \overline{MB}$ e $\overline{AM} \cong \overline{MC}$ [7] . Questo dimostra il punto due. Il terzo punto è dimostrato giusto con l'osservazione che l'angolo esterno ad uno consecutivo ad ogni altro angolo α, è congruente proprio ad α, essendo corrispondente sotto rette parallele. Ma un angolo esterno aggiunto all'interno adiacente dà come somma l'angolo piatto, per questo è immediata la tesi.

c.v.d.

E' utile, come esercizio, dimostrare le proposizione inverse a quelle date nel teorema precedente: diamo gli enunciati e lasciamo al lettore il compito di scrivere dettagliatamente la dimostrazione. *Attenzione!* alcune di queste proposizione sono importanti anche per risolvere gli esercizi dedicati a questo capitolo.

PROPOSIZIONE 11. *Sia dato un quadrilatero, allora:*

i) Se ha i lati opposti congruenti a due a due, allora deve essere un parallelogramma.
ii) Se ha una coppia di lati paralleli e congruenti, allora deve essere un parallelogramma [8] .
iii) Se ha le diagonali bisecate è un parallelogramma [9] .
iv) Se gli angoli opposti sono congruenti, allora è un parallelogramma.
v) Se tre angoli consecutivi formano due coppie di angoli supplementari, allora è un parallelogramma.

Dim.: come detto, la dimostrazione è lasciata come utile e divertente esercizio.

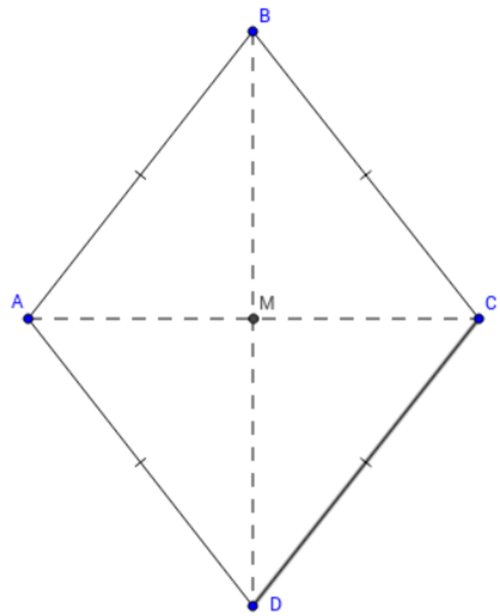
◇

Come ulteriore proprietà dei rombi, oltre a quelle elencate per i parallelogrammi in generale, aggiungiamo questa proposizione.

PROPOSIZIONE 12. *Le diagonali del rombo bisecano gli angoli e sono perpendicolari tra loro.*

Dim.: Consideriamo un rombo, ovvero un parallelogramma equilatero e tracciamo le due diagonali, come nella figura seguente.

[5] Come testé dimostrato!
[6] I lati opposti del parallelogramma $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.
[7] Sono lati omologhi nella congruenza dei triangoli indicati.
[8] Ovvero ha anche l'altra coppia di lati paralleli!
[9] Questa è dunque una **proprietà caratteristica** dei parallelogrammi!



I triangoli che si formano sono tutti congruenti per il primo criterio di congruenza... ad esempio $\overline{ABM} \cong \overline{BMC}$ poiché hanno $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, in quanto lati di un rombo, $M\hat{A}B \cong M\hat{C}B$, essendo angoli alla base del triangolo isoscele $\overline{ABC}$, e $\overline{AM} \cong \overline{MC}$, dato che il rombo è un parallelogramma e quindi le sue diagonali si bisecano. Per cui possiamo dedurre che $A\hat{B}M \cong M\hat{B}C$ e che $\overline{AC} \perp \overline{BM}$ [10]. Si poteva arrivare alla stessa conclusione utilizzando le proprietà dei triangoli isosceli: il triangolo $\overline{ABC}$ è isoscele ed M è il punto medio della base, per cui $\overline{BM}$ è la mediana relativa alla base. Ma essa è anche altezza e bisettrice dell'angolo al vertice [11] del triangolo, da cui la nostra affermazione! analogamente si procede per gli altri vertici.

c.v.d.

Anche per il rombo valgono le affermazioni inverse che si lasciano da dimostrare come utile esercizio.

PROPOSIZIONE 13. *Sia dato un quadrilatero:*

(1) *Se ha le diagonali bisecate e perpendicolari, allora è un rombo.*
(2) *Se le diagonali sono le bisettrici degli angoli ai vertici, allora è un rombo.*

[10] Giustificare quest'ultima affermazione.

[11] Questa proposizione si trova negli esercizi lasciati per il capitolo precedente, se non si è già svolto, si dimostri il teorema ora come esercizio!

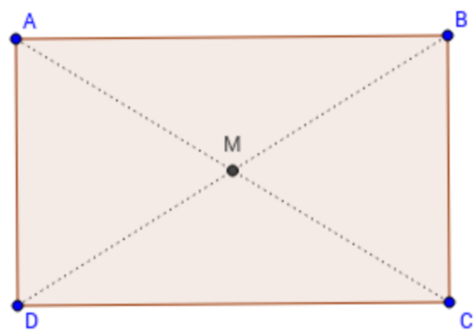
Dim.: come detto, la dimostrazione è lasciata come utile e divertente esercizio.

◇

Passiamo ora alle proprietà caratteristiche dei rettangoli.

PROPOSIZIONE 14. *Le diagonali di un rettangolo sono congruenti e viceversa, se un quadrilatero ha le diagonali congruenti e bisecate, allora esso è un rettangolo.*

Dim.: Consideriamo il rettangolo $\overline{ABCD}$ come in figura e tracciamone le diagonali.



I triangoli $\overline{ACD}$ e $\overline{BCD}$ sono uguali per il primo criterio di congruenza: infatti hanno $\hat{D} \cong \hat{C}$ essendo angoli retti; $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ essendo lati opposti di un parallelogramma e $\overline{DC}$ lato in comune. Ergo, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ essendo lati omologhi nella congruenza.

Viceversa supponiamo che $\overline{DM} \cong \overline{MB}$, che $\overline{AM} \cong \overline{MC}$ e che $\overline{AC} \cong \overline{BD}$. Allora dovranno essere tutt'e quattro i pezzi delle semidiagonali congruenti. Questo implica che i triangoli in figura sono tutti triangoli isosceli congruenti a coppie [12]. Questo significa che, essendo angoli alla base di triangoli isoscele congruenti tra loro, si formano ben quattro angoli congruenti più altri quattro congruenti tra loro; in particolare si ha:

$$\hat{A} = D\hat{A}M + M\hat{A}B \cong M\hat{B}C + M\hat{B}A = \hat{B}$$

ed analogamente si dimostra che $\hat{A}$ è anche congruente a $\hat{D}$ e $\hat{B} \cong \hat{C}$.

c.v.d.

Il *quadrato*, in quanto facente parte della famiglia dei rombi e dei rettangoli, ha tutte le proprietà fin qui elencate per i parallelogrammi ed i parallelogrammi particolari: è bene comunque sottolineare che

[12] Lo studente, come utile esercizio, espliciti perché si può applicare tale criterio.

la proprietà caratteristica è di avere *diagonali bisecate, congruenti e perpendicolari.*

2. Il Teorema di Talete (in piccolo)

DEFINIZIONE 28. *Si dice* fascio di rette parallele *l'insieme di tutte le rette parallele ad una data.*

Osserviamo che una trasversale a due rette del fascio, intersecherà anche tutte le altre rette: diremo che essa è una *trasversale* del fascio di rette parallele. Se abbiamo due trasversali che "attraversano" il fascio di rette parallele, i punti d'intersezione tra una retta del fascio e le due trasversali si chiamano *punti corrispondenti.* Un segmento di una trasversale si dirà *segmento corrispondente* ad un segmento dell'altra trasversale, se i punti estremi dei due segmenti sono punti corrispondenti. Un importantissimo risultato della geometria euclidea, che riguarda i fasci di rette parallele, è il **teorema di Talete.** In verità questa è una versione "ridotta' del Teorema di Talete, che verrà enunciato in forma generale dopo che si tratterà la teoria delle proporzioni [13] .

TEOREMA 8 (Teorema di Talete). *Se un fascio di rette parallele è tagliato da due trasversali, a segmenti congruenti di una trasversale corrispondono segmenti congruenti sull'altra.*

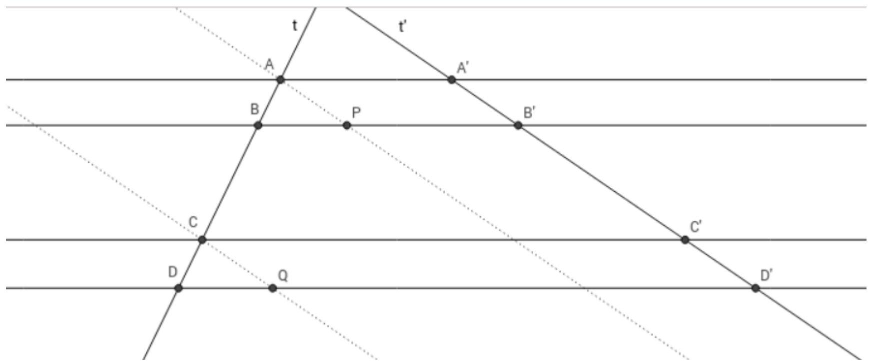
In verità noi preferiamo presentarlo nella forma equivalente e più semplice (anche da ricordare):

> ***Se una trasversale forma segmenti congruenti tra le rette del fascio, allora cambiandole l'inclinazione, tali segmenti rimarranno congruenti tra loro [14].***

Dim.: Consideriamo un fascio di rette parallele ed una trasversale t. Successivamente "incliniamo" t nella nuova posizione t'.

[13]Per questo lo denominiamo "piccolo teorema".

[14]Ovvero la congruenza è un **invariante** sotto fasci di rette parallele!



Supponiamo inoltre che $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. La tesi è che anche $\overline{A'B'} \cong \overline{C'D'}$. Prendiamo delle rette passanti per A e C parallele alla trasversale passante per A' e D' e siano P e Q i punti d'intersezione di queste con le rette del fascio passanti per B e D, rispettivamente (come in figura). I triangoli $\overline{ABP}$ e $\overline{CDQ}$ sono congruenti per il secondo criterio: hanno $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ per ipotesi, l'angolo in D è uguale all'angolo in B perché corrispondenti (sotto rette parallele) e, per lo stesso motivo, anche gli angoli in A e C sono congruenti. Quindi sarà $\overline{AP} \cong \overline{CQ}$. Visto che i quadrilateri $\overline{AA'B'P}$ e $\overline{CC'D'Q}$ sono parallelogrammi, saranno anche uguali $\overline{AP}$ con $\overline{A'B'}$ e $\overline{CQ} \cong \overline{C'D'}$. Sostituendo nell'uguaglianza di prima si ottiene proprio la tesi.

c.v.d.

2.1. Prime conseguenze del Teorema di Talete. Tante sono le conseguenze del Teorema di Talete ed i suoi utilizzi. Iniziamo con un banale corollario.

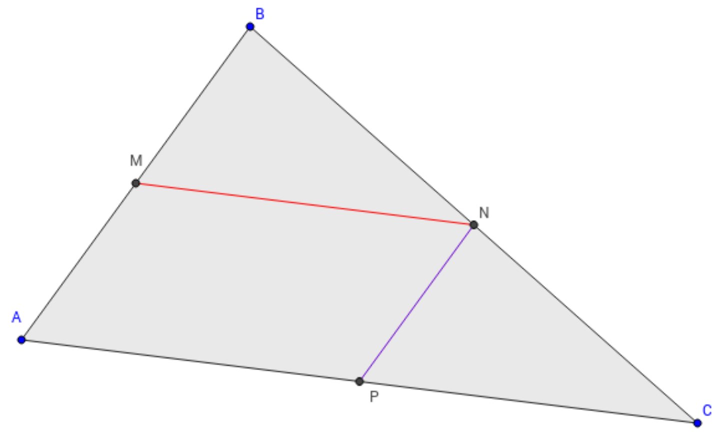
Corollario 11. *Se dal punto medio del lato di un triangolo si conduce la parallela ad uno dei lati, il punto intersezione di questa con il terzo lato è punto medio di tale lato.*

Dim.: la dimostrazione è immediata e non ha bisogno di commenti.

◇

Corollario 12. *In ogni triangolo, il segmento che unisce i punti medi di due lati è parallelo al terzo lato e congruente alla sua metà.*

Dim.: Siano M ed N i punti medi dei lati $\overline{AB}$ ed $\overline{BC}$ del triangolo $\overline{ABC}$ in figura.



La parallela ad $\overline{AC}$ passante per M passerà anche per N, questo per il corollario precedente. Teniamo a mente che $\overline{MN}$ è parallelo ad $\overline{AC}$. Sia P il punto d'intersezione della parallela al lato $\overline{AB}$ e passante per N con il lato $\overline{AC}$. Il quadrilatero $\overline{AMNP}$ è un parallelogramma per costruzione e quindi $\overline{MN} \cong \overline{AP}$ e $\overline{MA} \cong \overline{NP}$. D'altra parte, P è il punto medio del segmento $\overline{AC}$, sempre per il corollario di prima. Quindi $\overline{MN}$ è congruente alla metà di $\overline{AC}\ldots$

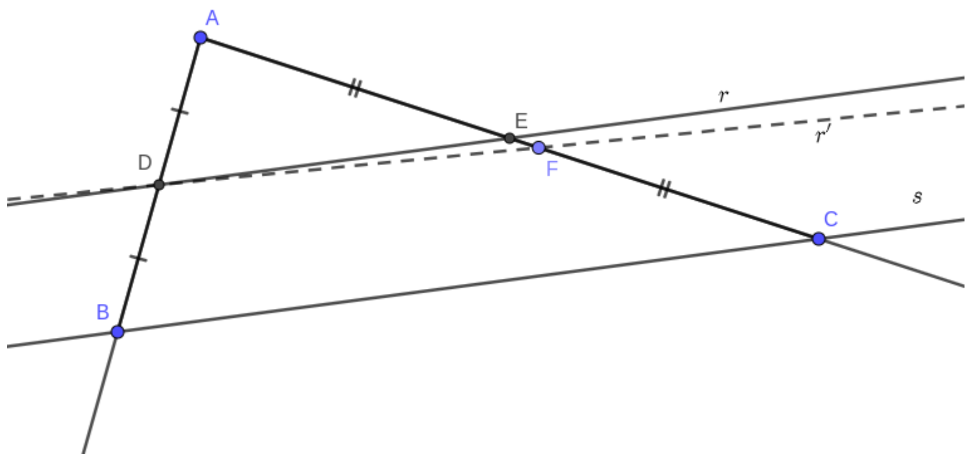
c.v.d.

Finiamo questa sezione con un teorema che a noi piace usare molto, ma che non sembra molto conosciuto e diffuso per quanto meriterebbe: in un certo senso è un "inverso parziale" del Teorema di Talete.

TEOREMA 9. *Se due semirette hanno origine comune e due rette le tagliano in modo tale da formare segmenti congruenti su entrambe, allora queste rette devono essere parallele.*

Dim.: Consideriamo due semirette di origine A e due rette r ed s che le intersecano nei punti indicati in figura.
Hp: $\overline{AD} \cong \overline{DB}$ e $\overline{AE} \cong \overline{EC}$.

Th: $r \parallel s$.

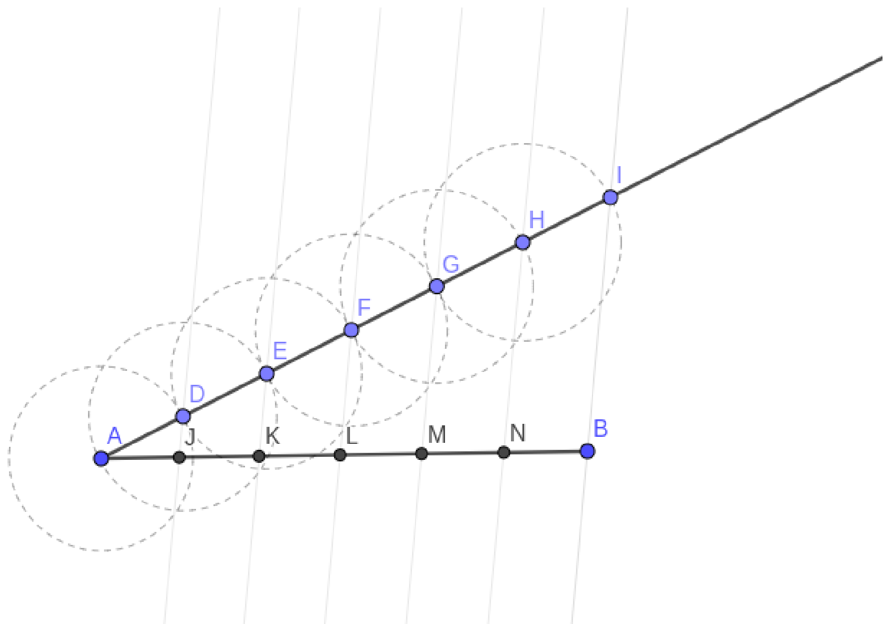


Se per assurdo non fossero parallele, allora potremmo trovare un'altra retta r', ruotando r opportunamente attorno al punto D tale per cui $r' \parallel s$. Ma per il Teorema di Talete, dato che $\overline{AD} \cong \overline{DB}$, detto F il punto di intersezione di r' sulla retta AC, deve anche essere $\overline{AF} \cong \overline{FC}$. Questo però è impossibile se E non dovesse coincidere con F, dato che già E divide a metà il segmento $\overline{AC}$ per ipotesi. Ergo r' non può esistere, a meno che non coincida con r stessa, per cui r deve essere parallela ad s come affermato nella tesi.

c.v.d.

Un esempio di utilizzo "pratico" del Teorema di Talete: dividere, in un numero qualsiasi di parti uguali, un segmento. Basta considerare una semiretta avente origine in un estremo del segmento e, su di essa, riportare uno stesso segmento, consecutivamente, per quanto è il numero delle parti desiderato da dividere. Si traccia la retta passante dall'altro estremo del segmento e dall'ultimo estremo dei segmenti riportati sulla semiretta. Tirando parallele a tale retta, passanti ciascuna per gli estremi dei segmenti riportati, si riesce a dividere il segmento per come desiderato. Nella figura seguente abbiamo diviso il segmento $\overline{AB}$ in sei parti uguali, utilizzando "riga e compasso" senza sapere quanto "misura" il segmento stesso [15] .

[15] anche perché ancora non sappiamo cosa significhi "misurare" un segmento!



3. Luoghi geometrici e punti notevoli del triangolo

Una delle definizioni "operative" più importanti, che verrà ampiamente utilizzata in *geometria analitica* a partire dal secondo/terzo anno di un corso di studi superiori è quella seguente.

Definizione 29. *Una figura è detta* luogo geometrico *se tutti e soli i suoi punti godono di una stessa proprietà.*

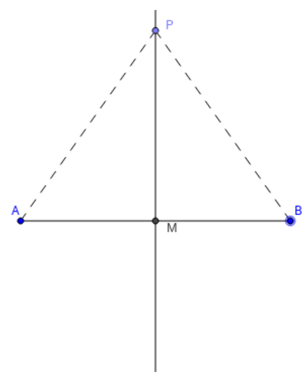
Quindi le richieste sono due: da un lato tutti i punti di un dato luogo devono avere una proprietà comune, dall'altro solo quei punti avranno la data proprietà! Esempio lampante di luogo geometrico è la *circoferenza,* definita come il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto prefissato del piano (detto centro). Evidentemente tutti i punti di una data circonferenza hanno la stessa distanza, detta *raggio* dal proprio centro e solo quei punti hanno quella distanza, tutti gli altri avranno "altra distanza" da quel centro.

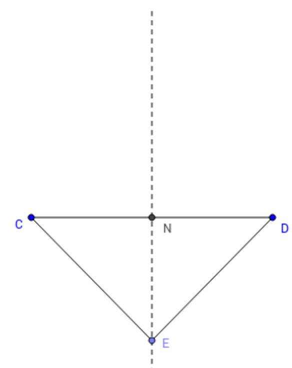
Scopriremo ora che due "oggetti geometrici" già visti e definiti precedentemente sono anche essi "luoghi geometrici".

Ricordiamo che l'asse di un segmento è la retta perpendicolare che passa dal punto medio del segmento. Ebbene, l'asse è un luogo geometrico!

Proposizione 15. *L'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi del segmento stesso.*

Dim.: Osserviamo la prima delle seguenti figure. Sia P un punto qualsiasi dell'asse del segmento AB. Se M indica il punto medio di AB (attraverso cui passa l'asse), si ha che i triangoli $\overline{AMP}$ e $\overline{MBP}$ sono congruenti perché hanno $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ per ipotesi, $\overline{PM}$ in comune e gli angoli $A\hat{M}P$ e $B\hat{M}P$ entrambi retti. Pertanto anche $\overline{AP} \cong \overline{PB}$. Abbiamo, quindi, dimostrato che un punto qualunque dell'asse equidista dagli estremi del segmento.





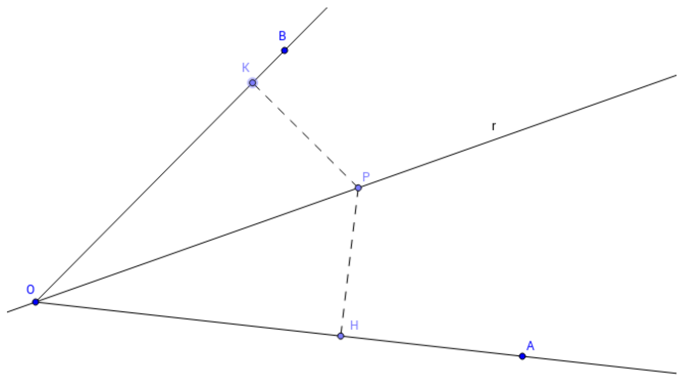
Ora osserviamo la seconda figura (di cui sopra).
Proviamo che ogni punto che equidista dagli estremi di $\overline{CD}$, sta sull'asse. Per fare ciò, sia E un punto tale che $\overline{CE} \cong \overline{DE}$. Sia $\overline{EN}$ la mediana relativa alla base del triangolo $\overline{CDE}$. Tale triangolo, per ipotesi, è isoscele e quindi sappiamo che la mediana $\overline{EN}$ è anche altezza relativa alla base $\overline{CD}$ (pertanto $\overline{EN}$ è perpendicolare a $\overline{CD}$). Ma la retta ortogonale passante per il punto medio di un segmento è, per definizione, proprio l'asse di tale segmento, quindi abbiamo finito.

c.v.d.

Anche la bisettrice è un luogo geometrico...

PROPOSIZIONE 16. *La bisettrice di un angolo è il luogo geometrico dei punti equidistanti dai due lati dell'angolo.*

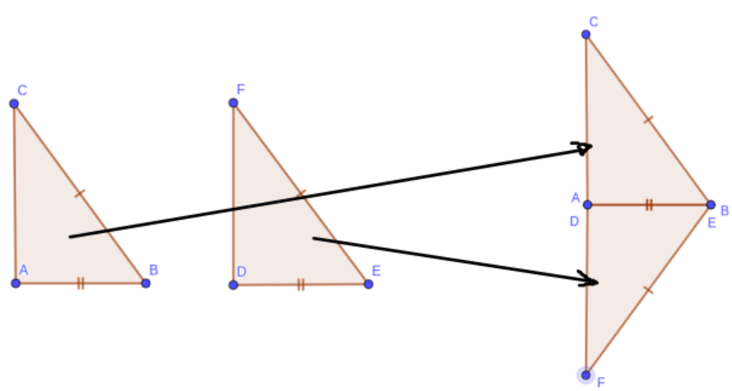
Dim.: Sia r la bisettrice dell'angolo $A\hat{O}B$.



Sia P un punto qualsiasi sulla bisettrice e $\overline{PH}$ la distanza dal lato OA, mentre $\overline{PK}$ la distanza dal lato OB. Ora, i triangoli $\overline{OPK}$ e $\overline{OPH}$ sono congruenti ($\overline{OP}$ in comune, $P\hat{O}H \cong P\hat{O}K$, essendo r la bisettrice e gli altri angoli uguali dato che sono triangoli rettangoli). Pertanto anche $\overline{KP} \cong \overline{HP}$.
Occorre dimostrare la proposizione inversa, ovvero che se P è un punto equidistante da OA e OB, allora questo punto sta sulla bisettrice dell'angolo $A\hat{O}B$. Prima di poter dimostrare una cosa del genere occorre dimostrare il seguente "lemma".

Lemma 2. *Se due triangoli rettangoli hanno congruenti l'ipotenusa ed un cateto, allora sono congruenti.*

Dim.: Consideriamo due triangoli rettangoli come in figura. Tramite un movimento rigido "incolliamo" il triangolo $\overline{DEF}$ sotto il triangolo $\overline{ABC}$ facendo combaciare i lati congruenti $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$.



Il triangolo $\overline{FBC}$ è isoscele e quindi $\overline{AB}$ è altezza e mediana, per cui

$\overline{AC} \cong \overline{AF}$. Dal terzo criterio risulta quindi che $\overline{ABC} \cong \overline{DEF}$.

c.v.d.

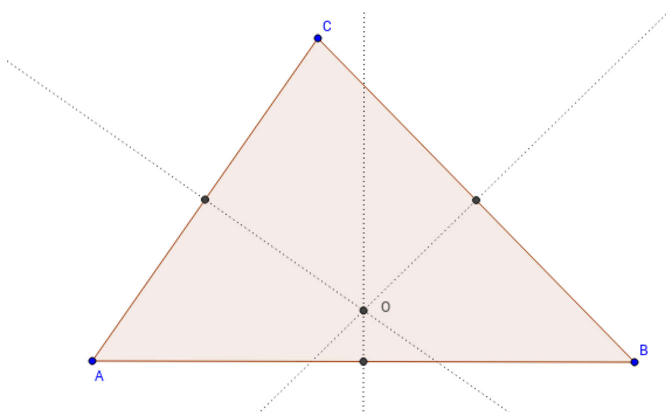
Riprendiamo la dimostrazione della proposizione. Facendo riferimento sempre alla figura precedente data prima della dimostrazione del lemma, sia per ipotesi, $\overline{PH} \cong \overline{PK}$. Ancora una volta avremmo che i due triangoli rettangoli ($\overline{OPH}$ e $\overline{OPK}$) sono congruenti: ipotenusa $\overline{OP}$ in comune e cateti $\overline{PH} \cong \overline{PK}$ per ipotesi. Ergo gli angoli omologhi $P\hat{O}K$ e $P\hat{O}H$ sono congruenti e questo significa che OP è la bisettrice dell'angolo $A\hat{O}B$.

c.v.d.

3.1. Punti notevoli di un triangolo. Le proprietà di luogo geometrico degli assi e delle bisettrici, unitamente a qualche altra considerazione sui parallelogrammi, ci permettono ora di definire i punti notevoli di un triangolo.

Proposizione 17. *Gli assi dei tre lati di un triangolo passano per uno stesso punto, detto* circocentro *del triangolo. Tale punto è anche il centro della circonferenza che passa per i tre vertici del triangolo (ovvero, come si dice, della circonferenza circoscritta al triangolo).*

Dim.:



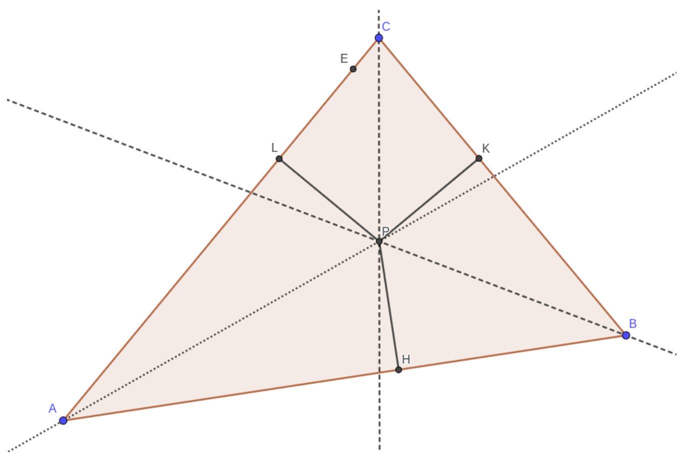
Dapprima proviamo che gli assi s'incontrano in un punto comune. Sicuramente due assi s'incontrano (dato che non sono paralleli) in un certo punto O, supponiamo che tali assi siano quelli dei lati $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Dobbiamo mostrare che anche il terzo asse passa per O. Intanto O è equidistante da A, B e C, dato che sta sugli assi dei segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$; quindi $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ e $\overline{OB} \cong \overline{OC}$ da cui ricaviamo che $\overline{OA} \cong \overline{OC}$. Quindi O è anche equidistante da A e da C : cioè O appartiene anche all'asse del segmento $\overline{AC}$ e quindi a tutt'e tre gli assi. Visto che

$\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}$, possiamo prendere tali distanze come raggio di una circonferenza di centro O : in tal caso la circonferenza passerà proprio per i vertici del triangolo.

c.v.d.

Proposizione 18. *Le bisettrici degli angoli di un triangolo concorrono in uno stesso punto, detto* incentro . *Tale punto è anche il centro di una circonferenza che tocca i tre lati del triangolo ciascuno in un unico punto* [16] *(ovvero, come si dice, è il centro della circonferenza inscritta al triangolo).*

Dim.:



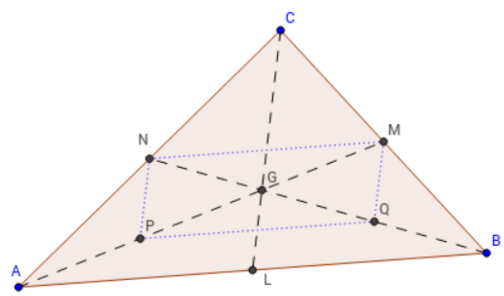
Prima di tutto proviamo che le bisettrici passano per uno stesso punto. Sia P il punto di intersezione di due delle bisettrici. Proviamo che anche la terza bisettrice passa per P. Supponiamo di considerare le bisettrici degli angoli in A ed in B. Siano $\overline{PH}$, $\overline{PK}$ e $\overline{PL}$ le distanze di P dai lati del triangolo. Dato che P è equidistante dai lati degli angoli in A e B, si ha $\overline{PH} \cong \overline{PL}$ e $\overline{PH} \cong \overline{PK}$, da cui ricaviamo che $\overline{PL} \cong \overline{PK}$: quindi P è anche equidistante dai lati dell'angolo $\hat{C}$, ovvero sta sulla bisettrice di tale angolo. Quindi tutt'e tre le bisettrici passano per P. Visto che $\overline{PH} \cong \overline{PL} \cong \overline{PK}$, possiamo prendere tali distanze come raggio di una circonferenza di centro P : tale circonferenza sarà tangente ai tre lati del triangolo, dato che non potrà avere altri punti d'intersezione con il triangolo tranne che in H, K ed L.

c.v.d.

[16] Si dice che i lati sono tangenti alla circonferenza.

PROPOSIZIONE 19. *Le tre mediane di un triangolo passano per uno stesso punto, detto* baricentro. *Tale punto ripartisce la mediana in due parti, di cui quella che contiene il vertice è doppia dell'altra.*

Dim.: Sia $\overline{ABC}$ il triangolo e G il punto in comune delle mediane $\overline{AM}$ e $\overline{BN}$.



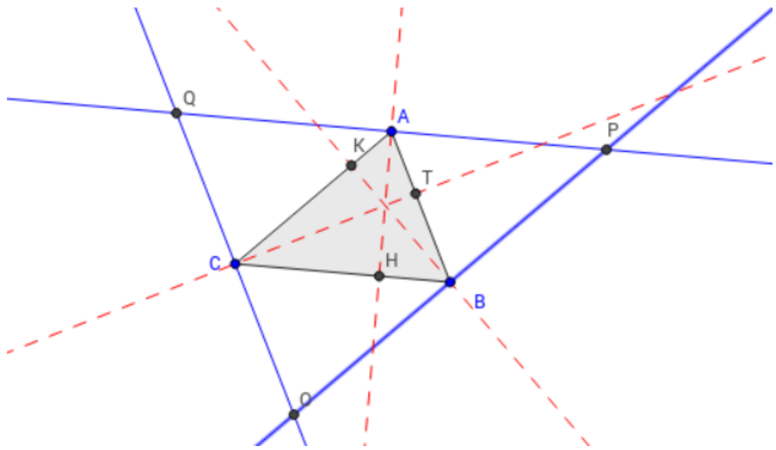
Prima di tutto dimostriamo che $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM}$ e $\overline{BG} = 2 \cdot \overline{GN}$. Ricordiamoci che $\overline{MN}$ è parallelo ad $\overline{AB}$ e misura la metà di esso. Prendiamo anche i punti medi di $\overline{AG}$ e $\overline{BG}$ e chiamiamoli rispettivamente P e Q. Se consideriamo il triangolo $\overline{AGB}$, anche il segmento $\overline{PQ}$ è parallelo ad $\overline{AB}$ e misura la metà di esso. Quindi il quadrilatero $\overline{PQMN}$ è un parallelogramma in quanto ha due lati paralleli (entrambi paralleli ad $\overline{AB}$, per essere precisi) e congruenti. Dato che le diagonali di un parallelogramma si dividono scambievolmente a metà, risulta anche che $\overline{AP} \cong \overline{PG} \cong \overline{GM}$ e $\overline{BQ} \cong \overline{QG} \cong \overline{GN}$, ovvero che $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM}$ e che $\overline{BG} = 2 \cdot \overline{GN}$. Questo discorso appena fatto si può applicare anche se considerassimo una delle mediane già considerate e l'altra che abbiamo trascurato finora. Accadrebbe dunque che, se $\overline{CL}$ è l'altra mediana (e consideriamo che $\overline{AM}$ e $\overline{BN}$ dividono $\overline{CL}$ allo stesso modo), $\overline{BN}$ e $\overline{CL}$ passerebbero per lo stesso punto di $\overline{AM}$ [17]; cioè che la mediana $\overline{CL}$ passa ancora per G (e risulterebbe pure che $\overline{CG} = 2 \cdot \overline{GL}$).

c.v.d.

PROPOSIZIONE 20. *Le tre altezze di un triangolo passano tutte per uno stesso punto, detto* ortocentro.

[17] Nei fatti, il punto che ripartisce un segmento in una parte doppia dell'altra è unico, per questo il punto G deve essere sempre lo stesso sia che si considerino le mediane $\overline{AM}$ e $\overline{BN}$, sia che si considerino le mediane $\overline{AM}$ e $\overline{CL}$ o, ancora, $\overline{BN}$ e $\overline{CL}$.

Dim.: Sia $\overline{ABC}$ il triangolo che ci interessa e $\overline{OPQ}$ il triangolo che si ottiene tracciando la parallela al lato opposto, passante per i vertici di $\overline{ABC}$.



Osserviamo che $\overline{APBC}$ e $\overline{ACQB}$ sono parallelogrammi (per come sono stati costruiti) e quindi $\overline{AP} \cong \overline{BC}$ e $\overline{AQ} \cong \overline{BC}$. Arguiamo da ciò che $\overline{AP} \cong \overline{AQ}$, ovvero che A è il punto medio del segmento $\overline{PQ}$. Pertanto, l'altezza $\overline{AH}$, relativa alla base $\overline{BC}$, risulterà anche essere un segmento sull'asse del segmento $\overline{PQ}$. In modo del tutto analogo, si dimostra che le rette BK e CT sono gli assi dei segmenti $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$ (rispettivamente). Visto che abbiamo già dimostrato che gli assi di un triangolo si incontrano in un solo punto, abbiamo finito.

c.v.d.

Il circocentro, l'incentro, il baricentro e l'ortocentro sono detti *punti notevoli* del triangolo. In generale essi sono tre punti distinti; nel triangolo isoscele risulta che essi sono tutti allineati [18] e nel triangolo equilatero coincidono tutti in un sol punto [19]. Sussiste un notevole teorema dovuto ad Eulero, il quale dimostra che il circocentro, l'ortocentro ed il baricentro sono sempre tre punti allineati, qualsiasi triangolo si vada a considerare. La retta su cui stanno questi tre punti notevoli prende anche il nome di *Retta di Eulero.* Ci sono altre interessanti proprietà di tali punti, ma non riteniamo opportuno doverci soffermare più oltre.

[18] Lo studente chiarisca il perché!

[19] Anche in questo caso, sia lo studente a darsene una ragione.

CAPITOLO 5

Equivalenza di figure piane e Teoremi di Euclide e Pitagora

1. Equivalenza di figure piane

Introduciamo come concetto primitivo l'idea che ognuno di noi ha di *superficie* e di *estensione superficiale* (od *area della superficie*). Ricordiamo che gli enti dati come concetti primitivi non possono essere definiti: tutt'al più possiamo fare degli esempi per figurarci di cosa parliamo oppure stabilire delle proprietà tramite postulati e relazioni con altri "oggetti del discorso geometrico". È naturale pensare che se dovessimo dipingere una data superficie piana (supponendo una verniciatura "perfetta", cioè con una stesura uniforme di colore) ognuno di noi ammetterebbe che per colorare una data figura useremo più vernice di quanto ne servirebbe per colorare una sotto-figura della figura stessa. Questo perché intuitivamente sappiamo che tutta la figura ha una estensione maggiore di una parte della figura stessa!

DEFINIZIONE 30. *Due superfici si dicono* equivalenti *se hanno eguale estensione. Scriveremo, con ovvio significato del simbolismo,* $A \equiv B$. *Diremo che una superficie è* prevalente *ad un'altra, se quest'ultima ha estensione minore della prima, in tal caso si dice anche che l'ultima è* suvvalente *alla prima.*

POSTULATO 22. *Due superfici congruenti sono equivalenti.*

Oss.: non è sempre vero l'inverso: ci possono essere superfici equivalenti ma non congruenti!

POSTULATO 23. *L'equivalenza è una* relazione di equivalenza*.*

A dirla tutta, è quella per eccellenza, dato che il nome è già tutto un programma!

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due superfici non aventi punti (interni) in comune, si chiama *somma* di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ la figura formata da tutti i punti di $\mathcal{A}$ e di $\mathcal{B}$.

POSTULATO 24. *Somme di superfici equivalenti sono equivalenti.*

Se $\mathcal{C}$ è la figura somma di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, diremo anche che $\mathcal{A}$ è la *differenza* di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$ (e $\mathcal{B}$ è la differenza di $\mathcal{C}$ ed $\mathcal{A}$).

POSTULATO 25. *Differenze di superfici equivalenti sono equivalenti.*

POSTULATO 26. *Una superficie è prevalente ad ogni sua parte.*

DEFINIZIONE 31. *Diremo che due figure sono* equiscomponibili *se sono formate da somme di figure congruenti l'una con l'altra.*

Evidentemente le figure equiscomponibili sono equivalenti, ma l'equiscomponibilità non coincide, come relazione, né con la congruenza, né con l'equivalenza. Si può dimostrare che anche la relazione di equiscomponibilità è una relazione di equivalenza: invitiamo il lettore attento a dimostrare questo fatto ed a trovare esempi di figure equiscompobili ma non congruenti o ancora equivalenti ma non equiscomponibili. Sarà comunque facile dimostrare che due figure sono equivalenti se le equiscomponiamo, nei fatti è quello che faremo in seguito.

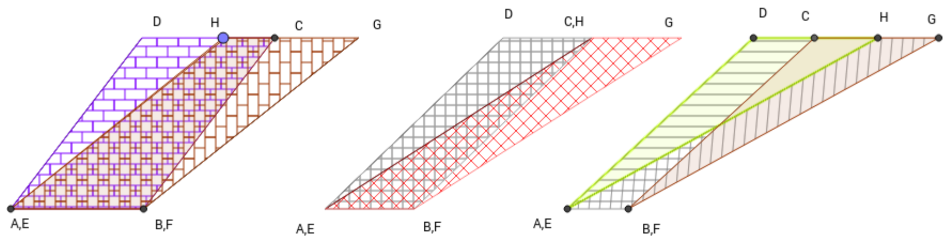
PROPOSIZIONE 21. *Parallelogrammi con un lato ed altezza relativa (ad esso) congruenti, sono equivalenti.*

Dim.: Siano dati due parallelogrammi $\overline{ABCD}$ e $\overline{EFGH}$. Disegniamoli in modo che i lati congruenti siano sovrapposti: sia, per esempio, $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.

Notiamo inizialmente che i lati $\overline{CD}$ e $\overline{GH}$ appartengono ad una stessa retta, dato che abbiamo supposto le altezze eguali. Possono presentarsi quattro casi: o tali segmenti si sovrappongono alla perfezione, o si sovrappongono lungo un segmento comune; potrebbe darsi che hanno un solo estremo in comune, oppure non hanno neppure un punto in comune.

Nel primo caso non ci sarebbe nulla da dimostrare, dato che i parallelogrammi risulterebbero perfino congruenti! [1]. Gli altri tre casi sono rappresentati nella figura seguente.

[1] Lo studente dica perché dovrebbero essere congruenti.



In ogni caso si avrebbe che i triangoli $\overline{AHD}$ e $\overline{BGC}$ sono congruenti per il primo criterio: $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ perché lati opposti in un parallelogramma e, per lo stesso motivo, $\overline{AH} \cong \overline{BG}$; gli angoli $D\hat{A}H$ e $C\hat{B}G$ congruenti perché aventi i lati paralleli e concordi. Nel primo caso, quindi, avremmo equiscomposto i parallelogrammi in un triangolo più un trapezio; nel secondo caso in un triangolo più un altro triangolo. Nel terzo caso ancora in un triangolo più un tapezio [2] .

c.v.d.

Corollario 13. *Un parallelogramma è equivalente ad un rettangolo avente congruenti la base e l'altezza.*

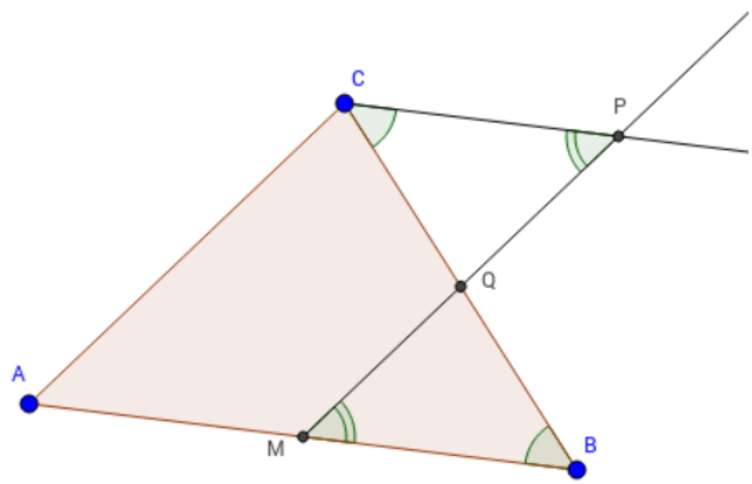
Dim.: è giusto un'osservazione, dato che i rettangoli sono essi stessi parallelogrammi.

◇

Proposizione 22. *Un triangolo equivale al parallelogramma che ha uguale altezza e base congruente alla metà di quella del triangolo, oppure al parallelogramma con base congruente ed altezza uguale alla metà di quella del triangolo.*

Dim.: Sia $\overline{ABC}$ un triangolo ed M sia il punto medio della "base" $\overline{AB}$.

[2] Il lettore dovrà solo sforzarsi di capire come mai i due trapezi dell'ultima figura risultano equivalenti... suggeriamo di osservare che ai triangoli congruenti $\overline{AHD}$ e $\overline{FGC}$ si è sottratto il triangolo di cui un lato è $\overline{CH}$.



Sia P il punto in cui la parallela ad $\overline{AC}$, condotta per M, interseca la parallela ad $\overline{AB}$ passante per C. Detto Q il punto di intersezione di $\overline{MP}$, con $\overline{BC}$, si ha che i triangoli $\overline{MBQ}$ e $\overline{QPC}$ sono congruenti per il secondo criterio (si notino gli angoli alterni interni con vertice in Q, nella figura e il fatto che $\overline{AM} \cong \overline{MB} \cong \overline{CP}$, dato che $\overline{AMPC}$ è un parallelogramma). Abbiamo pertanto equiscomposto il triangolo $\overline{ABC}$ ed il parallelogramma $\overline{AMPC}$ in un trapezio (condiviso) più un triangolo. La dimostrazione della seconda parte del teorema si lascia come esercizio al lettore, dato che si svolge in modo analogo a quanto finora scritto.

c.v.d.

COROLLARIO 14. *Triangoli aventi basi ed altezze congruenti, sono equivalenti.*

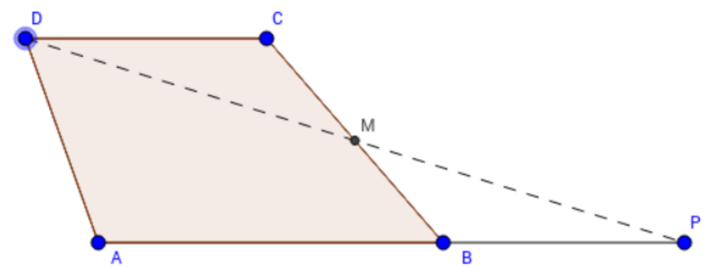
Dim.: per il teorema, ambedue i triangoli sono equivalenti ad uno stesso parallelogramma (di uguale altezza e base metà di quella dei triangoli), per la transitività dell'equivalenza segue la tesi.

c.v.d.

In un trapezio si definisce *altezza* come la distanza tra i due lati paralleli.

PROPOSIZIONE 23. *Un trapezio equivale ad un triangolo avente la base congruente alla somma delle basi del trapezio ed eguale altezza.*

Dim.: Sia $\overline{ABCD}$ un trapezio. Prolunghiamo la base $\overline{AB}$ dalla parte di B di un segmento $\overline{BP}$ congruente alla base $\overline{CD}$. Congiungiamo il punto D con il punto P.



I triangoli $\overline{BPM}$ e $\overline{MCD}$ sono congruenti per il secondo criterio, dato che hanno $\overline{BP} \cong \overline{DC}$ per costruzione e gli angoli alterni interni congruenti perché $\overline{DC}$ e $\overline{BP}$ stanno su rette parallele. In questo modo abbiamo equiscomposto il trapezio ed il triangolo in un quadrilatero (condiviso) ed un triangolo.

c.v.d.

Visto che servirà a breve, introduciamo la seguente definizione.

Definizione 32. *Si chiama* proiezione di un segmento $\overline{AB}$ *su una retta (o su un altro segmento) il segmento* [3] *i cui estremi sono i piedi delle altezze degli estremi di* $\overline{AB}$ *sulla retta stessa.*

2. I Teoremi di Euclide e di Pitagora

Tutt'e tre i teoremi citati nel titolo riguardano l'equivalenza tra superfici costruite utilizzando opportuni elementi di un triangolo rettangolo. Essi sono **caratteristici** [4] per il triangolo rettangolo: ovvero non sono solo enunciati veri per ogni triangolo rettangolo ma, addirittura, se un triangolo verifica le tesi di tali teoremi, allora esso deve essere un triangolo rettangolo. Si può far vedere che essi si equivalgono logicamente, ovvero che se si dimostra uno di essi, allora anche gli altri due devono valere (questo in modo circolare [5]) Inoltre, questi tre teoremi, sono stati dimostrati in vario modo: alcune dimostrazioni sono

[3] Preso sulla retta o sull'altro segmento.

[4] O meglio: **caratterizzanti**

[5] Nel senso che si può partire da uno qualsiasi e far discendere logicamente un secondo teorema tra di essi e successivamente, da questo l'ultimo rimanente e da questi il primo dimostrato.

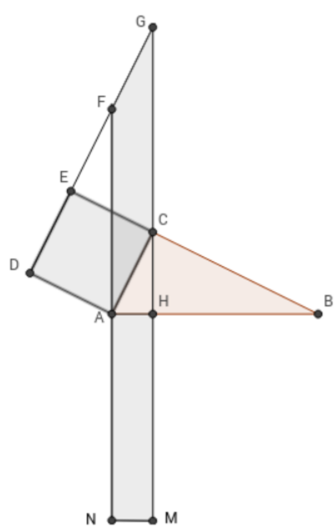
molto eleganti, altre un po' meno, ma, in fin dei conti, tutte necessitano di una buona padronanza della geometria vista finora; possiamo dire, senza tema di smentite, che essi rappresentano l'acme del corpo teorico che stiamo costruendo, utilizzando gli strumenti della congruenza, del parallelismo e dell'equivalenza.

I teoremi di Euclide affermano entrambi l'*equivalenza tra un rettangolo ed un quadrato,* mentre il teorema di Pitagora afferma l'*equivalenza tra un quadrato ed altri due quadrati presi assieme.*

Noi dimostreremo nell'ordine: il primo teorema di Euclide, il teorema di Pitagora come suo banale corollario e, infine, il secondo teorema di Euclide.

Teorema 10 (1^o Teorema di Euclide). *In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto equivale al rettangolo che ha dimensioni uguali all'ipotenusa ed alla proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa.*

Dim.: Sia $\overline{ABC}$ il triangolo rettangolo, retto in C e consideriamo la figura nel disegno.



Dato che il quadrato $\overline{ACED}$ ed il parallelogramma $\overline{ACGF}$ hanno eguale base ($\overline{AC}$) ed uguale altezza ($\overline{AD}$), essi sono equivalenti. Se proviamo che il rettangolo $\overline{NMHA}$ (con lati $\overline{AN} \cong \overline{AB}$ ed $\overline{AH}$, essendo questa la proiezione di $\overline{AC}$ su $\overline{AB}$) è anche equivalente al parallelogramma $\overline{ACGF}$, per la proprietà transitiva abbiamo dimostrato il teorema! Ora, i triangoli $\overline{AFD}$ e $\overline{ABC}$ sono congruenti: hanno gli angoli in C ed in D retti, $F\hat{A}D$ e $C\hat{A}B$ uguali perché complementari dello stesso angolo $F\hat{A}C$ ed $\overline{AC} \cong \overline{AD}$ perché lati di uno stesso quadrato (possiamo applicare il secondo criterio di congruenza).
Quindi anche $\overline{AF} \cong \overline{AB}$; ma essendo, per costruzione, $\overline{AN} \cong \overline{AB}$, sarà pure $\overline{AN} \cong \overline{AF}$. A questo punto il rettangolo $\overline{NMHA}$ ed il parallelogramma $\overline{ACGF}$ sono equivalenti perché hanno basi congruenti e stessa altezza $\overline{AH}$. Questo è quanto desiderato!

c.v.d.

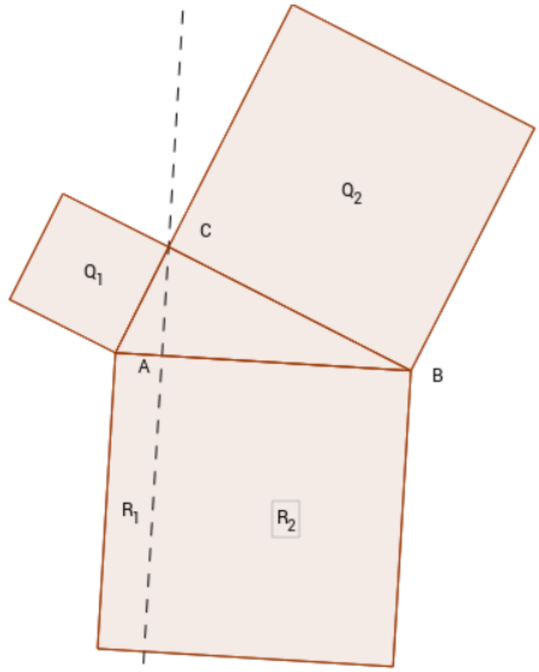
Teorema 11 (teorema inverso al 1^o teorema di Euclide). *Se in un triangolo il quadrato costruito su un lato è equivalente al rettangolo di dimensioni uguali al lato maggiore ed alla proiezione del lato prima considerato su quest'ultimo, allora il triangolo è rettangolo.*

Dim.: Sia $\overline{ABC}$ il triangolo disegnato nella dimostrazione del teorema precedente. Supponiamo di *non sapere* che l'angolo in C è retto, ma sia questa la tesi. Detti F e G i punti d'intersezione della retta per D ed E con quelle per N ed A e M ed H. Avremo, come prima, che il quadrato $\overline{ACED}$ è equivalente al parallelogramma $\overline{ACGF}$ perché hanno stessa base e stessa altezza. Dato che per ipotesi è $\overline{ACED} \equiv \overline{NMHA}$, arguiamo che il rettangolo è anche equivalente al parallelogramma. Ora, rettangolo e parallelogramma hanno eguale altezza $\overline{AH}$, perciò deve essere anche $\overline{AN} \cong \overline{AF}$. Visto che $\overline{AN} \cong \overline{AB}$, per costruzione del rettangolo, sarà $\overline{AB} \cong \overline{AF}$. Se consideriamo i triangoli $\overline{ADF}$ e $\overline{ABC}$, ci convinceremo che essi sono congruenti: hanno $\overline{AF} \cong \overline{AB}$, $\overline{AC} \cong \overline{AD}$ e gli angoli $D\hat{A}F \cong C\hat{A}B$ perché complementari dello stesso angolo $F\hat{A}C$. Ma l'angolo $E\hat{D}A$ è retto, ergo anche l'angolo $A\hat{C}B$ deve essere retto!

c.v.d.

Teorema 12 (Teorema di Pitagora). *In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa equivale ai quadrati costruiti sui cateti.*

Dim.: Sia $\overline{ABC}$ un triangolo rettangolo e consideriamo i quadrati costruiti sui cateti, Q_1 e Q_2 e quello costruito sull'ipotenusa Q_3. Inoltre tracciamo la perpendicolare all'ipotenusa, passante per il vertice C : è chiaro che tale retta suddivide il quadrato sull'ipotenusa in due rettangoli R_1 ed R_2 (come in figura).



Per il primo teorema di Euclide si hanno le equivalenze

$$Q_1 \equiv R_1, \quad Q_2 \equiv R_2.$$

Per cui, sommando,

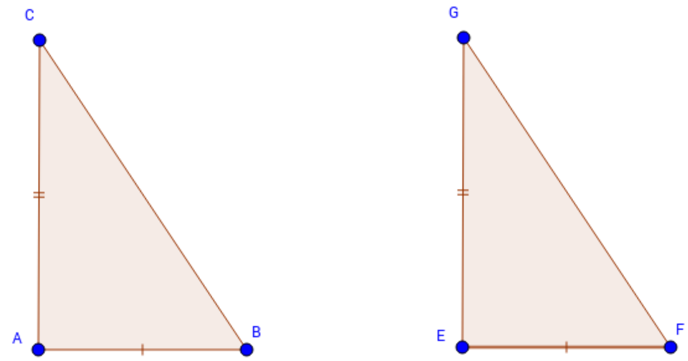
$$Q_1 + Q_2 \equiv R_1 + R_2 = Q_3.$$

c.v.d.

Anche in questo caso vale l'inverso del teorema.

TEOREMA 13 (teorema inverso al teorema di Pitagora). *Se in un triangolo la somma dei quadrati costruiti su due lati è equivalente al quadrato costruito sul lato maggiore, allora il triangolo è rettangolo.*

Dim.: Usiamo un trucco. Sia $\overline{ABC}$ un triangolo e $\overline{BC}$ sia il lato maggiore di esso. Costruiamo un triangolo rettangolo $\overline{EFG}$ i cui cateti siano uguali ai lati $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.



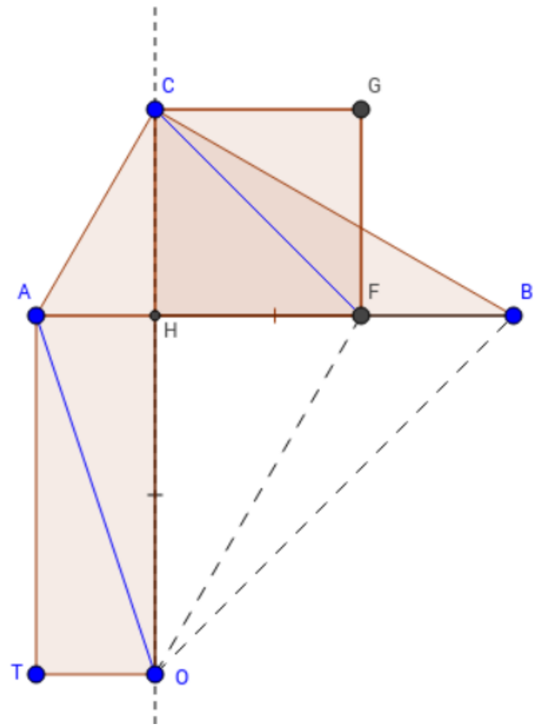
I quadrati costruiti su $\overline{AB}$ ed $\overline{AC}$ sono uguali a quelli costruiti sui cateti $\overline{EF}$ ed $\overline{EG}$ (rispettivamente). Per il teorema di Pitagora la somma di tali quadrati equivalgono al quadrato costruito su $\overline{FG}$. Per cui possiamo dire che il quadrato costruito su $\overline{FG}$ equivale al quadrato costruito su $\overline{BC}$: questo significa che i lati di tali quadrati sono congruenti ovvero $\overline{FG} \cong \overline{BC}$. Ricordiamo che per il terzo criterio, se due triangoli hanno tutti i lati congruenti, allora sono essi stessi congruenti: ciò significa che anche il triangolo $\overline{ABC}$ è rettangolo.

c.v.d.

TEOREMA 14 (2^o teorema di Euclide). *In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa equivale al rettangolo che ha per dimensioni le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.*

Di questo teorema daremo due dimostrazioni: la prima indipendente dai due teoremi appena dimostrati, la seconda -notevolmente più semplice- dipendente dal primo teorema di Euclide e dal teorema di Pitagora.

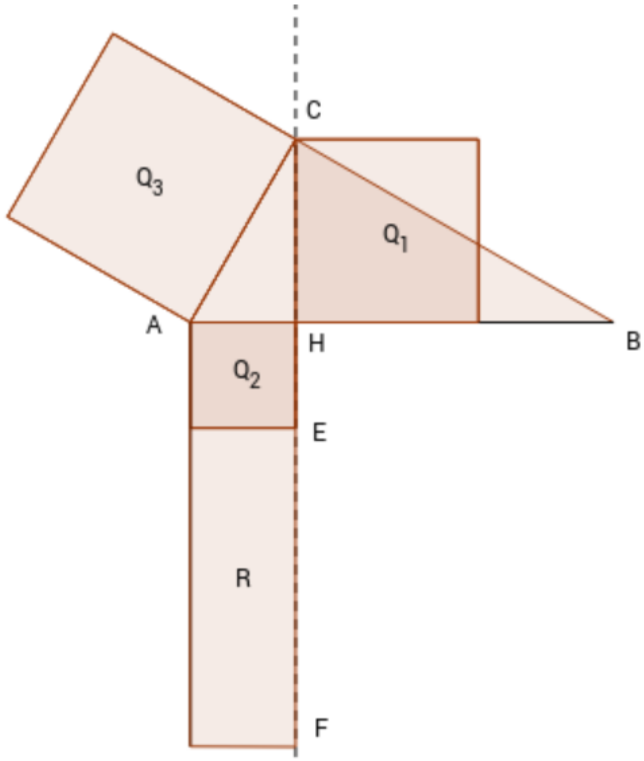
Dim.1: Sia $\overline{ABC}$ un triangolo rettangolo in C. Costruiamo su $\overline{AH}$, proiezione del cateto $\overline{AC}$, un rettangolo di altezza $\overline{AT} \cong \overline{HB}$ (altezza congruente alla proiezione dell'altro cateto). Sia $\overline{CHFG}$ il quadrato costruito sull'altezza.



Se dimostriamo che il triangolo $\overline{HFC}$ è equivalente al triangolo $\overline{AOH}$ abbiamo finito, poiché il rettangolo è equivalente a due volte il triangolo $\overline{AOH}$, mentre il quadrato sull'altezza è due volte il triangolo $\overline{HFC}$. I triangoli $\overline{HOF}$ e $\overline{HCB}$ sono congruenti per il primo criterio ($\overline{HF} \cong \overline{HC}$, gli angoli in H sono entrambi retti e $\overline{HB} \cong \overline{HO}$,); pertanto anche gli angoli $H\hat{O}F$ e $H\hat{B}C$ sono congruenti. Visto che gli angoli $A\hat{C}H$ e $H\hat{B}C$ sono complementari dello stesso angolo $H\hat{C}B$, essi sono uguali, sicché è pure l'angolo $A\hat{C}H \cong H\hat{O}F$. Per il primo criterio di parallelismo sarà che AC è parallelo ad OF ed i triangoli $\overline{OAF}$ ed $\overline{OCF}$ risultano equivalenti (dato che hanno stessa base $\overline{OF}$ e stessa altezza = distanza tra le parallele $\overline{AC}$ e $\overline{OP}$). Sottraendo il triangolo $\overline{OHF}$ dai triangoli equivalenti $\overline{OAF}$ e $\overline{OCF}$ si ottiene $\overline{AOH} \equiv \overline{CHF}$, ovvero quanto desiderato.

c.v.d.

Dim.2: Osserviamo la figura seguente ed applichiamo il primo teorema di Euclide ed il Teorema di Pitagora.



Per il primo teorema di Euclide, applicato al triangolo $\overline{ABC}$, il quadrato $Q_3 \equiv Q_2 + R$ e per il teorema di Pitagora, applicato al triangolo $\overline{AHC}$, $Q_1 + Q_2 \equiv Q_3$. Quindi, sottraendo opportunamente, si ottiene:

$$Q_3 - Q_2 \equiv Q_1 \Rightarrow Q_2 + R - Q_2 \equiv Q_1$$

ergo

$$R \equiv Q_1.$$

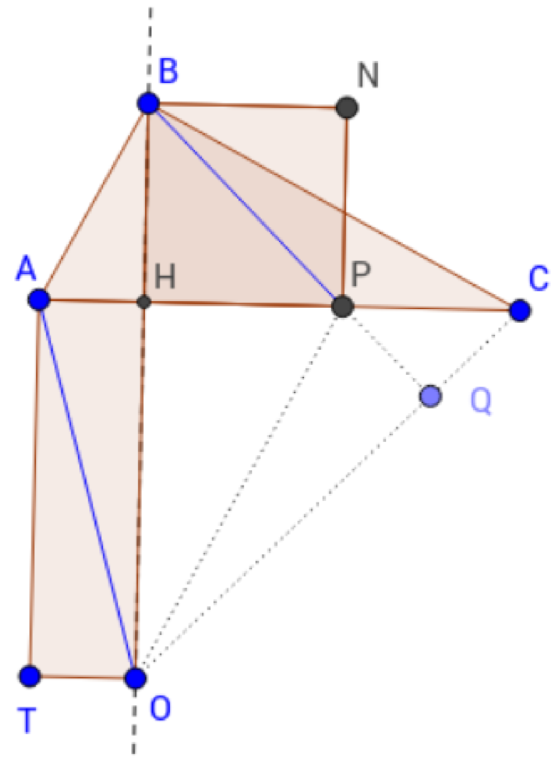
Basta ora osservare che R è il rettangolo le cui dimensioni sono proprio le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, mentre Q_1 è il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa.

c.v.d.

Proviamo, anche in questo caso, il teorema inverso.

Teorema 15 (teorema inverso al 2^o teorema di Euclide). *Se il quadrato costruito sull'altezza relativa al lato maggiore di un triangolo è equivalente al rettangolo le cui dimensioni sono le proiezione degli altri due lati su tale lato, allora il triangolo è rettangolo.*

Dim.: Sia $\overline{BH}$ l'altezza relativa al lato maggiore $\overline{AC}$ e consideriamo la figura qui di seguito. Per ipotesi sia $\overline{BHPN}$ equivalente ad $\overline{AHOT}$. Dobbiamo provare che l'angolo in B è retto.



Dalle ipotesi segue che i triangoli $\overline{AOH}$ e $\overline{BPH}$ sono equivalenti e quindi lo saranno anche i triangoli $\overline{AOP}$ e $\overline{BOP}$ (che si ottengono aggiungendo il triangolo $\overline{OHP}$ ai precedenti). Pertanto $\overline{AB}$ e $\overline{OP}$ devono essere paralleli in quanto i triangoli equivalenti $\overline{AOP}$ e $\overline{BOP}$ hanno stessa base $\overline{OP}$ e, quindi, stessa altezza [6] [7]. Sia Q il punto d'intersezione delle rette su cui giacciono $\overline{OC}$ e $\overline{BP}$, ed osserviamo i triangoli rettangoli isosceli $\overline{HPB}$ e $\overline{HOC}$: si ricava che gli angoli $H\hat{P}B$ e $H\hat{C}O$ sono entrambi metà di angoli retti. Visto che gli angoli $H\hat{P}B$ e $Q\hat{P}C$ sono opposti al vertici (e quindi uguali), risulta che l'angolo $P\hat{Q}C$ è un angolo retto. Conseguentemente $\overline{BQ}$ e $\overline{CH}$ sono due altezze dello stesso triangolo $\overline{BCO}$, perciò ne individuano l'ortocentro P; ciò significa che anche $\overline{OP}$ è ortogonale a $\overline{BC}$, essendo la terza altezza passante da P, quindi anche la parallela $\overline{AB}$ sarà ortogonale a $\overline{BC}$, pertanto l'angolo in B è un angolo retto.

c.v.d.

[6] Stiamo affermando che i punti A e B equi-distano dalla retta OP.

[7] Osserva che stiamo utilizzando un risultato che non abbiamo ancora dimostrato, ovvero: **se due triangoli sono equivalenti ed hanno le basi congruenti, allora hanno congruenti anche le altezze**; lo studente volenteroso può cimentarsi a dimostrare tale proposizione.

CAPITOLO 6

Grandezze, misure, proporzioni e Teorema di Talete

I segmenti e gli angoli, pur essendo figure abbastanza diverse tra di loro, hanno comunque qualcosa di comune: si possono sommare, sottrarre; hanno multipli e sottomultipli e si possono confrontare per dire quale è il più grande, il più piccolo o se sono uguali.

DEFINIZIONE 33. *Un insieme di elementi, il quale, come minimo, gode delle seguenti sei proprietà, si chiama* classe di grandezze omogenee *(o della stessa specie). Possiamo anche affermare che la* grandezza *è quella cosa che risulta "caratteristica comune" di tutti gli elementi di un insieme sul quale si verificano le seguenti proprietà:*

(1) *Fra gli elementi dell'insieme si può definire una relazione d'equivalenza: più precisamente di* uguaglianza.
(2) *È definibile una operazione (detta* somma*) che a due o più elementi dell'insieme associ un unico altro elemento (tale operazione deve essere* associativa *e* commutativa, *ovvero: la somma non cambia se a due o più elementi si sostituisce la loro somma e non cambia nemmeno se si cambia l'ordine con cui si sommano).*
(3) *Due elementi dell'insieme sono sempre confrontabili (ovvero si può sempre dire quando un elemento è minore di un altro, è uguale oppure è maggiore di un altro; ciascuno di questi casi esclude gli altri). Si dice anche che l'insieme possiede un* ordinamento totale *(o lineare).*
(4) *Sommando, membro a membro, uguaglianze fra elementi, si ottiene ancora una uguaglianza.*
(5) *Esiste un elemento "neutro" rispetto alla somma, detto* elemento nullo *(ovvero tale che sommato ad un altro elemento si ottiene sempre lo stesso elemento di partenza).*
(6) *Se una somma di elementi è nulla allora tutti gli addendi sono nulli.*

Dando un occhio attento a questa definizione, evidentemente risulta che *i segmenti* costituiscono una classe di grandezze omogenee, in cui la congruenza funge da uguaglianza e per la quale tutto quanto richiesto è rispettato [1]. Ma anche *gli angoli* formano una classe di grandezze omogenee, con la congruenza, anche in questo caso, come relazione d'uguaglianza. Anche le figure piane formano una classe di grandezze omogenee, con la relazione di equivalenza quale uguaglianza.

Quanto fatto, separatamente per i segmenti e per gli angoli, lo si farà in generale per tutte le grandezze. In particolare si definiscono i multipli, i sottomultipli e si richiede che valgano i postulati di Eudosso-Archimede e di divisibilità.

DEFINIZIONE 34. *Data una grandezza $\mathcal{B}$ ed un numero naturale m, la grandezza $\mathcal{A}$ che si ottiene sommando m copie di $\mathcal{B}$ si dice* multipla *di $\mathcal{B}$ secondo m e si scrive*

$$\mathcal{A} = m\,\mathcal{B}.$$

Altresì si dice che $\mathcal{B}$ è sottomultipla *di $\mathcal{A}$ secondo m e si scrive*

$$B = \frac{1}{m}\,\mathcal{A}.$$

Per poter procedere correttamente alla "costruzione" di una teoria della misura, occorre fare due richieste abbastanza intuitive: l'una è che una grandezza possa essere divisa in parti uguali a piacere [2] e l'altra è che sommando ripetutamente una grandezza, si può fare in modo che essa diventi "grande a piacere". Pertanto passiamo ad enunciare formalmente tali due richieste.

POSTULATO 27 (Postulato di divisibilità). *Ogni grandezza è sempre divisibile in un numero qualunque di parti uguali.*

POSTULATO 28 (Postulato di Eudosso-Archimede). *Date due grandezze omogenee disuguali, esiste sempre un multiplo della minore che superi la maggiore.*

La prossima definizione è una delle più importanti e proficue della matematica e procurò non pochi problemi ai matematici pitagorici, avendo essi stessi scoperto un fatto che andava contro la teoria che sostenevano sull'*Armonia* della Natura.

DEFINIZIONE 35. *Due grandezze omogenee si dicono* commensurabili *se ammettono un sottomultiplo comune; in caso non avessero un sottomultiplo comune, si dicono* incommensurabili.

[1] L'elemento neutro qualse sarebbe?

[2] E questo porta anche a delle conseguenze, dal punto di vista "filosofico", molto sottili e raffinate.

Non dovrebbero esserci problemi a comprendere che esistono grandezze commensurabili: per esempio, se un segmento a è tre volte il segmento c ed un segmento b è cinque volte il segmento c allora si avrebbe $c = \frac{1}{3}a$ e $c = \frac{1}{5}b$, da cui la commensurabilità di a e b (dato che c è un sottomultiplo comune ai due).

Meno immediato è comprendere che due grandezze possono non essere commensurabili! Il prossimo teorema, da attribuire a Pitagora, dimostra che esistono grandezze incommensurabili: fu una scoperta che forse non venne giustamente apprezzata (date le conoscenze matematiche dell'epoca). Più che una vittoria del pensiero astratto, il teorema venne visto come un dramma per la comunità pitagorica e gettò sconcerto fra i matematici ionici: nel sistema filosofico di Pitagora, il numero era l'entità più importante e dal rapporto di numeri seguiva (l'armonia e) la descrizione di tutto quanto è in natura. La scoperta di grandezze incommensurabili implicava che esistevano almeno due oggetti che non potevano essere espressi come rapporto tra numeri: un disastro! Per di più il teorema si riferisce ad oggetti che si trovano nella realtà quotidiana, non a fantasie partorite dalle elucubrazioni di qualche esperto sofista.

Teorema 16. *Lato e diagonale del quadrato sono segmenti incommensurabili* [3] .

Dim.: Sia $\overline{ABCD}$ un quadrato. Per assurdo supponiamo che la diagonale $\overline{AD}$ ed il lato $\overline{AB}$ siano commensurabili. Allora dovrà esistere un sottomultiplo comune, diciamo $\mathcal{H}$, e due numeri naturali n ed m tali che $\mathcal{H}$ sia contenuto n volte in $\overline{AB}$ ed m volte in $\overline{AD}$. Consideriamo i quadrati costruiti sui cateti e sull'ipotenusa del triangolo $\overline{ABD}$: se $\mathcal{H}$ è contenuto n volte in $\overline{AB}$, allora nel quadrato costruito su $\overline{AB}$ ci saranno n^2 quadrati di lato $\mathcal{H}$, mentre nel quadrato costruito su $\overline{AD}$ ce ne saranno m^2. Siccome il quadrato costruito sull'altro lato del triangolo è uguale a quello costruito su $\overline{AB}$, si avrà,

[3] C'è da dire che probabilmente Pitagora fu il primo a capire che non poteva esistere un rapporto tra queste due grandezze ma, non avendo gli strumenti "tecnici" abbastanza potenti per dimostrarlo, lo dichiarò a livello di "segreto della scuola": infatti si narra di un segreto -rivelato solo ad una ristretta cerchia di eletti- che non si doveva assolutamente svelare alla massa. Probabilmente era proprio l'incommensurabilità dichiarata in questo teorema. Gli "strumenti tecnici" che mancavano a Pitagora (ed a tutta la gloriosa scuola matematica greca) erano le operazioni definite nell'*algebra,* che nel mondo occidentale fu introdotta solo in pieno medioevo, addirittura un abbondante millennio e mezzo dopo la scrittura degli "Elementi di Euclide".

applicando il teorema di Pitagora, che $n^2 + n^2 = m^2$, ovvero

$$2\,n^2 = m^2.$$

Quest'uguaglianza è assurda, per come ora dimostreremo. Intanto dividiamo entrambi i membri per n^2 ottenendo

$$\frac{m^2}{n^2} = 2 \quad \text{ovvero} \quad \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

Senza ledere alla generalità della dimostrazione possiamo immaginare che la frazione sia già ridotta "ai minimi termini", ovvero che *non ci siano fattori in comune tra numeratore e denominatore* [4]. Ora, dato che $2\,n^2 = m^2$, allora deduciamo che m^2 è un numero pari [5]. Questo significa che m è pari, altrimenti il suo quadrato sarebbe dispari. Quindi potremmo pensare ad m come al doppio di qualche numero N, ovvero $m = 2 \cdot N$. Ma allora $m^2 = 4 \cdot N^2$ e quindi, sostituendo si ottiene

$$2\,n^2 = 4\,N^2$$

e dimezzando le quantità

$$n^2 = 2\,N^2.$$

Questo vuol dire che anche n^2 è pari e, perciò, dovrà esserlo pure n. Questo è impossibile, dato che, nella frazione $\frac{m}{n}$, avevamo detto che m ed n non avevano fattori in comune, mentre ora avrebbero come fattore in comune il 2. Per cui possiamo arguire che non può esistere questo sottomultiplo comune $\mathcal{H}$.

c.v.d.

Supponiamo ora che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ siano grandezze commensurabili; sia $\mathcal{C}$ una grandezza a esse omogenea e sottomultipla di entrambe. Dovranno esistere due numeri naturali m ed n tali che $\mathcal{C} = \frac{1}{n}\mathcal{A}$ e $\mathcal{C} = \frac{1}{m}\mathcal{B}$, ovvero $\mathcal{A} = n\,\mathcal{C}$ e $\mathcal{B} = m\,\mathcal{C}$. Possiamo quidi scrivere che

$$A = n\left(\frac{1}{m}\,\mathcal{B}\right) \quad \text{e} \quad \mathcal{B} = m\left(\frac{1}{n}\,\mathcal{A}\right),$$

ovvero

$$\mathcal{A} = \frac{n}{m}\,\mathcal{B} \quad \text{e} \quad \mathcal{B} = \frac{m}{n}\,\mathcal{A}.$$

In corrispondenza di queste scritture si introduce il simbolismo:

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} = \frac{n}{m} \quad \text{e} \quad \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} = \frac{m}{n},$$

[4] Li avremmo semplificati, insomma...

[5] Così come lo sono tutti i numeri "doppi" di un altro!

od ancora

$$\mathcal{A} : \mathcal{B} = \frac{n}{m} \quad \text{e} \quad \mathcal{B} : \mathcal{A} = \frac{m}{n}$$

e si definisce il *numero razionale* $\frac{n}{m}$ essere il **rapporto della grandezza** $\mathcal{A}$ rispetto alla grandezza $\mathcal{B}$ (ed analogamente $\frac{m}{n}$ sarà il rapporto di $\mathcal{B}$ rispetto a $\mathcal{A}$).
Se abbiamo il rapporto $\mathcal{A} : \mathcal{B}$ allora diciamo che $\mathcal{B} : \mathcal{A}$ è il rapporto inverso del precedente. Quindi possiamo dire che:

"Il rapporto di due grandezze commensurabili è un numero razionale".

Si può dimostrare l'affermazione inversa, ovvero

PROPOSIZIONE 24. *Se il rapporto di due grandezze è un numero razionale, allora le due grandezze sono commensurabili.*

Dim.: Sia per ipotesi $\mathcal{A} : \mathcal{B} = \frac{n}{m}$. Questo equivale a dire che $\mathcal{A} = \frac{n}{m}\mathcal{B}$, ovvero $\mathcal{A} = n\left(\frac{1}{m}\mathcal{B}\right)$; ciò significa che $\frac{1}{m}\mathcal{B}$ è una grandezza sottomultipla comune ad $\mathcal{A}$ ed a $\mathcal{B}$ (è contenuta m volte in $\mathcal{B}$ ed n volte in $\mathcal{A}$). Quindi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono commensurabili, come affermava la tesi.

c.v.d.

La domanda che nasce spontanea è: *"Cosa sarà il rapporto di due grandezze incommensurabili?"*.

Per ora chiariamo il significato del termine "commensurabile": la parola deriva da due termini latini, "cum" e "mensuro" che, letteralmente significa "misuro con" una stessa quantità. In breve, *misurare* significa determinare il rapporto tra la grandezza che si vuole misurare ed una grandezza ad essa omogenea che si prestabilisce essere il "termine di confronto". Se $\mathcal{U}$ è la grandezza che si sceglie come "termine di confronto" e scriviamo ,$m_{\mathcal{U}}(\mathcal{A})$ per "misura di $\mathcal{A}$ rispetto a $\mathcal{U}$, allora si ha

$$m_{\mathcal{U}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} : \mathcal{U}$$

e, chiaramente,

$$m_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) = 1$$

da cui il termine *unità di misura* per la grandezza $\mathcal{U}$. Avere due grandezze commensurabili, dunque, significa poterle misurare con una stessa unità di misura: basta scegliere come termine di confronto il sottomultiplo comune alle due grandezze! Comunque, in una prossima sezione chiariremo ancora meglio questi concetti; d'altra parte, lo studente scaltro si potrà già domandare: "quindi la diagonale ed il lato di un quadrato, essendo incommensurabili, non potranno essere misurate con un "metro" comune?" In effetti è così: o si misura il lato, o si misura la diagonale, dato che un rapporto, che sia un numero razionale, tra i due non esiste, per cui non esisterà nemmeno un sottomultiplo del "metro" che possa "entrare" un numero esatto di volte sia nel lato, sia nella diagonale del quadrato. Il problema, chiaramente, consiste nel dover definire, in qualche modo, il rapporto tra grandezze incommensurabili.

1. Numeri Reali e Postulato di continuità

Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ grandezze incommensurabili con $\mathcal{A} > \mathcal{B}$. Trasportiamo $\mathcal{B}$ su $\mathcal{A}$ e vediamo quante volte esso è contenuto nel più grande. Se, per esempio, $\mathcal{B}$ è contenuto 2 volte in $\mathcal{A}$ con una restante parte $\mathcal{R}_1$, scriveremo $\mathcal{A} = 2\,\mathcal{B} + \mathcal{R}_1$. Riportiamo la decima parte [6] di $\mathcal{B}$ sul segmento $\mathcal{R}_1$ per sapere quante volte $\frac{1}{10}\,\mathcal{B}$ è contenuto in $\mathcal{R}_1$. Se, per esempio, esso è contenuto 3 volte e rimane una parte $\mathcal{R}_2$, scriveremo $\mathcal{R}_1 = \frac{3}{10}\,\mathcal{B} + \mathcal{R}_2$ e quindi $\mathcal{A} = 2\,\mathcal{B} + \frac{3}{10}\,\mathcal{B} + \mathcal{R}_2$. Poi procediamo a vedere quante volte un centesimo [7] di $\mathcal{B}$ è contenuto in $\mathcal{R}_2$ e così via di seguito per un millesimo, un milionesimo ecc... evidentemente tale procedimento si può continuare finché si vuole, senza mai raggiungere un termine! Infatti, se, per esempio, giunti al quarto passo di tale procedimento avessimo che $\mathcal{R}_2 = \frac{7}{100}\,\mathcal{B} + \mathcal{R}_3$ ed $\mathcal{R}_3 = \frac{1}{1000}\,\mathcal{B}$, allora si avrebbe $\mathcal{A} = 2\,\mathcal{B} + \frac{3}{10}\,\mathcal{B} + \frac{7}{100}\,\mathcal{B} + \frac{1}{1000}\,\mathcal{B}$ ed i due segmenti sarebbero commensurabili, avendo il rapporto uguale al numero razionale $\frac{2371}{1000}$. Notiamo che le infinite cifre decimali che si ottengono non sono nemmeno soggette a periodicità, altrimenti ancora i segmenti sarebbero commensurabili [8]! In altre parole, così procedendo si ottiene un *allineamento di cifre decimali illimitato non periodico.* Tale allineamento rappresenta un *nuovo tipo di numero,* che chiameremo **numero irrazionale** ed esso rappresenta proprio il rapporto di due segmenti non commensurabili. Il procedimento mediante il quale siamo giunti a definire i numeri irrazionali si chiama *rappresentazione decimale.*

Dato che un numero irrazionale è determinato ogni volta che si conosca ciascuna delle cifre nella sua rappresentazione decimale, possiamo dire che due numeri di tale tipo sono uguali quando hanno la stessa rappresentazione decimale. Tale definizione si applica, in verità, ad ogni

[6] Questo perché il nostro sistema di numerazione è decimale!

[7] Ovvero la decima parte di un decimo.

[8] Dato che i numeri decimali periodici sono tutti frazioni.

tipo di numero: tutti i numeri si possono rappresentare in forma decimale! Quindi ogni due numeri sono uguali se le loro rappresentazioni decimali sono le stesse.
Indichiamo l'insieme dei numeri razionali unito a quello dei numeri irrazionali con il nome di **insieme dei numeri Reali.**

1.1. Breve excursus sulla definizione dell'insieme dei numeri reali. Vediamo un altro modo per definire i numeri reali. Consideriamo, ad esempio,

$$n = 3,121221222122221\dots$$

allora possiamo dire che i numeri

$$3 \quad 3,1 \quad 3,12 \quad 3,121 \quad 3,1212 \quad \dots$$

formano un'*approssimazione per difetto,* a meno di un'unità, di un decimo, di un centesimo ecc. del numero n, mentre

$$4 \quad 3,2 \quad 3,13 \quad 3,122 \quad 3,1213 \quad \dots$$

formano un'*approssimazione per eccesso,* a meno di un'unità, di un decimo, di un centesimo ecc. del numero n. In tal caso il numero n risulta essere maggiore di ogni numero razionale che l'approssima per difetto e minore di tutti i razionali che l'approssimano per eccesso. D'altra parte, la successione delle approssimazioni per difetto è crescente (ovvero ogni numero, che approssima sempre meglio l'irrazionale dato, è maggiore del precedente), mentre la successione delle approssimazioni per eccesso è decrescente. Inoltre è possibile trovare dei termini nelle due approssimazioni (un termine nell'approssimazione per eccesso ed uno in quella per difetto) del numero n tale che, se diamo un qualsiasi numero (razionale) piccolo a piacere ϵ, la loro differenza è minore di ϵ [9] . Pertanto si arguisce che esiste un solo numero reale che sia elemento di separazione fra tutti i numeri razionali minori di esso e tutti i numeri razionali maggiori di esso: tale numero è individuato, in modo univoco, dalle due successioni che l'approssimano, possiamo perfino definirlo come la coppia delle due successioni! Tralasciamo di dimostrare che ogni numero reale ha una tale rappresentazione (sia che sia razionale, sia che sia irrazionale) [10] e velocemente diremo che, in tal caso, *due numeri reali sono uguali se hanno gli stessi valori approssimati per difetto e per eccesso.* Questo modo di procedere è stato presentato in modo molto efficace dal matematico tedesco R.Dedekind nel 1872 e prende il nome di *metodo delle sezioni (di Dedekind).*

[9] Si dice anche che l'insieme dei numeri razionali è *denso* in quello dei reali

[10] Si chiama: "rappresentazione per classi contigue"

1.2. Postulato di Continuità. Facendo il punto della situazione, possiamo dire che due grandezze omogenee sono sempre rapportabili: se sono commensurabili "generano" un numero razionale [11] , altrimenti "ci regalano" un numero irrazionale (e valgono anche le proposizioni inverse!).

DEFINIZIONE 36. *Due insiemi di grandezze di una stessa classe si dicono* contigui *se:*

(1) *Ogni grandezza del primo insieme è minore di ogni grandezza del secondo insieme.*
(2) *È possibile trovare una grandezza del secondo insieme ed una del primo tale che la loro differenza sia minore di qualsiasi grandezza ϵ, piccola a piacere, scelta nella classe (di omogeneità).*

Due insiemi che soddisfino la prima condizione si dicono pure *separati.* Notiamo che se due insiemi di grandezze sono separati, allora **esiste** almeno una grandezza che non è minore di alcuna grandezza del primo insieme e non è maggiore di alcuna grandezza del secondo insieme: tale grandezza dicesi *elemento di separazione.* Questa affermazione, che noi abbiamo dato come una intuizione inoffensiva, in effetti è uno dei pilastri della matematica e, più propriamente, consiste nel seguente assioma:

POSTULATO 29 (Postulato di Continuità). *Due insiemi separati di grandezze di una stessa classe ammettono almeno un elemento di separazione.*

Il postulato dice "almeno un elemento", vogliamo precisare che, nel caso di insiemi contigui, esso è uno solo.

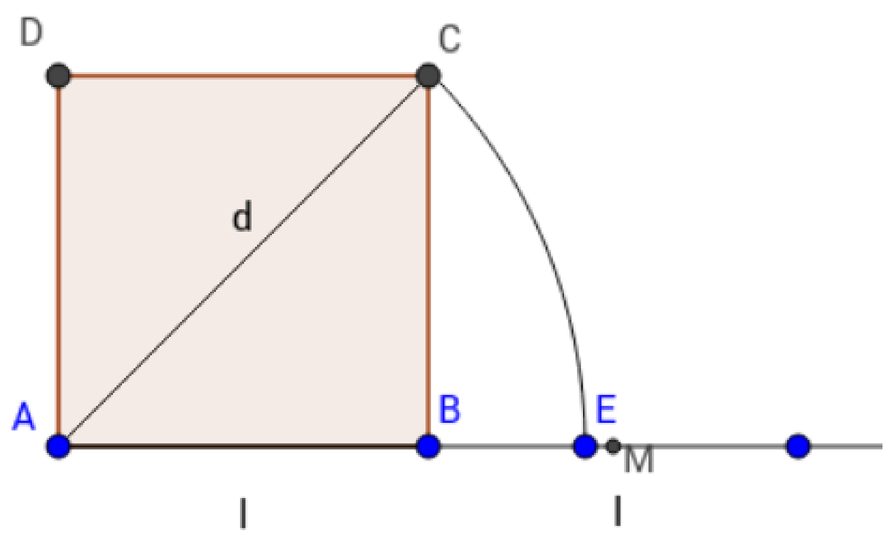
PROPOSIZIONE 25. *Due insiemi contigui di grandezze ammettono esattamente un solo elemento di separazione.*

Dim.: Se fossero due e distinti, potremmo considerare la loro differenza d. Se consideriamo ora una grandezza $\epsilon < d$, accadrebbe che la differenza tra una grandezza del secondo insieme ed una del primo non potrebbe essere minore di ϵ : questo è contro l'ipotesi di contiguità degli insiemi.

c.v.d.

[11] Come abbiamo già visto.

1.3. La continuità della retta (numerica). Il postulato di continuità assicura che *la retta non è "bucherellata".* Infatti, immaginiamo di riportare, come nel disegno seguente, la diagonale del quadrato su una semiretta di origine coincidente con il vertice A del quadrato e, inoltre, consideriamo il lato del quadrato $\overline{AB}$ come "l'unità". Chiaramente possiamo riportare sulla retta tutti i multipli e sottomultipli di $\overline{AB}$, e quindi qualsiasi numero razionale che ci venga in mente. Dovrebbe essere altrettanto chiaro che per quanto ci sforzassimo mai incontreremo nella nostra "sistemazione" dei valori numerici in corrispondenza dei punti della retta, un numero adatto a rappresentare il secondo estremo della diagonale riportata in figura: potrebbe essere dovuto al fatto che in coincidenza di tale secondo estremo, sulla retta non ci sia proprio il punto, ovvero la retta presenti "un buco". Invece il postulato di continuità afferma che il punto sulla retta c'è e che può essere rappresentato "in forma dinamica" tramite due successioni di razionali che "lo stringono" come elemento di separazione tra due classi contigue di segmenti.



L'ultima proposizione dimostrata è fondamentale (dato che per ora sappiamo solo fare il prodotto di una grandezza per un numero razionale) per poter definire il *prodotto di una grandezza per un numero reale:* se volessimo, per esempio, moltiplicare la grandezza $\mathcal{B}$ per $n = 3,12122\ldots$ dovremmo dapprima considerare l'approssimazione per difetto ottenuta moltiplicando $\mathcal{B}$ per ogni numero della relativa approssimazione per difetto di n, poscia considereremo l'approssimazione per eccesso ottenuta moltiplicando $\mathcal{B}$ per i numeri della successione dell'approssimazione per eccesso di n. Otterremmo delle classi contigue di grandezze e, per quella proposizione, esse avrebbero un unico elemento di separazione: tale elemento si assume essere il prodotto di $\mathcal{B}$ per n.

Finiamo la sezione riprendendo il concetto di *misura di una grandezza.*

Definizione 37. *Si definisce* misura *di una grandezza* $\mathcal{A}$ *rispetto ad un'altra* $\mathcal{U}$ *omogenea con* $\mathcal{A}$, *il numero reale* n *che esprime il rapporto di* $\mathcal{A}$ *ed* $\mathcal{U}$ *: cioè tale che* $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{U}} = n$

La grandezza $\mathcal{U}$ dicesi *unità di misura* (dato che $\frac{\mathcal{U}}{\mathcal{U}} = 1$). Il teorema fondamentale, che ci permetterà di applicare l'algebra alla risoluzione dei problemi geometrici, è il seguente.

Proposizione 26. *Il rapporto di due grandezze omogenee è uguale al quoziente delle loro misure rispetto ad una stessa unità di misura* [12]
.

Dim.: Siano $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{U}$ tre grandezze omogenee ed a e b le misure di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ rispettivamente rispetto ad $\mathcal{U}$. Per ipotesi, quindi, si ha $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{U}} = a$ e $\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{U}} = b$, [13] cioè

$$\mathcal{A} = a\mathcal{U} \quad \text{e} \quad \mathcal{B} = b\mathcal{U}.$$

Sostituendo nella prima uguaglianza la grandezza $\mathcal{U} = \frac{1}{b}\mathcal{B}$ [14] si ottiene $\mathcal{A} = a\frac{1}{b}\mathcal{B}$, ovvero

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} = \frac{a}{b}.$$

c.v.d.

Inoltre è importante capire che il *rapporto tra grandezze prescinde dalle unità di misura* che si andranno a scegliere per effettuare le misurazioni: ovvero, quel rapporto, $\frac{a}{b}$, **non dipende** in alcun modo da $\mathcal{U}$, ma è sempre lo stesso, per qualsiasi scelta arbitraria di $\mathcal{U}$.
In breve possiamo concludere con questa importante affermazione:

[12]Osserviamo che in questo teorema, sulle grandezze non si fa alcuna ipotesi di commensurabilità.
[13]Si può anche ammettere che a o b siano numeri *irrazionali*.
[14]Dedotta dalla seconda.

"È il rapporto che è fondamentale nel confronto tra grandezze, non quanto esse misurano"! [15]

1.4. Introduzione ai Radicali. Ritorniamo al problema di "misurare" la lunghezza della diagonale di un quadrato, conoscendone la misura del lato, anzi facciamo di più: immaginiamo di prendere come unità di misura proprio il lato del quadrato [16]. Per quanto detto precedentemente, non esiste una frazione che possa rappresentare la misura della diagonale, altrimenti questi due segmenti sarebbero commensurabili. Partiamo quindi dalla considerazione che la somma dei quadrati dei cateti equivalgono a quello dell'ipotenusa, ovvero dal teorema di Pitagora. Sappiamo dunque che il quadrato, il cui lato è l'ipotenusa, ha misura 2 unità quadre. Dato che un quadrato si "sviluppa" sopra un lato, così come un albero sulla propria radice, allora definiamo la lunghezza della diagonale come la *radice* del quadrato di misura 2: ovvero la "radice quadrata di 2". In generale possiamo dare la seguente definizione

Definizione 38. *La radice quadrata di un numero* n *è quel numero che* moltiplicato per se stesso dà n : *vale a dire che* rappresenta il lato del quadrato la cui misura è n. *Indichiamo tale numero con il simbolo* $\sqrt{n}$, *per cui, per definizione:* $\boxed{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}=n}$.

Ora, per alcuni numeri la radice quadrato coincide proprio con un numero razionale, ma per molti altri, essa rappresenta un numero *irrazionale* [17]. Ad esempio, noi sappiamo che $3\cdot 3=9$, per cui $\sqrt{9}$ deve essere 3. D'altra parte, abbiamo appena discusso sul fatto che non ci sono numeri razionali che moltiplicati per se stessi danno 2, per cui l'unica affermazione sensata per dire "quanto vale" la radice di due è dire che essa vale se stessa!
Imparare ad operare con le radici quadrate ed altri tipi di numeri che chiameremo "radicali aritmetici" sarà uno dei compiti che ci prefiggiamo per il futuro e dedicheremo un intero capito all'uopo. Prima di chiudere con questo argomento, osserviamo che moltiplicando un numero per se stesso, il risultato è sempre un numero positivo [18]: quindi

[15] Si invita a portare un esempio di come i rapporti tra le grandezze rimangono invariati, sebbene le unità di misura si siano cambiate.

[16] Per cui esso ha misura unitaria.

[17] Ovvero, ricordiamo, che non si può esprimere sotto forma di rapporto tra numeri.

[18] O nullo, se il numero è lo zero

scritture del tipo $\sqrt{-4}$ non hanno senso nell'insieme dei numeri reali [19]. Per ora basti ciò.

2. Proporzioni

DEFINIZIONE 39. *Quattro grandezze* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ *(le prime due omogenee fra di loro, così come le ultime due) si dicono* in proporzione *se il rapporto di* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *è uguale al rapporto di* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{D}$*. Scriveremo*

$$\mathcal{A} : \mathcal{B} = \mathcal{C} : \mathcal{D},$$

leggendo "$\mathcal{A}$ *sta a* $\mathcal{B}$ *come* $\mathcal{C}$ *sta a* $\mathcal{D}$*".*

Le grandezze costituiscono i *termini* della proporzione; il primo ed il terzo termine si dicono *antecedenti*, mentre il secondo ed il quarto *conseguenti*. Si dice pure che il primo e l'ultimo termine sono gli *estremi*, mentre il secondo ed il terzo sono i *medi*. Se $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ allora la proporzione diventa

$$\mathcal{A} : \mathcal{B} = \mathcal{B} : \mathcal{D}$$

e si dice che $\mathcal{B}$ è *media proporzionale* tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{D}$.

TEOREMA 17 (Teorema fondamentale sulle proporzioni di grandezze). *Condizione necessaria e sufficiente affinché quattro grandezze siano in proporzione è che siano in proporzione le loro misure.*

Dim.: Siano $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, e $\mathcal{D}$ quattro grandezze in proporzione, allora, dette a e b le misure di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ (rispetto ad una stessa unità omogenea) e c e d quelle di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, necessariamente si ha che

$$\mathcal{A} : \mathcal{B} = a : b \quad \text{e} \quad \mathcal{C} : \mathcal{D} = c : d.$$

Visto che $\mathcal{A} : \mathcal{B} = \mathcal{C} : \mathcal{D}$ allora si ha che $a : b = c : d$.
Rimane da dimostrare la sufficienza.
Supponiamo quindi che $a : b = c : d$, dato che sappiamo essere [20] $\mathcal{A} : \mathcal{B} = a : b$ e $\mathcal{C} : \mathcal{D} = c : d$, per la proprietà transitiva si ottiene proprio $\mathcal{A} : \mathcal{B} = \mathcal{C} : \mathcal{D}$.

c.v.d.

[19] Si costruirà, successivamente, un altro insieme numerico, detto dei *Numeri Complessi*, affinché scritture di quel tipo abbiano senso: a parte l'esigenza del tutto intellettuale di non essere impediti nel "poter estrarre" radici di numeri negativi, gli elementi di questo nuovo insieme assumono importanza fondamentale per numerose applicazioni nelle scienze e nelle tecniche.

[20] Le seguenti sono uguaglianze, non proporzioni!

Il teorema permette di trasferire le proprietà delle proporzioni tra numeri a proprietà per le proporzioni tra grandezze (e viceversa!). Basta quindi ricordarsi quali siano le proprietà delle proporzioni tra numeri; qui segue un breve elenco, già viste, si spera, negli studi di livello inferiore.

I. In ogni proporzione si può scambiare ogni antecedente col suo conseguente, cioè
$$\mathcal{A} : \mathcal{B} = \mathcal{C} : \mathcal{D}$$
implica che
$$\mathcal{B} : \mathcal{A} = \mathcal{D} : \mathcal{C}.$$
-Proprietà dell'invertire-

II. In ogni proporzione si possono scambiare i medi oppure gli estremi, cioè
$$\mathcal{A} : \mathcal{B} = \mathcal{C} : \mathcal{D}$$
implica che
$$\mathcal{A} : \mathcal{C} = \mathcal{B} : \mathcal{D} \quad \text{ovvero} \quad \mathcal{D} : \mathcal{B} = \mathcal{C} : \mathcal{A}.$$
-Proprietà del permutare-

III. In ogni proporzione la somma dei primi due termini sta al primo (od al secondo) come la somma degli altri due sta al terzo (od al quarto), cioè
$$\mathcal{A} : \mathcal{B} = \mathcal{C} : \mathcal{D}$$
implica che
$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) : \mathcal{A} = (\mathcal{C} + \mathcal{D}) : \mathcal{C} \quad \text{ovvero} \quad (\mathcal{A} + \mathcal{B}) : \mathcal{B} = (\mathcal{C} + \mathcal{D}) : \mathcal{D}.$$
-Proprietà del comporre-

IV. In ogni proporzione, se un antecedente è maggiore del proprio conseguente, la differenza del primo e del secondo termine sta al primo (od al secondo) come la differenza del terzo e quarto termine sta al terzo (od al quarto), cioè
$$\mathcal{A} : \mathcal{B} = \mathcal{C} : \mathcal{D}$$
implica che
$$(\mathcal{A} - \mathcal{B}) : \mathcal{A} = (\mathcal{C} - \mathcal{D}) : \mathcal{C} \quad \text{oppure} \quad (\mathcal{A} - \mathcal{B}) : \mathcal{B} = (\mathcal{C} - \mathcal{D}) : \mathcal{D}.$$
-Proprietà dello scomporre-

Per le altre proprietà si rimanda ai testi di matematica per il ciclo scolastico inferiore.

DEFINIZIONE 40. *Dati due insiemi (di grandezze*[21]*), essi sono messi in* corrispondenza biunivoca *se ad ogni elemento del primo insieme corrisponde uno ed un solo elemento del secondo insieme e viceversa.*

Se due classi di grandezze sono messe in corrispondenza biunivoca, gli elementi di tali insiemi si dicono **direttamente proporzionali** (o "in proporzione diretta") se il rapporto tra due qualunque di essi (in uno stesso insieme) è uguale al rapporto delle grandezze corrispondenti nell'altro insieme.

TEOREMA 18 (Criterio generale di proporzionalità). *Condizione necessaria e sufficiente a ché le grandezze di due classi (in corrispondenza biunivoca) siano direttamente proporzionali è che si verifichino queste due condizioni:*

(1) A grandezze uguali corrispondono grandezze uguali;
(2) Alla somma di due o più grandezze qualsiasi (in una classe) corrisponde la somma delle grandezze corrispondenti nell'altra.

Dim.: Siano $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$ le grandezze della prima classe, a cui corrispondono le grandezze $\mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}', \ldots$ nella seconda classe, in proporzionalità diretta.

Dimostriamo prima la necessità delle due condizioni.

Se $\mathcal{A} : \mathcal{B} = \mathcal{A}' : \mathcal{B}'$, qualora $\mathcal{A}$ fosse uguale a $\mathcal{B}$ si avrebbe che il rapporto $\mathcal{A} : \mathcal{B}$ è 1; per la transitività sarebbe pure il rapporto $\mathcal{A}' : \mathcal{B}' = 1$ e quindi $\mathcal{A}' = \mathcal{B}'$ (cioè la prima condizione!). Applicando alla proporzione di partenza la proprietà del comporre si ha: $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) : \mathcal{B} = (\mathcal{A}' + \mathcal{B}') : \mathcal{B}'$. Sia $\mathcal{C}$ la grandezza uguale ad $\mathcal{A} + \mathcal{B}$. Per far vedere che vale la seconda condizione dovremmo far vedere che a $\mathcal{C}$ corrisponde $\mathcal{C}' = \mathcal{A}' + \mathcal{B}'$. Intanto si ha $\mathcal{C} : \mathcal{B} = (\mathcal{A}' + \mathcal{B}') : \mathcal{B}'$ e, per l'unicità del quarto termine di una proporzione, dati tre di essa, se si avesse una grandezza $\mathcal{C}'$ tale per cui sussista la proporzione $\mathcal{C} : \mathcal{B} = \mathcal{C}' : \mathcal{B}'$, allora dovrà essere $\mathcal{C}' = \mathcal{A}' + \mathcal{B}'$, il ché significa che alla grandezza $\mathcal{C}$, somma di due grandezze, corrispondere la grandezza $\mathcal{C}'$, somma delle grandezze corrispondenti.

Dimostriamo ora la sufficienza della tesi.

Se $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ allora, per la prima ipotesi, si avrebbe pure $\mathcal{A}' = \mathcal{B}'$; dato che queste uguaglianze si riscrivono in termini di rapporto come

[21]La definizione è di tipo generale, non devono necessariamente essere presi insiemi di grandezze.

$\mathcal{A} : \mathcal{B} = 1$ e $\mathcal{A}' : \mathcal{B}' = 1$, allora si ha $\mathcal{A} : \mathcal{B} = \mathcal{A}' : \mathcal{B}'$.

Se invece $\mathcal{A}$ non è uguale a $\mathcal{B}$ (supponiamo che sia maggiore), esisterà una grandezza $\mathcal{C}$ tale che $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$. Per la seconda ipotesi, a $\mathcal{B} + \mathcal{C}$ corrisponderà una grandezza $\mathcal{B}' + \mathcal{C}'$ e per la prima ipotesi ad $\mathcal{A}$ corrisponderà una grandezza $\mathcal{A}'$ con $\mathcal{A}' = \mathcal{B}' + \mathcal{C}'$; da ciò arguiamo che è $\mathcal{A}' > \mathcal{B}'$. Analogamente si può mostrare che se $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ allora, per le grandezze corrispondenti, si avrebbe $\mathcal{A}' < \mathcal{B}'$. Osserviamo ora che alla grandezza $n\,\mathcal{A}$ corrisponde la grandezza $n\,\mathcal{A}'$ (ed ad $m\,\mathcal{B}$ corrisponde $m\,\mathcal{B}'$). Questo significa che se $n\,\mathcal{A} = m\,\mathcal{B}$ allora anche $n\,\mathcal{A}' = m\,\mathcal{B}'$ (ed in caso di disuguaglianze si mantengono i versi): in breve, se $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$ è uguale (minore o maggiore) ad un numero razionale $\frac{n}{m}$, allora anche $\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{B}'}$ sarà uguale (minore o maggiore) dello stesso numero razionale. Quindi i valori approssimati per eccesso o per difetto dei rapporti $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$ e $\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{B}'}$ sono gli stessi: se ci ricordiamo della definizione di uguaglianza di numeri reali otterremo proprio che tali rapporti sono uguali, ovvero che $\mathcal{A} : \mathcal{B} = \mathcal{A}' : \mathcal{B}'$.

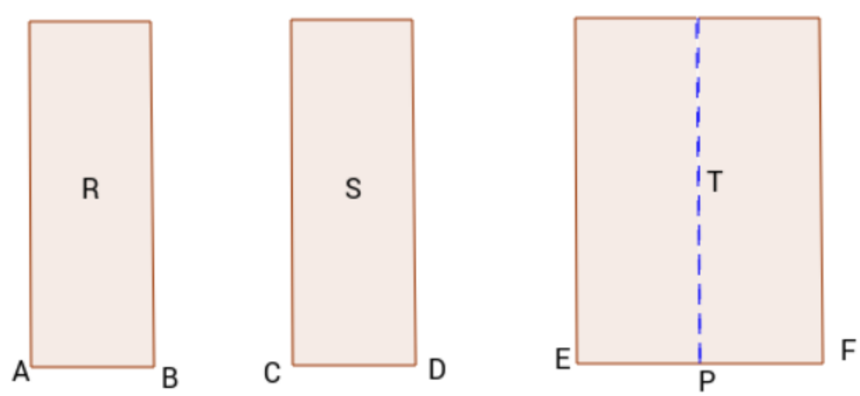
c.v.d.

Come applicazione determiniamo le misure delle aree dei parallelogrammi, dei trapezi o dei triangoli, a partire dalle misure di alcuni lati e di altezze opportunamente prese.

3. Le aree dei principali poligoni convessi

PROPOSIZIONE 27. *I rettangoli aventi uguali altezze sono proporzionali alle rispettive basi.*

Dim.: Consideriamo tre rettangoli (R, S e T) le cui basi sono rispettivamente $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ ed $\overline{EF}$.



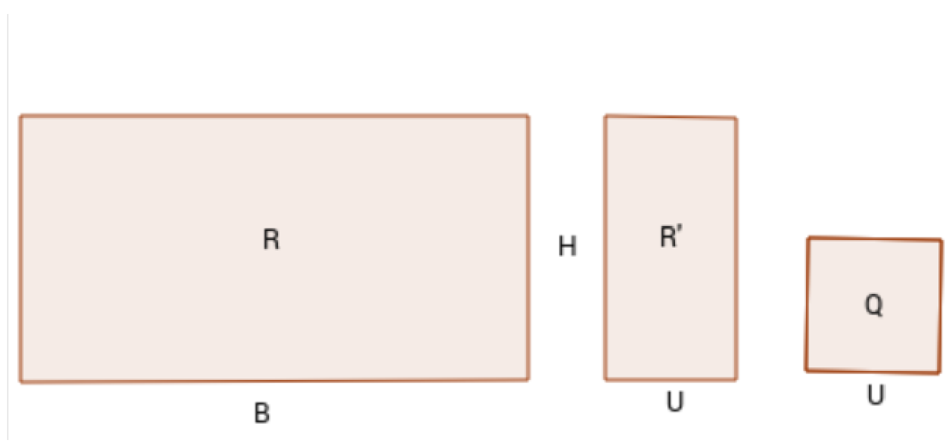
Notiamo che questi rettangoli sono in corrispondenza biunivoca con le rispettive basi. Ora verifichiamo se si può applicare il criterio generale di proporzionalità. Se avessimo $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, dato che le altezze sono uguali, allora i due rettangoli sarebbero congruenti [22] e quindi il primo punto del criterio è più che soddisfatto!
Se invece $\overline{EF} \cong \overline{AB} + \overline{CD}$, allora, preso un punto P compreso tra E ed F (sul segmento $\overline{EF}$) tale che $\overline{EP} \cong \overline{AB}$ (e quindi $\overline{PF} \cong \overline{CD}$), si avrebbe che il rettangolo di base $\overline{EF}$, ovvero T, si ottiene come somma dei due rettangoli R e S : questo verifica la seconda condizione del criterio [23]. Quindi si ha che $R : S = \overline{AB} : \overline{CD}$ ed ancora $S : T = \overline{CD} : \overline{EF}$. Quanto desiderato!

c.v.d.

Dato che, in un rettangolo, i termini "base" ed "altezza" sono interscambiabili, allora vale un teorema analogo, con una dimostrazione simile, che afferma *"i rettangoli aventi basi congruenti, sono direttamente proporzionali alle rispettive altezze".*

PROPOSIZIONE 28. *L'area di un rettangolo è pari al prodotto della misura della base per quella dell'altezza.*

Dim.: Siano B ed H rispettivamente la base e l'altezza del rettangolo R. Consideriamo il rettangolo ausiliario R' di base uguale all'unità di misura U (rispetto alla quale si prende la lunghezza dei segmenti) e di altezza ancora H. Sia Q il quadrato di lato U (che poi è l'unità di misura che utilizziamo per le aree).



[22] Lo studente dica il perché.
[23] Alla somma delle basi corrisponde la somma dei rettangoli.

Il rettangolo R e quello ausiliario R', avendo uguale l'altezza, saranno direttamente proporzionali alle basi: perciò $R : R' = B : U$. D'altro canto anche Q ed R' hanno basi uguali e quindi sono proporzionali alle rispettive altezze, cioè $R' : Q = H : U$. Se indichiamo con b ed h le misure della base e dell'altezza del rettangolo [24] e con A ed A' le aree dei rettangoli R ed R' [25], avremo: $A : A' = b : 1$ ed anche $A : 1 = h : 1$. Questo significa che $A = A' \cdot b$ e $A' = h$. Sostituendo appropriatamente si ottiene $A = b \cdot h$.

c.v.d.

COROLLARIO 15. *Il quadrato ha area uguale al quadrato della misura del lato.*

Dim.: Non c'è proprio nulla da dimostrare.

$\diamond$

COROLLARIO 16. *L'area del parallelogramma è uguale al prodotto della misura della base per quella dell'altezza.*

Dim.: basta considerare che il parallelogramma è equivalente ad un rettangolo avente base ed altezza congruenti alle proprie.

c.v.d.

COROLLARIO 17. *L'area del triangolo è uguale al semiprodotto della misura della base per quella dell'altezza.*

Dim.: Basta osservare che il triangolo è equivalente ad un parallelogramma avente altezza uguale e base la metà della propria.

c.v.d.

COROLLARIO 18. *L'area di un trapezio è uguale al semiprodotto della somma delle misure delle basi per la misura dell'altezza.*

Dim.: si ricordi un trapezio è equivalente ad un triangolo avente base congruente alla somma delle basi del trapezio stesso ed eguale altezza.

c.v.d.

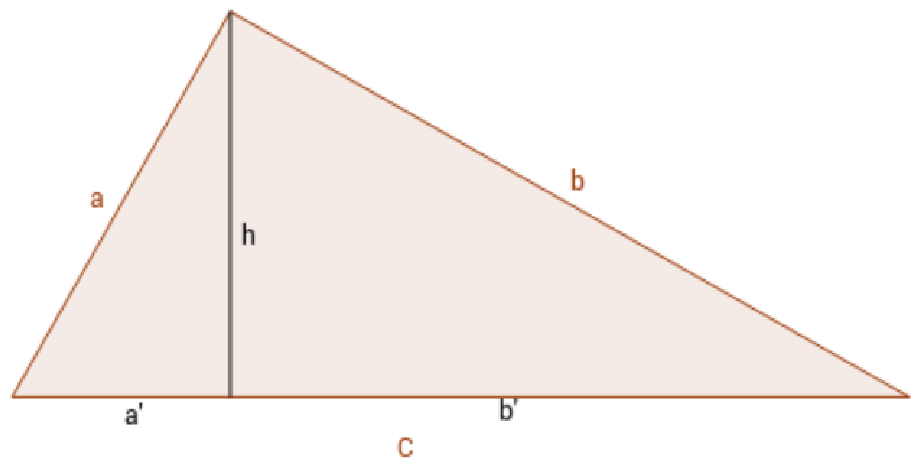
4. Teoremi di Euclide e di Pitagora sotto forma algebrica

Ricordandoci gli enunciati dei teoremi di Euclide e di Pitagora, chiamando la misura dell'ipotenusa del triangolo rettangolo c e dei cateti a e b, essendo h la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa

[24] Rispetto ad U.

[25] Rispetto a Q.

ed a' e b' le misure delle proiezioni dei cateti a e b, rispettivamente, sull'ipotenusa stessa, possiamo riformulare i teoremi nel seguente modo:



Teorema di Pitagora:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Primo Teorema di Euclide:

$$a^2 = a' \cdot c \quad \text{ed anche} \quad b^2 = b' \cdot c.$$

Secondo Teorema di Euclide:

$$h^2 = a' \cdot b'.$$

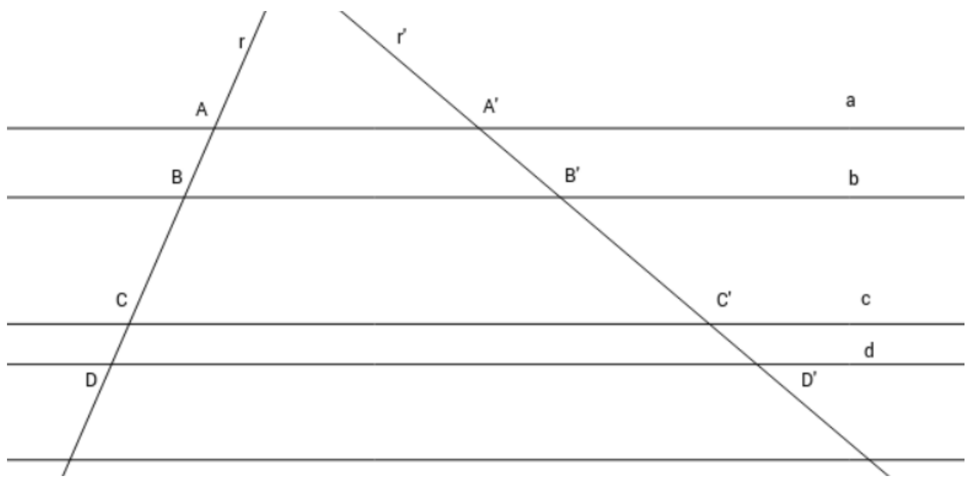
Come possiamo notare, tale formulazione è di tipo puramente algebrica e ci permette di trovare la misura di una delle tre grandezze espresse, conoscendo le altre due. Questo è un passaggio fondamentale: ***possiamo risolvere problemi di natura geometrica utilizzando formule di natura algebrica.*** In Matematica si usa normalmente questo trucco di trasformare un problema, che riguarda un particolare campo, in un altro che si trova in un'altra teoria: anzi, è tipico del matematico cercare di aggirare e risolvere i problemi in tale maniera!

5. Il Teorema di Talete

La squisitezza di un teorema non è solo nell'elegante semplicità dell'enunciato, ma anche (e forse soprattutto) nella sua potenza applicativa: il Teorema di Talete, da questo punto di vista, è spettacolare. Come esempio di applicazione porteremo la dimostrazione dei due *teoremi sulle bisettrici* degli angoli interni ed esterni di un triangolo (ottenute facilmente come corollari del *teorema dei supplementari,* il quale è esso stesso un corollario del teorema di Talete): tali dimostrazioni potrebbero essere fatte per via diretta, ma sarebbero molto più articolate e difficili!

Teorema 19 (Teorema di Talete [26]). *Il rapporto tra segmenti, staccati su una trasversale da un fascio di rette parallele, è costante qualsiasi sia la posizione assunta dalla trasversale stessa* [27].

Dim.:



Siano a, b, c e d le rette parallele ed r ed r' le trasversali [28]. Ricordiamo che se un segmento è preso su r, il corrispondente su r' è quello compreso fra le stesse rette parallele, per esempio: se $\overline{AB}$ è su r, il corrispondente su r' è $\overline{A'B'}$.
Notiamo che fra i segmenti di una trasversale ed i relativi corrispondenti si può stabilire una corrispondenza biunivoca. Se riuscissimo a stabilire

[26] In forma generale

[27] In alternativa e più classicamente si può enunciare come: "Se un fascio di rette parallele è tagliato da due trasversali, il rapporto di segmenti su una trasversale è uguale al rapporto dei segmenti corrispondenti sull'altra trasversale"

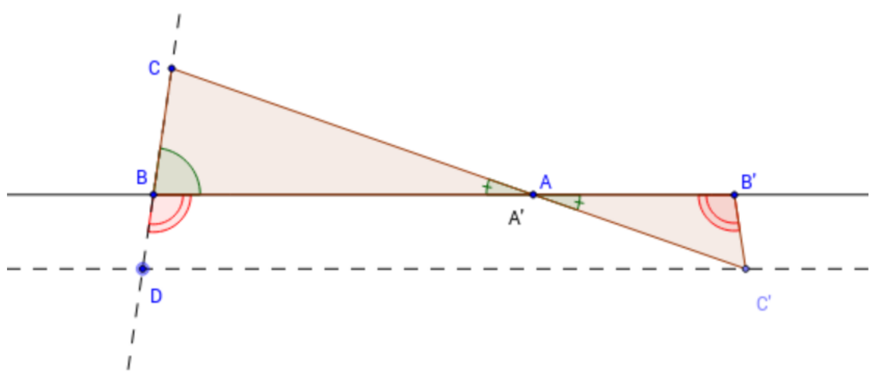
[28] Si può anche pensare che r' sia la retta r a cui è stata cambiata la posizione.

che a segmenti uguali su una trasversale corrispondono segmenti uguali sull'altra e che a somme di segmenti su una trasversale corrispondono le somme dei segmenti corrispondenti sull'altra, potremmo applicare il criterio generale di proporzionalità e finiremmo la dimostrazione. Ora il "piccolo Teorema di Talete" ci dice che effettivamente a segmenti uguali corrispondono segmenti uguali. Per vedere che vale anche la seconda condizione del criterio, supponiamo di considerare (ad esempio) $\overline{AB}+\overline{BC}$ e vediamo se effettivamente corrisponde $\overline{A'B'}+\overline{B'C'}$: ciò è vero, dato che $\overline{AB}+\overline{BC}$ è il segmento $\overline{AC}$, al quale corrisponde il segmento $\overline{A'C'}$, dato dalla somma di $\overline{A'B'}$ con $\overline{B'C'}$.

c.v.d.

Teorema 20 (Teorema dei supplementari). *Se due triangoli hanno un angolo congruente ed altri due supplementari, i lati opposti agli angoli uguali sono proporzionali ai lati opposti agli angoli supplementari.*

Dim.: Siano $\overline{ABC}$ ed $\overline{A'B'C'}$ i due triangoli; gli angoli in A ed A' siano congruenti e quelli in B e B' supplementari. Per comodità disegniamo i triangoli con i lati $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$ adiacenti (sovrapponiamo A con A') ed anche con $\overline{BA}$ adiacente ad $\overline{A'B'}$.



Sia D il punto d'incontro tra la parallela ad $\overline{AB}$ passante per C' ed il prolungamento del lato $\overline{CB}$ (dalla parte di B). Per il teorema di Talete sarà $\overline{BC}:\overline{BD}=\overline{AC}:\overline{A'C'}$. Ora, gli angoli $A\hat{B}D$ e $A'\hat{B}'C'$ sono supplementari dello stesso angolo $A\hat{B}C$ pertanto sono congruenti, inoltre anche gli angoli $B\hat{D}C'$ e $B'\hat{C}'D$ sono uguali [29], quindi il trapezio $\overline{BB'C'D}$ è isoscele (poiché ha i quattro angoli alla base uguali a coppia) e ne segue che $\overline{BD}\cong\overline{B'C'}$ [30]. Sostituendo nella proporzione trovata prima, si ricava che $\overline{BC}:\overline{B'C'}=\overline{AC}:\overline{A'C'}$, cioè la tesi.

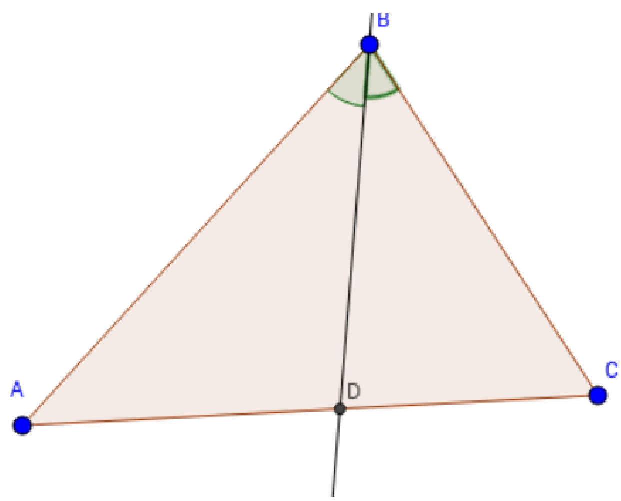
[29] Come mai?

[30] Il lettore attento dica come mai il trapezio risulta isoscele, da cui segue che i lati obliqui sono uguali.

c.v.d.

Teorema 21 (1^o Teorema della bisettrice). *In un triangolo qualsiasi, ogni bisettrice (di un angolo interno) divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.*

Dim.: Sia $\overline{ABC}$ il triangolo e $\overline{BD}$ la bisettrice (ad esempio dell'angolo in B).



I triangoli $\overline{ABD}$ e $\overline{DBC}$ hanno gli angoli in B uguali (per costruzione) e gli angoli $A\hat{D}B$ e $B\hat{D}C$ adiacenti (e quindi supplementari). Per il teorema precedente si avrà

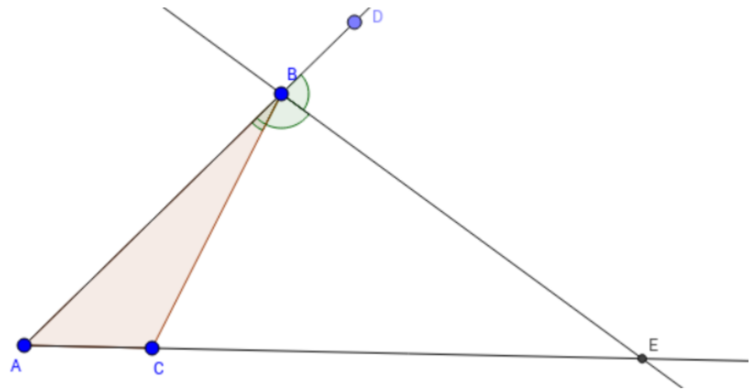
$$\overline{AD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{BC},$$

cioè la tesi!

c.v.d.

Teorema 22 (2^o Teorema della bisettrice). *A meno che non sia parallela, la bisettrice di un angolo esterno al triangolo incontra il prolungamento del lato opposto in un punto le cui distanze dagli estremi di quel lato sono proporzionali agli altri due lati.*

Dim.: Sia $\overline{ABC}$ un triangolo e $\overline{BE}$ la bisettrice dell'angolo $C\hat{B}D$ esterno al triangolo.



Il punto E sia il punto d'intersezione della bisettrice con il prolungamento del lato $\overline{AC}$. Gli angoli $A\hat{B}E$ ed $E\hat{B}D$ sono adiacenti (pertanto supplementari); dato che $C\hat{B}E$ è uguale (per costruzione) ad $E\hat{B}D$, vuol dire che anche $A\hat{B}E$ e $C\hat{B}E$ sono supplementari. Applichiamo il teorema dei supplementari ai triangoli $\overline{ABE}$ e $\overline{CBE}$ (l'angolo uguale è quello in E, che, tra l'altro, è in comune ad entrambi!). Possiamo quindi scrivere la proporzione

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AE} : \overline{CE},$$

ovvero la tesi.

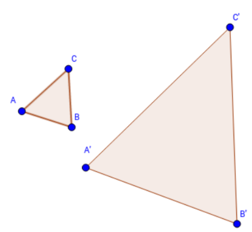
c.v.d.

CAPITOLO 7

La similitudine

In questo capitolo parleremo di un'altra importante relazione di equivalenza che prende il nome di *similitudine.* Detta terra-terra, figure simili significa che hanno la stessa “forma”, ma non necessariamente la stessa “misura”: sono simili, ad esempio, un triangolo ed una copia di esso rimpicciolita di un certo fattore; o ancora, un gli elementi di una foto con gli stessi elementi di un ingrandimento della foto stessa [1] . È, per altro, evidente che ci sono figure che sono sempre simili tra di loro: due quadrati, due circonferenze... altre, invece, che sono simili solo se fanno parte della stessa “famiglia” [2] . La definizione che daremo, per i poligoni convessi piani, è a prova di equivoci.

Definizione 41. *Due poligoni si dicono* simili *se hanno gli angoli ordinatamente congruenti ed i lati omologhi in proporzione.*



Per esempio, i triangoli $\overline{ABC}$ e $\overline{A'B'C'}$ della figura, hanno gli angoli in A, B e C uguali a quelli in A', B' e C' rispettivamente. Inoltre hanno i lati in proporzione: nel caso specifico, si può scrivere le seguente proporzione:

$$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AC} : \overline{A'C'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}.$$

Notiamo che per poligoni simili, deve anche essere costante il rapporto di due lati omologhi: chiamiamo tale rapporto, **rapporto di similitudine** [3].

Oss.: Due figure congruenti sono chiaramente simili, con rapporto di similitudine pari ad 1. Detto questo è giusto un'altra osservazione realizzare che la similitudine è una *relazione di equivalenza.*

---

[1] In gergo tecnico si sente dire spesso **effettuare uno zoom.**

[2] Diremo, più appropriatamente, *stanno nella stessa classe di equivalenza* di figure simili.

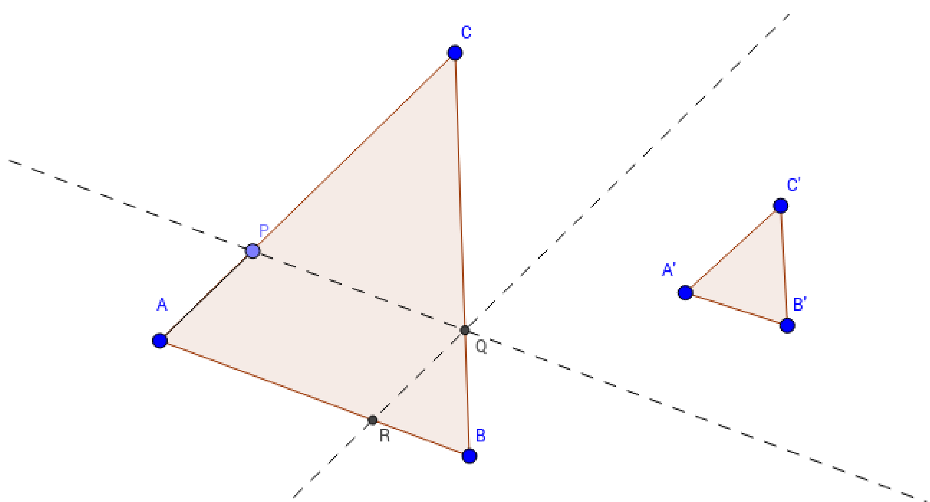
[3] In pratica, due poligoni simili non sono altro che un ingrandimento l'uno dell'altro!

1. Criteri di Similitudine per triangoli

Per i triangoli, come fatto già per lo studio della congruenza, introduciamo *criteri* per stabilire se sono simili. Anche nel caso della similitudine i criteri sono tre e li dimostreremo qui di seguito, non prima di aver raccomandato di riguardarsi bene l'enunciato del Teorema di Talete, dato che questi criteri sono una conseguenza, più o meno diretta, di quel teorema.

TEOREMA 23 (1^o Criterio di Similitudine). *Due triangoli sono simili se hanno due angoli ordinatamente congruenti.*

Dim.: Siano $\overline{ABC}$ ed $\overline{A'B'C'}$ i due triangoli con gli angoli in A e A', B e B' congruenti.



Intanto osserviamo che gli angoli in C e C' sono tra loro congruenti. Basta quindi dimostrare che i lati omologhi sono in proporzione. Se i lati $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$ fossero congruenti, per il secondo criterio di congruenza, anche i triangoli sarebbero congruenti (e quindi simili). Supponiamo piuttosto che $\overline{AC} > \overline{A'C'}$ (il caso dell'altra uguaglianza è del tutto analogo). Esisterà un punto P compreso tra A e C per cui $\overline{CP} \cong \overline{A'C'}$. Non sarà difficile, per lo studente, convincersi che i triangoli $\overline{A'B'C'}$ e $\overline{CPQ}$ (dove Q è l'intersezione della parallela al lato $\overline{AB}$, passante per P, con il lato $\overline{BC}$) sono congruenti [4]. Perciò si ha che $\overline{PQ} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{CP} \cong \overline{A'C'}$ e $\overline{CQ} \cong \overline{B'C'}$. D'altro canto, per il **Teorema di Talete,** si ha la seguente proporzione:

$$\overline{AC} : \overline{CP} = \overline{BC} : \overline{CQ},$$

[4] Ne fornisca la dimostrazione

e sostituendo le grandezze uguali trovate prima, si ha proprio

$$\overline{AC} : \overline{A'C'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}.$$

Se consideriamo ora la parallela al lato $\overline{AC}$, passante per Q (chiamando R il punto d'intersezione di questa con il lato $\overline{AB}$), otterremo

$$\overline{AB} : \overline{AR} = \overline{BC} : \overline{CQ};$$

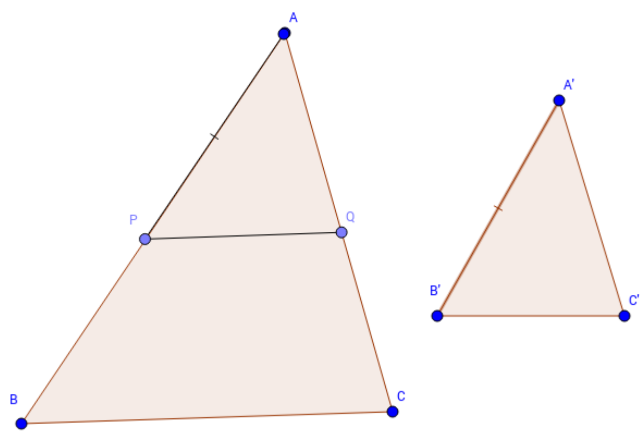
visto che $\overline{APQR}$ è un parallelogramma, $\overline{PQ} \cong \overline{AR}$, e quindi anche

$$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}.$$

c.v.d.

Teorema 24 (2^o Criterio di Similitudine). *Due triangoli sono simili se hanno due lati ordinatamente proporzionali e gli angoli tra essi compresi congruenti.*

Dim.: Siano $\overline{ABC}$ e $\overline{A'B'C'}$ triangoli con gli angoli in A ed A' congruenti e per i quali valga la proporzione $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AC} : \overline{A'C'}$.



Se $\overline{AB}$ ed $\overline{A'B'}$ fossero uguali avremmo finito, dato che dalla proporzione risulterebbe che anche $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ ed i triangoli sarebbero addirittura congruenti. Supponiamo (senza ledere alla generalità della dimostrazione) che $\overline{AB} > \overline{A'B'}$: esisterà dunque una corda dell'angolo in A (parallela al lato opposto all'angolo) tale che, detti P e Q i suoi estremi rispettivamente sui lati $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, si abbia $\overline{AP} \cong \overline{A'B'}$. Applicando il primo criterio ai triangoli $\overline{ABC}$ ed $\overline{APQ}$, si ottiene che essi sono simili e quindi $\overline{AB} : \overline{AP} = \overline{AC} : \overline{AQ}$. Se sostituiamo $\overline{AP}$ a posto di $\overline{A'B'}$ nella proporzione nell'ipotesi del teorema, si ottiene $\overline{AB} : \overline{AP} = \overline{AC} : \overline{A'C'}$. Confrontando questa proporzione con quella di prima si arguisce che $\overline{AQ} \cong \overline{A'C'}$. Quindi anche i triangoli $\overline{APQ}$

ed $\overline{A'B'C'}$ sono simili, dato che sono congruenti per il primo criterio. Per transitività sono simili i triangoli $\overline{ABC}$ ed $\overline{A'B'C'}$.

c.v.d.

TEOREMA 25 (3^o Criterio di Similitudine). *Due triangoli sono simili se hanno i lati ordinatamente proporzionali.*

Dim.: Facendo riferimento alla figura della dimostrazione del secondo criterio di similitudine, immaginiamo che

$$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AC} : \overline{A'C'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}.$$

Se uno dei lati ha un omologo congruente, data l'ipotesi, tutti i lati dei triangoli sarebbero ordinatamente uguali, sicché, per il terzo criterio di congruenza, i triangoli sarebbero addirittura congruenti. Supponiamo, per fissare le idee (senza ledere alla generalità), che $\overline{AB} > \overline{A'B'}$. Si consideri su $\overline{AB}$ il segmento $\overline{AP} \cong \overline{A'B'}$: il triangolo $\overline{APQ}$ (ottenuto tracciando la parallela a $\overline{BC}$, passante per P, essendo Q l'intersezione con il lato $\overline{AC}$) è simile al triangolo $\overline{ABC}$ (sempre per il primo criterio). Perciò

$$\overline{AB} : \overline{AP} = \overline{AC} : \overline{AQ} = \overline{BC} : \overline{PQ}.$$

Sostituendo $\overline{AP}$ ad $\overline{A'B'}$ nella proporzione iniziale (quella nella ipotesi del teorema) si ha, però, anche

$$\overline{AB} : \overline{AP} = \overline{AC} : \overline{A'C'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}.$$

Confrontando le due proporzioni ottenute, si può giungere alla conclusione che $\overline{AQ} = \overline{A'C'}$ e $\overline{PQ} = \overline{B'C'}$. Dunque il triangolo $\overline{A'B'C'}$ è congruente (e quindi simile) ad $\overline{APQ}$, ma questo è simile ad $\overline{ABC}$ e perciò, per la transitività, si ottiene la tesi.

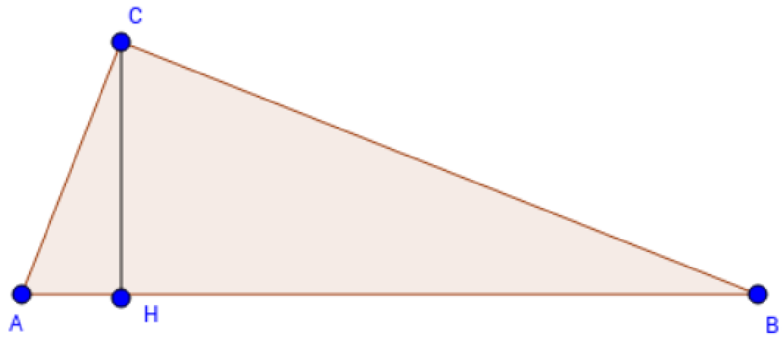
c.v.d.

2. Riformulazione dei Teoremi di Euclide.

I Teoremi di Euclide, che abbiamo dimostrato nell'ambito della teoria dell'equivalenza, trovano una naturale collocazione anche nel mondo della teoria delle proporzione e quindi, in ultima analisi, della similitudine: addirittura la formulazione, in termini di proporzioni, risulta molto più facile da fare e "quasi banale" da dimostrare, considerando le figure simili per come indicato nelle dimostrazioni che seguono. Questo perché, sullo sfondo [5] , stiamo utilizzando il "potente" Teorema di Talete.

[5] Se vogliamo essere chic: "in background"

TEOREMA 26 (1^o Teorema di Euclide). *In ogni triangolo rettangolo ciascun cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la sua proiezione sull'ipotenusa stessa.*



Dim.: Detta $\overline{CH}$ l'altezza relativa all'ipotenusa $\overline{AB}$, si ottiene che i triangoli $\overline{ABC}$ ed $\overline{AHC}$ sono simili per il primo criterio (un angolo in comune più un altro retto per entrambi); perciò hanno i lati, opposti agli angoli uguali, in proporzione:

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{AH}$$

ancora uguale al rapporto $\overline{BC} : \overline{CH}$. La proporzione scritta al centro del rigo costituisce proprio la tesi!

c.v.d.

TEOREMA 27 (2^o Teorema di Euclide). *In ogni triangolo rettangolo, l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa stessa.*

Dim.: Consideriamo sempre la figura disegnata nella dimostrazione precedente. I triangoli $\overline{AHC}$ e $\overline{BCH}$ sono simili per il primo criterio (hanno, ciascuno, un angolo retto e gli angoli $A\hat{C}H$ e $H\hat{B}C$ congruenti perché complementari entrambi dell'angolo $H\hat{C}B$). Segue dunque $\overline{AC} : \overline{BC}$ ancora uguale a questi altri due rapporti

$$\overline{AH} : \overline{CH} = \overline{CH} : \overline{BH}.$$

Questa proporzione centrata nel rigo è la tesi del teorema!

c.v.d.

Parte 2

Aritmetica ed Algebra

CAPITOLO 8

Teoria degli Insiemi

Abbiamo già incontrato insiemi di varia natura nella prima parte di questo libro, avendo anche detto che essi sono *Enti Pimitivi* e quindi non possono essere definiti, dato che ogni tentativo di farlo coinvolgerebbe, nella definizione stessa, un sinonimo od equivalente-logico dell'oggetto stesso da definire. Pertanto noi tutti già sappiamo cosa sia un insieme e possiamo, tutt'al più, introdurre una terminologia opportuna, operazioni e definizioni di ulteriori oggetti che rientrano all'interno della teoria insiemistica stessa. Ci sono alcuni sinonimi di *insieme* che potranno tornare utili e, comunque, potremmo utilizzare nel corso della trattazione, essi sono: *collezione, classe, riunione.* Per indicare un insieme, in genere utilizziamo una lettera maiuscola, ad esempio A, B, S ecc.. Ora, dato un insieme A, possiamo dire come esso è formato, indicando cosa c'è in esso; per cui possiamo dire che gli insiemi sono costituiti da *elementi* che *appartengono* al dato insieme e lo individuano. Ci sono essenzialmente due modi per individuare un insieme tramite gli elementi che gli appartengono: il primo consiste nell'elencare tutti gli elementi, racchiudendoli tra due parentesi graffe [1], per esempio sia A l'insieme con gli elementi "penna", "gomma", "albero", allora scriveremo

$$A = \{\text{albero, gomma, penna}\}.$$

Il problema però potrebbe sorgere nel momento in cui volessimo indicare un insieme a cui appartiene un numero enorme di elementi o, addirittura, un numero infinito di elementi [2]. Per esempio, consideriamo l'insieme costituito da tutte le stelle ed i pianeti dell'universo. Non sappiamo nemmeno quanti siano tali "oggetti", figuriamoci se possiamo elencarli tra parentesi graffe! Ed allora potremmo utilizzare il secondo modo che consiste nel dare la *proprietà caratteristica* degli elementi dell'insieme che vogliamo considerare. Chiaramente una proprietà caratteristica deve essere tale che *tutti* gli elementi di quell'insieme abbiano la detta proprietà. Nel caso dell'esempio di cui prima, potremmo

[1] In Matematica, quando si utilizzano le parentesi graffe, significa che non è importante l'ordine con cui compaiono le scritture messe tra esse.

[2] Sulla nozione di infinità ci intratterremo più diffusamente in seguito.

scrivere che l'insieme S è costituito da tutti gli elementi (uno dei quali indichiamo genericamente con una lettera a piacere, di solito una x) che sono o stelle o pianeti dell'universo:

$$S = \{x | x \text{ è stella o } x \text{ è pianeta nell'universo}\}.$$

Letteralmente la scrittura precedente si dovrebbe leggere così: "S è l'insieme degli elementi x tali che x è stella o x è pianeta nell'universo". Come simbologia introduciamo anche le seguenti: se a è un elemento di A, allora scriveremo anche $a \in A$ dove questo simbolo "$\in$" si legge *appartiene.* Inoltre, se un insieme S è formato con solo alcuni elementi di un insieme A e soltanto con quelli, allora diremo che S è un *sottoinsieme* di A e scriveremo $S \subseteq A$, potendosi anche dire che S è incluso in A.

> *Bisogna porre molta attenzione nell'utilizzo dei giusti simboli: un elemento* appartiene *ad un dato un insieme, un insieme può essere, al più,* incluso *in un altro insieme!*

Ad esempio, se $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{a, c, e\}$ possiamo dire che $c \in A$ ma non che $c \subseteq A$, così come si può dire che $B \subseteq A$ ma non certo che $B \in A$ pur essendo esso costituito da tutti e soli elementi che appartengono anche ad A. Bisogna pure stare attenti che se in B ci fosse un elemento che non sta in A, allora B non è comunque un sottoinsieme di A. In genere, per indicare la negazione di una appartenenza o di una inclusione, basta sbarrare il simbolo opportuno: ad esempio, per scrivere che un elemento non appartiene ad un dato insieme, usiamo il simbolo: "$\notin$", mentre $\nsubseteq$ sta per "non è incluso in (o non è sottoinsieme di) ".

Infine utilizziamo i seguenti importantissimi e frequentemente utilizzati due simboli: "$\forall$" che significa *per ogni* ovvero "qualsiasi sia l'elemento dato nell'insieme" e "$\exists$" che si legge *esiste.*

1. Prime operazioni tra insiemi

Consideriamo due insiemi, A e B. La prima operazione "naturale", che verrebbe in mente di fare è prendere tutti gli elementi dell'uno e dell'altro insieme e riunirli in un nuovo -possibilmente più grande [3]- insieme a cui daremo il nome di *unione* degli insiemi A e B. Nel

[3]Non è detto che il nuovo insieme sia effettivamente più grande!

linguaggio della Matematica l'unione si indica con il simbolo " $\cup$ " e quindi scriveremo:

$$A \cup B = \{x | x \in A \,\mathrm{o}\, x \in B\}.$$

La prima importante osservazione da fare è che abbiamo utilizzato il "connettivo logico" **o** e non la più comune e spesso fraintesa **e**: il motivo è che gli elementi dell'insieme unione devono stare in A e in B (quindi contemporaneamente nei due insiemi!), ma potrebbero stare anche in A ma non in B ed in B ma non in A. La seconda importante osservazione è che se uno dei due insiemi, per esempio A, è sottoinsieme dell'altro insieme B, allora l'unione coincide esattamente con l'insieme B e quindi, non abbiamo ottenuto -effettivamente- un nuovo insieme più grande! Ovvero abbiamo osservato quanto la seguente scrittura dice:

$$\text{se} \quad A \subseteq B, \quad \text{allora} \quad A \cup B = B.$$

Per il seguito, introduciamo anche il simbolo matematico "$\Rightarrow$", molto utile e sfruttato, di implicazione e, a posto di scrivere "se .. allora ..", semplifichiamo il tutto riscrivendo [4]

$$A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad A \cup B = B.$$

Un insieme che viene formato prendendo tutti e soli gli elementi in comune tra gli insiemi A e B si chiama *intersezione* degli insiemi A e B. Il simbolo assegnato dai Matematici all'intersezione è il seguente " $\cap$, " per cui scriveremo:

$$A \cap B = \{x | x \in A \,\mathrm{e}\, x \in B\}.$$

Esempio: se $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{c, d, e, f, g\}$ allora

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

mentre

$$A \cap B = \{c, d\}.$$

L'altra importante operazione tra insiemi è la *differenza,* indicata con il simbolo " $\smallsetminus$ ". Per effettuare la differenza tra l'insieme B e l'insieme A, bisogna eliminare dall'insieme B, tutti gli elementi che compaiono anche in A: bisogna fare attenzione, che se un elemento di A non è presente in B, esso non lo si può certo eliminare né, tanto meno, inserirlo in B.

[4] È importante capire che in Matematica si cerca di eliminare il più possibile tutto ciò che è "non essenziale" e si tende a rendere idee e ragionamenti il più semplice possibile.

Osserviamo che fare la differenza di A e B non è lo stesso di fare la differenza di B ed A. Dopo la definizione in simboli matematici, faremo un esempio chiaro di quanto stiamo affermando.

$$B \smallsetminus A = \{x | x \in B \,\mathrm{e}\, x \notin A\}.$$

Esempio: Nel caso degli insiemi dati prima, $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{c, d, e, f, g\}$, allora

$$B \smallsetminus A = \{e, f, g\}$$

mentre

$$A \smallsetminus B = \{a, b\}.$$

Spesse volte, la differenza tra insiemi è anche chiamata, molto opportunamente, *complementazione* di un insieme rispetto all'altro. Il *complementare* indica, infatti, ciò che sta "fuori" da un dato insieme. Nel caso -ad esempio- di $B \smallsetminus A$ noi stiamo indicando proprio ciò che non appartiene ad A ma sta in B e quindi, in un certo senso, che "sta fuori" da A, ma relativamente all'insieme B. Molto importante è il caso in cui B rappresenta tutti gli elementi del discorso che si sta facendo, nel qual caso diremo che B è l'insieme *universo,* generalmente indicato con $\mathcal{U}$; allora $\mathcal{U} \smallsetminus A$ si chiamerà semplicemente *il complementare* di A e si indicherà più facilmente con A^c.

2. Le Leggi di "de Morgan"

Diremo che due insiemi sono uguali se hanno gli stessi elementi, ovvero, più precisamente, se tutti gli elementi dell'uno sono anche elementi dell'altro e viceversa: in pratica, per verificare che $A = B$, basta dimostrare che A è sottoinsieme di B e B è sottoinsieme di A. Introduciamo il simbolo "$\Leftrightarrow$" con ovvio significato di implicazione nei due versi, ovvero che la prima affermazione implica la seconda e la seconda implica la prima; allora dire che due insiemi sono uguali equivale a dire

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \quad \mathrm{e} \quad B \subseteq A.$$

D'altra parte, per verificare che un insieme A è sottoinsieme di un altro insieme B, basta far vedere che un qualsiasi elemento dell'insieme A è anche elemento di B; infatti, data l'arbitrarietà della scelta dell'elemento di A, questo vuol dire che tutti gli elementi di A sono anche elementi di B.

Le Leggi di de Morgan sono una "cartina tornasole" per capire se si è inteso bene il significato delle operazioni insiemistiche ed uguaglianza tra insiemi. A parte che saranno molto utili per coloro che avranno a che fare con la programmazione sugli elaboratori, o la costruzione di circuiti elettronici, noi le dimostreremo come utile esercizio di comprensione, appunto, delle operazioni insiemistiche finora introdotte.

TEOREMA 28 (Leggi di de Morgan). *L'unione dei complementari di due insiemi è uguale al complementare della intersezione degli insiemi dati e il complementare dell'unione di due insiemi è uguale all'intersezione dei complementari degli insiemi stessi. In forma più concisa e comprensibile, in linguaggio simbolico matematico:*

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Dim.: Consideriamo un elemento generico x appartenente all'insieme $A^c \cup B^c$. Cosa significa che x sta nel complementare di A unione complementare di B? significa essenzialmente che non appartiene ad A e non deve stare nemmeno in B! quindi non può certo essere nell'intersezione di A e B e questo implica che deve stare “fuori” da tale intersezione, ovvero appartiene al complementare dell'intersezione dei due insiemi. Abbiamo appena dimostrato che

$$A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c.$$

Ora consideriamo un elemento generico y di $(A \cap B)^c$. Quindi y non sta in $A \cap B$ e questo significa che non sta in almeno uno degli insiemi A o B. Ergo, appartiene al complementare di almeno uno degli insiemi A o B: sicuramente, quindi, appartiene all'unione dei complementari di tali insiemi, ovvero abbiamo dimostrato che

$$(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c.$$

La dimostrazione dell'altra legge si lascia come esercizio.

c.v.d.

Ora riscrivere in forma simbolica la prima parte del ragionamento testé fatto: così da esercitarci con l'utilizzo del lessico matematico, lasciando la seconda parte della dimostrazione, da tradurre, come esercizio per lo studente volenteroso.

$$\begin{aligned} & x \in A^c \cup B^c \\ \Rightarrow \quad & x \in A^c \quad \text{o} \quad x \in B^c \\ \Rightarrow \quad & x \notin A \quad \text{o} \quad x \notin B \\ \Rightarrow \quad & x \notin A \cap B \\ \Rightarrow \quad & x \in (A \cap B)^c \\ \Rightarrow & A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c. \end{aligned}$$

3. Ulteriori operazioni tra insiemi

A parte le operazioni naturali di unione, intersezione e complementazione, che comunque "non producono" effettivamente insiemi significativamente diversi da quelli di partenza, operando sempre con gli elementi già noti degli insiemi di partenza, per fare effettivamente un grosso progresso nella costruzione di sistemi numerici e nello studio della Matematica, si deve introdurre una nuova operazione, se vogliamo anche piuttosto banale, che però ha notevoli conseguenze sotto molti punti di vista. Iniziamo col definire il *prodotto cartesiano* tra due insiemi A e B, indicato con $A \times B$ l'insieme di tutti gli abbinamenti degli elementi di A con quelli di B, presi in ordine: ovvero il primo elemento sarà sempre di A ed il secondo sempre uno di B. Per cui scriveremo:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, \, b \in B\}.$$

Ora, tra tutti gli abbinamenti possibili, ovvero tra tutti gli elementi del prodotto cartesiano, possiamo stabilire di scegliere solo alcuni secondo delle regole ben precise. In Matematica, quando si costruisce un insieme scegliendo solo alcuni elementi del prodotto cartesiano, si dice che si trova un *relazione* [5] . Per cui, definiamo *Relazione* semplicemente **un sottoinsieme del prodotto cartesiano:** ovvero un insieme $\mathcal{R}$ incluso in $A \times B$. Beninteso: nulla vieta che B sia proprio uguale ad A, potendo così formare il prodotto $A \times A$. Di relazioni ne esistono, chiaramente, tante quante ne vogliamo, dato che basta anche un solo sottoinsieme di $A \times B$ per ottenerne una, comunque alcune relazioni godono di proprietà particolari molto importanti. Principalmente distinguiamo tre tipi di relazioni, a seconda delle proprietà cui soddisfano, e sono:

(1) Relazione funzionale,

[5] Noi abbiamo già introdotto il concetto di relazione nella prima parte di questo libro, quando abbiamo affrontato lo studio della geometria euclidea: conviene meditare sul fatto che quanto diremo è solo una precisazione ulteriore, in termini più formali, di quello che abbiamo detto e scritto prima.

(2) Relazione d'ordine,
(3) Relazione di equivalenza.

Una relazione funzionale o, semplicemente, una *funzione* si ha quando il secondo elemento dell'abbinamento è univocamente determinato dal primo: questo significa che, per qualsiasi coppia (a, b), l'elemento b è unico rispetto all'elemento a. Come dire: una volta che conosci a, è come se conoscessi anche b. Le funzioni saranno argomento di studio negli anni successivi al primo biennio.

Per quanto riguarda le altre due relazioni, rimandiamo alla lettura di quanto scritto nel capitolo 3 sez. 1. Piuttosto riscriviamo le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva in termini di sottoinsieme del prodotto cartesiano. Sia $\mathcal{R}$ una relazione definita tra gli elementi dell'insieme A, ovvero $\mathcal{R} \subseteq A \times A$, per ogni gruppo di elementi $a, b, c \in A$ diremo che $\mathcal{R}$ è:

a) Riflessiva: se $(a, a) \in \mathcal{R}$.
b) Simmetrica: se $(a, b) \in \mathcal{R} \implies (b, a) \in \mathcal{R}$.
c) Transitiva: se $(a, b) \in \mathcal{R}$ e $(b, c) \in \mathcal{R} \implies (a, c) \in \mathcal{R}$.

Enfatizziamo le negazioni delle tre proprietà elencate or ora che diventano, nello specifico:

a) *Antiriflessività,*: $\forall x \in A$, $(x, x) \notin \mathcal{R}$.
b) *Antisimmetricità,*: se $(x, y) \in \mathcal{R} \implies (y, x) \notin \mathcal{R}$.
c) *Antitransitività,*: se (x, y) e $(y, z) \in \mathcal{R} \implies (x, z) \notin \mathcal{R}$.

Ricordiamo quindi che una *relazione d'equivalenza* deve godere delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva; una *relazione d'ordine* possiede le proprietà antisimmetrica e transitiva e, se gode anche della proprietà antiriflessiva, si dirà di "ordine stretto".

Vale la pena sottolineare che le proprietà appena descritte devono valere per qualsiasi elemento (coppia in $\mathcal{R} \subseteq A \times B$) si vada a considerare all'interno della relazione: basta anche un solo elemento che sfugge alla verifica della proprietà considerata e la relazione stessa non godrà di tale proprietà!

Esempio: Sia A l'insieme degli alunni della tua Classe. Possiamo considerare il prodotto $A \times A$, ovvero tutti gli abbinamenti di allievi possibili ed immaginabili. Ora selezioniamo gli abbinamenti "giusti" secondo la regola: in $\mathcal{R}$ mettiamo gli abbinamenti in cui l'allievo a, della coppia (a, b), ha lo stesso colore degli occhi dell'allievo b. È chiaro che in questo modo l'abbinamento (a, a), qualsiasi sia $a \in A$ dovrà esserci, dato che ogni allievo ha *lo stesso colore degli occhi di se stesso!* Inoltre, se in $\mathcal{R}$ mettiamo la coppia (a, b), allora sicuramente ritroveremo anche la coppia (b, a), poiché se a ha lo stesso colore degli occhi di b, allora b deve avere lo stesso colore degli occhi di a. D'altra parte è facile vedere che se la relazione contiene le coppie (a, b) e (b, c), allora dovrà contenere anche la coppia (a, c) [6].

Esempio: Sia A, al solito, l'insieme formato dagli alunni della tua Classe. Consideriamo il prodotto $A \times A$ e la relazione che seleziona abbinamenti se "l'elemento a è più alto dell'elemento b". In questo caso, come esercizio, si può verificare che la relazione è antiriflessiva, antisimmetrica e transitiva, ovvero è una relazione di ordine stretto.

3.1. L'insieme quoziente. [7] Sia A un insieme su cui è definita una relazione d'equivalenza $\sim$. Consideriamo i sottoinsiemi di A formati da elementi tutti equivalenti tra di loro. Tali insiemi si chiamano *classi di equivalenza.* Le classi equivalenza, prese assieme, formano un insieme che si chiama *insieme quoziente* e si indica con $A_{/\sim}$. Si dice anche che l'insieme A è stato quozientato *modulo* la relazione $\sim$. Cosa ha di speciale questo insieme quoziente? Intanto, sebbene sia vero che le classi di equivalenza siano formate da elementi di A, l'insieme quoziente non è più formato da tali elementi! In effetti gli elementi di $A_{/\sim}$ sono le classi di equivalenza, quindi abbiamo -di fatto- costruito un nuovo insieme con elementi diversi da quelli di partenza. Inoltre, si può verificare facilmente che, le classi di equivalenza, viste come sottoinsiemi di A, sono a due a due disgiunte (ovvero hanno intersezione vuota) ed "esauriscono" completamente A, nel senso che tutti gli elementi di A si devono trovare in una qualche classe di equivalenza e soltanto in una di essa! Questo significa che un elemento qualsiasi della classe d'equivalenza può fungere da rappresentate dell'intera classe. Si dice, molto appropriatamente, che la relazione posta su A ha *ripartito* l'insieme. Anche se il discorso può sembrare piuttosto astruso e poco utile, in effetti è un modo di procedere che nella pratica scientifica si utilizza spesso: per esempio, ogni "classificazione" procede esattamente col porre una relazione di equivalenza sull'insieme degli oggetti che si vogliono classificare e poi con la ripartizione di tali elementi, mettendo tutti quelli che hanno quella particolare richiesta in comune [8], in uno stesso insieme. Più chiaramente, si pensi alla classificazione degli esseri viventi in "mammiferi", "rettili", ecc.. oppure ancora la distinzione

[6] Dire il perché come esercizio.

[7] Quanto segue è stato già studiato nel capito 3, si può leggere come utile ripetizione di quanto scritto colà, oppure saltare a piè pari se l'argomento è chiaro e vivo in memoria.

[8] Ovvero la relazione che li accomuna.

tra "erbivori", "carnivori". Procediamo ora con qualche esempio più evidente. Premettiamo che le *classi di equivalenza* si indicano con $[a]$ dove a è un elemento della classe qualsiasi.

Esempio: Sia A l'insieme degli alunni di una Classe di qualche scuola. Consideriamo la relazione d'equivalenza [9] $\sim$ consistente in "abitare nello stesso paese/città". Ora, prendiamo l'elenco della Classe e leggiamo:

1) Aloi Pietro, Catanzaro
2) Altomare Luca, Taverna
3) Belli Mario, Taverna
4) Corea Francesco, Albi
5) Lepre Mario, Catanzaro
6) Loprete Marco, Catanzaro
7) Marino Giuseppe, Catanzaro
8) Puccio Luca, Marcellinara
9) Rotella Antonio, Catanzaro
10) Sella Luigi, Albi
11) Tarantino Lucio, Taverna. [10]

A questo punto, data la relazione di cui prima, possiamo scrivere esplicitamente le classi di equivalenza seguenti:

[Aloi Pietro] = {Alori Pietro, Lepre Mario, Loprete Marco, Marino Giuseppe, Rotella Antonio},

[Altomare Luca] = {Altomare Luca, Belli Mario, Tarantino Lucio},

[Corea Francesco] = {Corea Francesco, Sella Luigi},

[Puccio Luca] = {Puccio Luca}.

L'insieme quoziente è dato da

$$A_{/\sim} = \{[Aloi\,P.], [Altomare\,L.], [Corea\,F.], [Puccio\,L.]\}.$$

È notevole osservare che tale insieme non è altro, riscritto in modo più complicato, che l'insieme dei paesi/città di provenienza: infatti quando consideriamo un rappresentante qualsiasi della classe di equivalenza di Aloi Pietro, immediatamente sappiamo che stiamo indicando uno che viene da Catanzaro. Così come, essendo Puccio Luca l'unico proveniente da Marcellinara, quando parliamo di lui, stiamo indicando

[9] Si invita a dimostrare che questa è una relazione di equivalenza.

[10] Nomi di mera fantasia, chiaramente.

proprio Marcellinara. In definitiva, l'insieme quoziente è identificabile con l'insieme dei paesi di provenienza.

In genere la situazione viene presentata tramite un *diagramma commutativo:* indicando con A e $\sim$ l'insieme degli alunni e la relazione, rispettivamente, date nell'ultimo esempio, con p la funzione che associa ad ogni alunno la sua città di provenienza; ancora con C l'insieme delle città di provenienza e con π la "proiezione" di un insieme sul suo "insieme quoziente" allora si hanno i seguenti due diagrammi, il secondo scritto per elementi.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"] & C \arrow[dl, "="] \\ A_{/\sim} & \end{tikzcd} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{tikzcd} \text{alunno} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"] & \text{città} \arrow[dl, "="] \\ [\text{alunno}] & \end{tikzcd}$$

4. La relazione funzionale

Ricordiamo, come detto in questo capitolo, che una relazione funzionale è un sottoinsieme del prodotto cartesiano in cui il secondo elemento dell'abbinamento è univocamente associato al primo. Quindi, sia $\mathcal{F} \subseteq A \times B$ la relazione funzionale introdotta sul prodotto cartesiano e consideriamo l'elemento tipico (a, b) in cui dato $a \in A$, l'elemento $b \in B$ corrisponde in modo unico. In considerazione del fatto che b è dato "in funzione" di a, si può anche scrivere

$$a \mapsto b$$

intendendo con questo esattamente che b è il corrispondente di a. Per indicare che tale corrispondenza dipende dalla relazione $\mathcal{F}$, possiamo anche premettere una f prima di tale corrispondenza e scrivere

$$f : a \mapsto b.$$

In effetti la f rappresenta quella che si chiama *legge funzionale,* che corrisponde alla regola di selezione degli abbinamenti giusti tra tutti quelli possibili. Per essere ancora più precisi, volendo anche indicare su quale insieme viene considerata la relazione funzionale, si scrive

$$f : A \to B,$$

indicando con ciò che la legge f assegna agli elementi di A, elementi di B e, per essere ancora più chiari, si scrive

$$\begin{aligned} f : \ & A \to B \\ & a \mapsto b \ = f(a). \end{aligned}$$

In particolare, spesso si sottintende tutto quello che precede e si scrive solo $b = f(a)$. Comunque non si dovrebbe mai fare a meno di tenere bene a mente quali siano gli insiemi “di partenza” (A) e di “arrivo” (B) [11]. Nel linguaggio delle funzioni, l’insieme A è chiamato *dominio* della funzione, mentre B è detto *codominio* e, come detto precedentemente, f è detta *legge* della funzione. Si osservi che per *funzione,* quindi, si intende la terna di elementi

$$(f, A, B)$$

e non solo la legge che dà la regola associativa (ovvero come abbinare nel modo giusto).

4.1. Proprietà delle funzioni. Data una funzione, il cui studio più approfondito è fatto negli anni terminali del corso di studio superiore, possiamo distinguere alcune caratteristiche molto importanti, che torneranno utili già dal prossimo capitolo. Diciamo che una funzione è *iniettiva* se mai avviene che due elementi del dominio abbiano come associato lo stesso elemento del codominio. Questo fatto si può esprimere in due modi diversi ma -logicamente- equivalenti. Siano x_1, x_2 elementi del dominio A, e consideriamo gli associati $f(x_1)$ e $f(x_2)$. Affinché avvenga quello che abbiamo testé detto, si dovrà avere:

$$\text{se} \quad x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

L’altro modo di dire (equivalente) è che se gli elementi associati sono gli stessi, allora provengono da un unico elemento (nel senso che i due ipotetici elementi diversi di A in effetti non erano diversi):

$$\text{se} \quad f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

L’altra proprietà che ci torna utile per il seguito è quando una funzione “occupa” tutto l’insieme codominio. Per essere più formali diciamo che una funzione è *suriettiva* se qualsiasi elemento di B è associato a qualche elemento di A. Anche questo si può riscrivere in formule, molto chiaramente, in tal guisa:

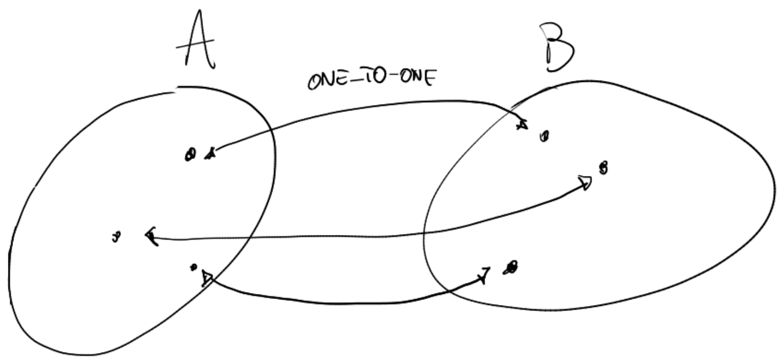
$$\forall\, b \in B \quad \exists\, a \in A \quad : \quad b = f(a).$$

Quando una funzione è suriettiva, si scrive anche che $B = f(A)$ nel senso che tutto l’insieme B è ottenuto associando elementi agli elementi dell’insieme A.

Una funzione che è sia iniettiva che suriettiva si chiama *funzione biunivoca* o *corrispondenza biunivoca.* Una breve, ma fondamentale, osservazione: le corrispondenze biunivoche sono tali che ad un elemento

[11] A breve si capirà il perché di tale raccomandazione!

di A corrisponda un unico elemento di B [12] e tutti gli elementi di B sono stati associati agli elementi di A [13]. Per cui si potrebbe addirittura "invertire" l'affermazione che agli elementi di A vengono associati elementi di B e dire che ad ogni elemento di B è stato associato in modo univoco un elemento di A. In pratica ad un elemento di A corrisponde un elemento di B e viceversa, a quel dato elemento di B corrisponde quell'unico elemento di A e, inoltre, tutti gli elementi di A sono associati ad uno solo tra gli elementi di B e tutti gli elementi di B hanno associato un solo elemento tra quelli di A. Non a caso, infatti, in inglese, tali corrispondenze vengono denominate *one-to-one.*



[12] Per via dell'iniettività.
[13] Per via della suriettività.

CAPITOLO 9

La costruzione degli insiemi numerici

Sebbene nella prima parte del libro abbiamo già adoperato i numeri naturali, come se già li conoscessimo "per natura", arrivando a costruire l'insieme delle frazioni e successivamente quello dei numeri reali, un po' come andava affermando Kronecker: "Die Ganzen Zahlen hat Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk", che tradotto significa "Dio ha creato i numeri interi, tutto il resto è opera dell'uomo" [1] , ora vogliamo procedere ad una costruzione di tutti gli insiemi numerici, che ci serviranno per il futuro, da un punto di vista "astratto", ovvero utilizzando unicamente gli argomenti del capitolo precedente attinente alla Teoria degli Insiemi. Iniziamo come i *numeri Naturali.*

1. L'insieme dei Numeri Naturali

Introduciamo, nella *Classe degli insiemi,* una relazione, denominata **equipotenza**, tale per cui un insieme S_1 è in relazione con un insieme S_2 se e solo se possono essere messi in corrispondenza biunivoca.

PROPOSIZIONE 29. *L'equipotenza è una relazione di equivalenza.*

Dim.: La proprietà riflessiva è banalmente verificata, dato che un insieme può essere messo in corrispondenza biunivoca con se stesso semplicemente facendo corrispondere ad ogni suo elemento, l'elemento stesso. Tale funzione, che associa gli elementi a se stessi, si chiama, in generale, *identità.* La proprietà simmetrica è anche banalmente verificata, dato che se l'insieme A può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme B, in modo tale che, se all'elemento generico $x \in A$ corrisponde l'elemento $y \in B$, allora [2] all'elemento generico $y \in B$, si fa corrispondere l'elemento $x \in A$. La transitività non presenta difficoltà maggiori. Se A è in corrispondenza biunivoca con B e questo insieme è in corrispondenza biunivoca con C, in modo tale che, ad esempio, ad $a \in A$ si associa $b \in B$ e a tale elemento

[1] Sebbene noi abbiamo inteso utilizzare solo quantità *positive* e quindi, più propriamente -come vedremo- numeri naturali.

[2] Basta invertire l'associazione.

$b \in B$ corrisponde l'elemento $c \in C$, allora, per fare in modo d'avere una corrispondenza biunivoca tra A e C, basta far corrispondere a quell'elemento a di A, proprio l'elemento c testé considerato. Si comprende tutto meglio tramite i seguenti due diagrammi:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ a & \mapsto & b & \mapsto & c \end{array}$$

e quindi

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ a & \mapsto & c. \end{array}$$

c.v.d.

Indichiamo la *Classe degli insiemi* con il simbolo $\mathfrak{S}$ e la relazione di *equipotenza* con $\mathcal{E}$. L'insieme quoziente $\mathfrak{S}_{/\mathcal{E}}$ sarà costituito dalle seguenti classi di equivalenza:

$[\{\}]$ = classe d'equivalenza dell'insieme vuoto, che può essere messo in corrispondenza biunivoca solo con se stesso!

$[\{\clubsuit\}]$ = classe d'equivalenza dell'insieme che contiene un solo simbolo, il quale può essere messo in corrispondenza biunivoca solo con insiemi dello stesso tipo, ad esempio $\{a\}, \{\text{casa}\}, \{\diamond\}$, ecc..

$[\{\dagger, \square\}]$ = classe d'equivalenza dell'insieme che contiene una coppia di simboli, il quale può essere messo in corrispondenza biunivoca solo con insiemi dello stesso tipo, ad esempio $\{a, b\}, \{\text{casa}, \text{chiesa}\}$, $\{\text{penna}, \text{gesso}\}$, ecc..

$[\{a, b, c\}]$ = classe d'equivalenza dell'insieme che contiene una terna di simboli, il quale può essere messo in corrispondenza biunivoca solo con insiemi dello stesso tipo, ad esempio $\{*, -, +\}$, $\{x, y, z\}$, $\{\text{penna}, \text{gesso}, \text{lavagna}\}$, ecc..

Ecc..

DEFINIZIONE 42. *L'insieme* $\mathfrak{S}_{/\mathcal{E}}$ *è chiamato* Insieme dei Numeri Naturali *e si indica con* $\mathbb{N}$.

Le varie classi di equivalenza di $\mathfrak{S}_{/\mathcal{E}}$ sono rinominate, per semplicità, nel modo seguente e chiamate al modo solito:

$$[\{\}] = 0, \quad [\{*\}] = 1, \quad [\{*, +\}] = 2, \quad [\{a, b, c\}] = 3, \quad \text{ecc..}$$

È importante sottolineare che un **numero naturale** qualsiasi **consiste in una classe di equivalenza di insiemi**, quindi rappresenta un collezione infinita di insiemi tutti equipotenti tra loro!

1.1. Operazione naturale in $\mathbb{N}$. L'insieme quoziente $\mathfrak{S}_{/\mathcal{E}}$, ovvero $\mathbb{N}$, eredita una operazione naturale dalla più semplice tra le operazioni fatte sugli insiemi: ovvero dall'unione. Nei fatti, dati due insiemi disgiunti, la loro unione consiste di un insieme che contiene gli elementi dell'uno e dell'altro insieme. Prendendo le classi di equivalenza degli insiemi, si ottiene la nota operazione di *addizione.* Chiariamo il tutto con un esempio.

Esempio: Sia $A = \{*\}$ e $B = \{\dagger, \square, \diamond\}$. Chiaramente $A \cup B = \{*, \dagger, \square, \diamond\}$. Se consideriamo le classi di equivalenza di tali insiemi in $\mathfrak{S}_{/\mathcal{E}}$, avremo:

$$[A] = 1, \quad [B] = 3, \quad [A \cup B] = 4.$$

Definizione 43. *L'addizione tra due numeri naturali si definisce come la classe di equivalenza dell'unione di due insiemi disgiunti, rappresentanti nelle classi di equivalenza dei numeri considerati. Ovvero, se*

$$n = [A] \quad e \quad m = [B] \quad allora \quad n + m = [A \cup B]$$

ammesso che $A \cap B = \varnothing$.

È importante notare che, affinchè questa definizione di addizione sia da considerarsi una "buona definizione", si dovrebbe dimostrare che essa non dipende dalla scelta del rappresentate all'interno delle classi di equivalenza dei numeri da sommare. Soprassediamo su tale dimostrazione, sebbene essa non sia difficile [3], dato che non aggiunge nulla di rilevante al discorso che vogliamo continuare a fare. Piuttosto facciamo presente che i numeri che vengono sommati si dicono *addendi,* mentre il risultato viene chiamato proprio *somma.*

Non vogliamo nemmeno approfondire un altro aspetto molto importante dei numeri naturali, ovvero il fatto che -anche in questo caso in "modo naturale"- la struttura "algebrica" di $\mathbb{N}$ si dota di un *ordinamento totale,* tale per cui si può decidere quale numero sia il più grande, ovvero quale numero viene prima o dopo di un altro: tale struttura viene "ereditata" dall'operazione di "inclusione" tra insiemi. Diamo per

[3] Comunque invitiamo lo studente volenteroso a cimentarsi in tale dimostrazione.

scontato, nel prosieguo, che si sappia decidere, nel confronto tra due numeri naturali, quale sia il maggiore e quale il minore, pur non avendo introdotto in modo formale il metodo per farlo.

Ricapitolando, abbiamo costruito l'insieme $(\mathbb{N}, +)$ con la sua operazione naturale di somma, considerando le classi di equivalenza degli insiemi secondo equipotenza e l'unione di insiemi disgiunti per dare una "struttura algebrica" all'insieme quoziente $\mathfrak{S}_{/\mathcal{E}}$.
Diamo ora qualche esempio di somma in $\mathbb{N}$ tramite definizione, ovvero passando attraverso l'insieme quoziente.

Esempio: 3+2=?

$$3 = [\{a, b, c\}], \qquad 2 = [\{s, t\}] \qquad \text{per cui}$$
$$\begin{aligned} 3 + 2 = {} & [\{a, b, c\}] + [\{s, t\}] = \\ = {} & [\{a, b, c\} \cup \{s, t\}] = \\ = {} & [\{a, b, c, s, t\}] = 5 \end{aligned}$$

Esempio: 2+5=?

$$2 = [\{a, b\}], \qquad 5 = [\{\text{casa}, t, *, /, g\}] \qquad \text{per cui}$$
$$\begin{aligned} 2 + 5 = {} & [\{a, b\}] + [\{\text{casa}, t, *, /, g\}] = \\ = {} & [\{a, b\} \cup \{\text{casa}, t, *, /, g\}] = \\ = {} & [\{a, b, \text{casa}, t, *, /, g\}] = 7 \end{aligned}$$

2. Le quattro operazioni

Nell'insieme dei numeri naturali, oltre all'operazione naturale di somma, si definiscono altre tre operazioni: tutte a partire da quella già conosciuta di addizione. La prima che presentiamo, un modo comodo per rappresentare una *somma ripetuta,* si chiama *prodotto.* Se si somma ripetutamente un numero qualsiasi n per un certo numero di volte a, dovremmo scrivere, giustamente:

$$\underbrace{n + n + \cdots + n}_{a}.$$

Una scrittura più compatta si può ottenere utilizzando il simbolo "$\cdot$", in questo modo:

$$a \cdot n.$$

In tal caso i numeri a e n diconsi *fattori,* mentre il risultato di tale operazione si chiama proprio *prodotto.*

Le operazioni "inverse" della somma e del prodotto, si chiamano rispettivamente *differenza* e *divisione.* Si definiscono come segue. Se la somma di un numero a con un numero b dà il numero c, ci si domanda se, conoscendo il risultato della somma ed il primo addendo, si può risalire al secondo addendo. In tal caso si dice che il secondo numero è la differenza tra il numero somma ed il primo addendo, ovvero: se

$$a + b = c$$

allora

$$b = c - a.$$

Bisogna stare molto attenti al fatto che **la differenza non esiste sempre!** questo lo vedremo a breve con gli esempi. La terminologia usata è, per c ed a la denominazione, rispettivamente, di *minuendo* e *sottraendo,* mentre per b proprio di *differenza.* La divisione si definisce, in modo quasi simile, però "operando" sul prodotto, ovvero, se il prodotto del numero a con il numero b dà il numero c, allora è possibile, conoscendo il risultato ed il primo fattore, risalire al secondo fattore? ovvero: se

$$a \cdot b = c$$

allora

$$b = c : a.$$

In questo caso b si chiama *quoziente* tra c e a. Un altro modo di intendere la divisione è la seguente: conoscendo il risultato di una somma ripetuta e sapendo quante volte il numero è stato sommato, si può sapere quale era il numero? Anche in questo caso bisogna sottolineare il fatto che **la divisione non sempre di può fare!** [4].

Esempio: $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 \cdot 4 = 20$.
Esempio: Dato che $2 \cdot 3 = 6$ allora $6 : 2 = 3$. [5]
Esempio: Dato che $5 + 3 = 8$, allora $8 - 3 = 5$.
Esempio: [**Operazione che non si può fare!**] Quante volte bisogna sommare il numero 3 con se stesso per ottenere come risultato 1? questo significa fare $1-3$; purtroppo non c'è alcun numero naturale che possa rispondere a tale domanda! d'altra parte, per avere una differenza ben posta, è necessario che il sottraendo sia minore del minuendo, poichè il risultato di una somma è sempre maggiore di entrambi gli addendi e quindi -ripetiamo- il primo termine di una differenza è sempre maggiore del secondo.
Esempio: [**Altra operazione che non si può fare!**] Se sommiamo ripetutamente per 3 volte un numero ed il risultato esce 5, quale

[4] Le uniche due operazioni che, finora, si possono sempre fare sono l'addizione e la moltiplicazione.

[5] Anche se può sembrare banale, si tenga sempre bene a mente tale esempio, dato che ci permetterà, in seguito, di risolvere agevolmente le equazioni di primo grado.

numero era stato scelto? questo significa trovare il risultato della divisione $5 : 3$; purtroppo, anche in questo caso, non c'è un numero naturale che possa rispondere a tale domanda! ci possiamo convincere facilmente di questo considerando che la somma di tre 1 dà 3; la somma di tre 2 dà 6 e tra uno e due non ci sono numeri naturali [6].

2.1. Euclide insegna la divisione. Ritorniamo sul prodotto tra due numeri naturali $n \cdot m$ che, come abbiamo detto poc'anzi, significa sommare ripetutamente m per n volte. È notevole il fatto che sommare ripetutamente m per n volte porti sempre allo stesso risultato, ovvero

$$n \cdot m = m \cdot n,$$

a tale proprietà ci si riferisce, generalmente, col nome di *proprietà commutativa.* Per convincersi che vale tale proprietà, basti il seguente esempio:

$$3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 = 12 = 3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3;$$

d'altra parte si ha anche

$$4 + 4 + 4 = (3 + 1) + (3 + 1) + (3 + 1) =$$

riordinando gli addendi

$$= 3 + 3 + 3 + (1 + 1 + 1) = 3 + 3 + 3 + 3$$

ovvero proprio il prodotto $4 \cdot 3$ per cui

$$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3.$$

Se il risultato del prodotto $n \cdot m$ è un certo numero a, si dice anche che a è un *multiplo* di m (e data la commutatività dell'operazione, anche di n); inoltre, i due fattori m ed n, si chiamano anche *sottomultipli* di a. Ora, affinchè si possa effettuare una divisione, si deve poter invertire il prodotto $n \cdot m = a$, e questo, in $\mathbb{N}$ lo si può fare solo se effettivamente il numero, che si vuole dividere, è multiplo del numero che lo divide.

Per essere più chiari, per ottenere un numero naturale nella divisione di $a : n$ deve essere a un multiplo di n e, in tal caso, il risultato sarà l'altro sottomultiplo m. In tale ottica, i due sottomultipli n e m di a si chiamano anche *divisori* di a. Quindi non basta solo che nella divisione $a : b$, il primo numero a sia maggiore del secondo numero b, per poter effettuare l'operazione, è necessario anche che b sia un divisore di a. In effetti c'è un escamotage per poter effettuare la divisione

[6] Per trovare una risposta alla domanda dell'esempio precedente, costruiremo l'insieme $\mathbb{Z}$, mentre per rispondere alla domanda dell'ultimo esempio costruiremo l'insieme numerico $\mathbb{Q}$.

anche se l'ultima condizione non è soddisfatta, ovvero solo pretendendo di avere il primo numero maggiore del secondo. La soluzione è stata data da Euclide e viene denominata *divisione intera.*
Per effettuare la divisione tra il numero a ed il numero b si considera il multiplo di b che più si avvicina, per difetto, ad a, e si indica la differenza tra b e tale multiplo come *resto.* Il prossimo esempio chiarirà tutto.

Esempio: Si voglia dividere il numero 7 per il numero 2. I multipli di 2, inferiori a 7, sono $2, 4, 6$. Quindi è il terzo multiplo quello che ci interessa. Dato che $7 - 6 = 1$, la divisione dà 3 con resto di 1. D'altra parte si ha proprio

$$7 = 3 \cdot 2 + 1.$$

In tale scrittura si è soliti chiamare il numero 7 *dividendo*, il numero 2 *divisore*; il 3 *quoziente* e l' 1 il *resto.*
In generale, quando si scrive la divisione di a per b nel modo seguente

$$a = b \cdot q + r,$$

possiamo dire che se r è nullo, allora a è multiplo di b (ma anche di q) ed il risultato della divisione è il quoziente q, altrimenti la divisione non è fattibile in $\mathbb{N}$ e ci si deve "accontentare" di indicare un quoziente "prossimo" ed il "resto", che avanza per poter effettuare una divisione esatta [7].

2.2. Multipli e Divisori. Nella prima parte del libro abbiamo detto che una somma ripetuta di una grandezza si chiama multiplo di essa. Con i numeri naturali in discorso è lo stesso: si chiama *multiplo* un numero ottenuto sommando ripetutamente con stesso un altro numero, il quale, a sua volta, si dirà sottomultiplo o *divisore* di quello ottenuto.
Ci si può chiedere, dati due numeri, ci sono multipli in comune? hanno divisori in comune? A parte la curiosità di sapere se effettivamente queste domande hanno risposta, l'utilità nella risoluzione di tali quesiti sarà presto evidente nella soluzione dei primi -semplici- problemi che potremmo incontrare nella vita. Iniziamo con il rispondere alle domande positivamente per entrambi i casi. Dati due numeri a e b, sicuramente $a \cdot b$ è un multiplo comune di entrambi ed ogni altro multiplo di $a \cdot b$ sarà ancora un multiplo comune di entrambi: in pratica ce ne sono quanti se ne vogliono di multipli in comune, un'infinità! D'altra parte, il numero 1 banalmente è divisore di qualsiasi numero, quindi è un divisore comune a qualsiasi coppia di numeri dati. Allora

[7] Infatti, togliendo il resto dal dividendo, la divisione si potrebbe ben fare!

ci domandiamo, nel caso dei multipli, dato che ce ne sono un'infinità [8], quale è il più piccolo? Nel caso, invece, dei divisori, dato che 1 è il più piccolo, se ce ne sono altri, ce n'è uno più grande di tutti? Le risposte a tali domande forniscono i due notevoli concetti di **m.c.m.** *minimo comune multiplo* e **M.C.D.** *massimo comune divisore.*

DEFINIZIONE 44. *Si chiama* minimo comune multiplo *di due numeri, il più piccolo tra i multipli dei due numeri, che sia in comune. Generalmente si denota con* ***m.c.m.****.*
Si chiama massimo comune divisore *di due numeri, il più grande tra i divisori dei due numeri, che sia in comune. Generalmente si denota con* ***M.C.D.****.*

Esempio: Trovare il m.c.m. tra i numeri 12 e 16.

Per come è nella definizione, dobbiamo scrivere le "tabelline" del 12 e del 16 ed individuare il primo numero che compare in entrambe.

$$\begin{array}{ccccc} 12, & 24, & 36, & \boxed{48}, & \dots \\ 16 & 32 & \boxed{48} & \dots. & \end{array}$$

Chiaramente i prossimi multipli in comune sono i multipli di 48.

Esempio: Trovare il M.C.D. tra i numeri 48 e 32.

Per come è nella definizione, dobbiamo trovare l'insieme intersezione tra i divisori dell'uno e dell'altro numero ed individuare l'elemento più grande. Indichiamo con $Div(48)$ l'insieme formato dai divisori di 48 ed analogamente intendiamo per l'insieme $Div(32)$ [9].

$$\begin{aligned} Div(48) &= \{1, 48, 2, 24, 4, 12, 3, 16, 6, 8\} \\ Div(32) &= \{1, 32, 2, 16, 4, 8\} \\ \text{quindi} \quad Div(48) \cap Div(32) &= \{1, 2, 4, 8, \boxed{16}\} \\ \Rightarrow M.C.D.(48, 32) &= 16 \qquad . \end{aligned}$$

[10].

[8] Non avrebbe senso domandarsi quale sia il più grande, dato che non ce n'è "uno più grande" di tutti gli altri

[9] Per determinare i divisori di un numero, banalmente, troviamo due numeri che moltiplicati tra loro danno il numero dato!

[10] Abbiamo scritto -disordinatamente- i numeri, in modo però che due consecutivi diano come prodotto proprio 48. Inoltre ci siamo fermati alla coppia 6, 8 poiché le altre coppie di numeri che avremmo dovuto scrivere si ritrovano, in ordine invertito, già nell'elenco scritto. Idem discorso per l'insieme $Div(32)$.

Osservazioni: se tra due numeri, un numero è multiplo dell'altro, allora è chiaro che il m.c.m. è proprio tale multiplo. D'altra parte, se un numero è divisore dell'altro, allora il M.C.D. è proprio tale divisore. Si può dimostrare il seguente teorema, che noi ci limitiamo ad enunciare.

PROPOSIZIONE 30. $M.C.D(a, b) \cdot m.c.m.(a, b) = a \cdot b$.

Questo significa che una volta conosciuto uno tra M.C.D. o m.c.m., si conosce immediatamente l'altro tramite una semplice divisione.

2.3. Problemi sul m.c.m. ed il M.C.D.. Finalmente possiamo iniziare a risolvere alcuni semplici problemi: ma, in generale, ***come si fa a risolvere un problema?*** A parte l'intuito -che chiaramente non può essere richiesto a tutti- ed una buona intelligenza -che occorre, generalmente, solo per risolvere i problemi più difficili [11]- la prima cosa da fare è capire il problema stesso [12]; secondo è identificare in quale area della Matematica studiata ricade; terzo è "impostare" il problema per una soluzione tramite qualche semplice calcolo o ragionamento. Ora, per *impostare un problema* si intende cogliere solo le informazioni importanti, tralasciando tutto quello che è di superfluo, e creare un "modello" tramite una scrittura simbolica in Matematica, che possa essere studiata, "maneggiata" tramite calcoli o che permetta di ragionarci su senza rischiare di perdersi in un labirinto di conclusioni inadeguate. I più semplici problemi che incontriamo solo quelli risolvibili tramite la determinazione del m.c.m. o del M.C.D.

PROBLEMA 1. *Un fioraio vuole preparare dei mazzi di rose, avendo a disposizione 15 rose rosse, 5 rose bianche e 10 rose gialle. Per cercare di ottimizzare i guadagni, il fioraio vuole confezionare la massima quantità possibile di mazzi di rose contenenti la medesima quantità di rose di un dato colore. Quanti mazzi si possono ricavare in tutto e quante rose, di ciascun tipo, in ciascun mazzo si dovranno mettere?*

Soluzione: Qui si parla di "dividere" le rose tra i vari mazzi e di confezionare il "massimo" numero di mazzi. Per cui si richiede di determinare il M.C.D. tra 15, 5 e 10. Questo è chiaramente 5, dato che 15 e 10 sono multipli proprio di 5. Per cui si possono formare 5 mazzi con $15 : 5 = 3$ rose rosse, $5 : 5 = 1$ rosa bianca e $10 : 5 = 2$ rose gialle.

□

[11] E raramente a scuola si richiedono queste due capacità! quindi non ci si preoccupi di "non essere in grado" o di "non essere portati alla Matematica".

[12] Nel caso di voi studenti, significa **Capire cosa dice la traccia!**

Problema 2. *I 20 alunni di una classe prima , i 25 alunni di una seconda classe ed i 15 della terza classe di una stessa scuola, vengono radunati nel cortile e suddivisi nel maggior numero possibile di gruppi, ognuno dei quali contiene lo stesso numero di alunni delle tre classi. Calcola quanti gruppi si formano e quanti alunni di ogni classe sono presenti in ciascun gruppo.*

Soluzione: Anche qui si parla di "suddividere" nel "maggior numero possibile", per cui si richiede di determinare il M.C.D. tra 20, 25 e 15. Anche in questo caso si vede subito che il M.C.D. è 5, dato che tutt'e tre i numeri sono multipli di 5 e nessuno dei tre di un numero maggiore di esso. Per cui si possono formare al massimo 5 gruppi di alunni, formati da $20 : 5 = 4$ allievi del primo anno, $25 : 5 = 5$ alunni del secondo anno e $15 : 5 = 3$ allievi della terza classe.

□

Problema 3. *Due aerei partono contemporaneamente dall'aeroporto di Lamezia Terme e vi ritorneranno dopo aver percorso le loro rotte: il primo ogni 12 giorni e il secondo ogni 14 giorni. Dopo quanti giorni i due aerei si troveranno di nuovo insieme a Lamezia Terme?*

Soluzione: Ragionando in modo elementare, il primo aereo si trova a Lamezia la prima volta, quando parte, poi dopo 12 gg., dopo 24 gg. ecc.. questi sono i multipli di 12, per cui stiamo cercando il multiplo comune a 12 e 14, il primo nella liste delle due "tabelline".

$$\begin{array}{l} 12,\quad 24,\quad 36,\quad 48,\quad 60,\quad 72,\quad \boxed{84},\quad \dots \\ \quad 14\quad\quad 28\quad 42,\quad 56,\quad 70,\quad \boxed{84}\quad \dots . \end{array}$$

Quindi ci vogliono 84 gg. prima che ripartano lo stesso giorno da Lamezia Terme.

□

Problema 4. *Tre ruote dentate sono unite in un ingranaggio. Se la prima ha 30 denti, la seconda 24 e la terza 15, quanti giri farà ogni ruota prima di tornare alla posizione di partenza?*

Soluzione: Sempre ragionando in modo elementare, la prima ruota ritorna alla posizione di partenza dopo 30 giri di denti, 60 giri ecc.., quindi si cerca il primo multiplo in comune ai tre numeri 30, 24 e 15. Ora, dato che 30 è già multiplo di 15, possiamo trascurare la tabellina del 15, per cui procediamo alla determinazione della soluzione:

$$\begin{array}{l} 30,\quad\quad 60,\quad\quad 90,\quad\quad \boxed{120},\quad \dots \\ 24\quad\quad 48\quad 72,\quad 96,\quad \boxed{120},\quad \dots . \end{array}$$

Quindi la prima ruota farà 4 giri, la seconda 5 giri e la terza 8 giri, prima di ritornare alla posizione di partenza: infatti 120 è il quarto multiplo di 30, il quinto di 24 e l'ottavo di 15, [13].

□

3. Proprietà delle quattro operazioni

Abbiamo già osservato che per il prodotto vale la *proprietà commutativa,* in verità essa è banalmente vera anche per la somma [14] ovvero:

$$a + b = b + a.$$

Per la sottrazione questo non vale, anche perchè tale operazione si può fare solo se il primo termine è maggiore del secondo, quindi -invertendo i termini- si avrebbe che il primo termine sarebbe minore del secondo. Lo stesso dicasi per la divisione: il primo termine deve essere sempre maggiore del secondo, altrimenti, in $\mathbb{N}$, l'operazione non si può fare. Dalla definizione tramite classi d'equivalenza di insiemi, risulta anche banalmente vero che valgono le proprietà *associative* sia per l'addizione che per il prodotto:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

e quindi ha senso anche scrivere il tutto senza parentesi

$$a + b + c.$$

Inoltre

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

ed anche in questo caso, ha senso scrivere il tutto senza parentesi

$$a \cdot b \cdot c.$$

Molto importanti sono le seguenti due proprietà, dette di *distributività:* per il prodotto sulla somma/differenza

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$

e della somma/differenza sulla divisione

$$(a \pm b) : c = a : c \pm b : c.$$

Ultima, ma non meno importante, è l'operazione "inversa" della distributività del prodotto, che si chiama **messa in evidenza:**

$$a \cdot c + b \cdot c = c \cdot (a + b) = (a + b) \cdot c.$$

[13]Basta contare la posizione di tale multiplo nella tabellina del numero, oppure -in meno meno intelligente- fare la divisione $120 : 30$ ecc..

[14]Deriva direttamente dal fatto che nell'unione tra insiemi, non conta da quale insieme selezioniamo per prima gli elementi.

Questo significa che se ci sono fattori in comune tra più addendi, si possono raccogliere prima ancora di fare la somma e semplificare - notevolmente- le operazioni. Si apprezzi, nell'esempio seguente, come è elegante il modo di procedere.

Esempio:

$$147 + 168 = 7 \cdot (21 + 24) = 7 \cdot 45 = 315,$$

si poteva anche continuare, senza arrivare subito alla conclusione, scrivendo ancora

$$7 \cdot 45 = 7 \cdot (50 - 5) = 7 \cdot 50 - 7 \cdot 5 = 350 - 35 = 315.$$

Bisogna sentirsi liberi di operare in modo da agevolare i calcoli: per fare questo, è necessario *padroneggiare* le proprietà dei numeri, senza avere dubbi se un passaggio si possa fare oppure no.

4. Euclide ed i Numeri primi; i criteri di divisibilità

Se un numero ha come unici divisori se stesso ed 1, allora si chiama *numero primo.* Vuol dire che non "si fattorizza" se non banalmente, ovvero non ci sono due numeri il cui prodotto è il numero dato, a meno di considerare se stesso moltiplicato per uno. Ci sono tanti problemi ancora non risolti su tali numeri, pur essendo tali domande semplici da porsi. Ad esempio non si sa come sono "distribuiti" nella sequenza dei numeri naturali. Comunque, per non divagare troppo, diciamo quello che si sa per certo: la prima cosa è che essi sono in numero infinito. La dimostrazione la dà Euclide già attorno al 300 a.c.

TEOREMA 29. *L'insieme dei numeri primi non ha un elemento più grande di tutti gli altri, come si dice* non è limitato superiormente [15].

Dim.: Supponiamo che ci sia un numero primo $\bar{p}$ più grande di tutti gli altri; formiamo il prodotto di tutti i numeri primi minori (o uguali) di $\bar{p}$ e chiamiamolo q. Ora, $q + 1$ diviso per ciascun numero primo minore di $\bar{p}$ dà come resto 1, per cui $q + 1$ non è fattorizzabile con nessuno dei numeri primi che già conoscevamo. Ergo, o è esso stesso un numero primo, oppure ci deve essere qualche altro numero primo maggiore di $\bar{p}$ che lo fattorizza. Nel primo caso, chiaramente $q + 1$ risulta maggiore di $\bar{p}$ [16], quindi *non era giusto* ipotizzare che esistesse $\bar{p}$ numero primo maggiore di tutti gli altri, nel secondo caso, siamo ancora in contraddizione con il fatto che $\bar{p}$ fosse il più grande tra

[15] Questo significa che ce ne sono di grandi a piacere, pertanto sono in numero infinito!

[16] A meno di 1, è un suo multiplo!

tutti i numeri primi! Perciò l'ipotetico $\bar{p}$ con la proprietà di essere il più grande numero primo nell'insieme di tali numeri, non può esistere.

c.v.d.

Ora che sappiamo di avere a disposizione un'infinità di numeri primi, come facciamo ad individuarli? questo è un bel problema, perché un "formula chiusa", come si suol dire, ovvero una espressione che ci permetta con dei calcoli di determinare il quindicesimo o il millesimo numero primo, conoscendo la posizione nella sequenza dei numeri primi, non c'è. Un metodo -dispendioso ma efficace- è quello di utilizzare un "crivello virtuale": anche in questo caso è un Matematico della Grecia antica che ci insegna come fare. Il *crivello di Eratostene* consiste nel prendere la sequenza dei numeri naturali ed iniziare a cancellare tutti i multipli partendo dai numeri più piccoli e, a mano a mano che si avanza, cancellando tutti i multipli dei numeri che precedentemente non erano stati cancellati (ad esclusione del primo -ovvero del numero stesso-). Quelli che rimangono, sono numeri primi, ad esempio consideriamo la sequenza

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, \dots$$

cancelliamo tutti i multipli di 2, escluso il primo (che è lo stesso 2), ottenendo:

$$1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, \dots.$$

Poi passiamo a cancellare tutti i multipli di 3, escluso il primo (che è proprio tre), ottenendo:

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots;$$

a questo punto facciamo lo stesso con 5, con 7 ecc... si ottiene, in effetti

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots,$$

che sono tutti i numeri primi inferiori a 20.

Passiamo ad un altro problema interessante: come facciamo a decidere se un numero è primo oppure si fattorizza? e se si fattorizza, come facciamo a determinarne i fattori? Il problema è, in effetti, "grosso", tanto che la *crittografia* sia basa essenzialmente proprio sulla incapacità di saper fattorizzare velocemente prodotti di numeri primi molto grandi! In pratica, pur potendolo fare, ci vuole così tanto tempo per poter scomporre un numero molto grande, che tutta la trasmissione cifrata, nell'era dell'informatica moderna, si basa sull'inefficienza degli "algoritmi" di fattorizzazione. Comunque, a parte tale complicazione, che non tratteremo certo in questo capitolo introduttivo alla proprietà dei numeri naturali, per poter capire se un numero primo "piccolo" divide un numero dato, si possono stabilire dei “criteri”. Prima di dimostrare i criteri di divisibilità, dobbiamo premettere, però, alcune osservazioni sul nostro modo di rappresentare i numeri.

4.1. Rappresentazione decimale. Per come sono stati introdotti i numeri naturali, è chiaro che qualsiasi segno avrebbe potuto andare bene per indicare un dato numero: in fondo, se scriviamo “ 1 ” per indicare una particolare classe di equivalenza, avremmo potuto anche indicare la stessa classe tramite una “I”, come facevano i romani; oppure con un tratto orizzontale “ − ” come fanno i cinesi. È quindi una pura convenzione il modo di rappresentare un numero. Gli arabi, molto portati nel commercio e quindi, obbligati a dover fare “conti” veloci durante la vendita delle proprie mercanzie e, inoltre, aventi la necessità di essere pratici anche per le proprie osservazioni astronomiche, elaborarono un modo di rappresentare i numeri molto efficace. Questo *sistema di numerazione* è stato introdotto nel mondo occidentale in pieno medioevo; uno dei principali fautori della diffusione del sistema “arabo” fu l'italiano Leonardo Fibonacci che, nel 1202, scrisse un libro intitolato *Liber Abaci,* dove, tra le altre cose, spiega come rappresentare i numeri e “far di conto” utilizzando il *sistema decimale posizionale.* Come dice lo stesso nome, il sistema di rappresentazione dei numeri si basa su soli dieci simboli, chiamati *cifre,* quelli noti anche a noi

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \quad 9.$$

Questi simboli, finita la prima “conta”, si ripetono, indicando ogni volta quante volte è finita “una conta” da 0 a 9. In pratica, se scriviamo 23, intendiamo che abbiamo finito “la conta” da 0 a 9 per ben due volte -ovvero abbiamo completato due decine- e poi abbiamo ancora contato fino a tre. Così, se scriviamo 351, intenderemo che abbiamo contato per 3 volte dieci decine -ovvero abbiamo finito il “giro” da 0 a 9 dieci volte e questo per tre volte (ovvero per 30 volte)- e poi abbiamo contato ancora 5 volte una decina da 0 a 9 ed infine abbiamo contato fino ad 1. Ora, queste cose -dette o scritte- a parole sono ancora troppo ingarbugliate e di difficile interpretazione: infatti la potenza del sistema decimale si basa sul fatto che per fare i calcoli e rappresentare i risultati delle varie operazioni, si può far uso di un *abaco* [17]. Per poter capire meglio la rappresentazione decimale, ora presentiamo una operazione su cui, più avanti nel libro, parleremo più diffusamente. Come si sa, una somma ripetuta di uno stesso numero determina la nozione di “prodotto” tra due numeri. In realtà c'è anche una convenzione molto comoda per

[17] La prima vera calcolatrice, sebbene oggi si ritrovi solo come “giocattolo” per i bambini più piccoli, ahimè!

rappresentare un *prodotto ripetuto di uno stesso numero.* Introduciamo tale convenzione: se si moltiplica un numero a per se stesso, per un numero n di volte, allora il risultato si può scrivere come

$$a^n \quad = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n}$$

e si legge a *elevato* n. Propriamente la scrittura a^n si chiama *potenza* n-esima di a. Con tale convenzione, possiamo scrivere alcuni numeri in modo molto più compatto, ad esempio, dato che 10000 è il prodotto di 10, per se stesso, per 4 volte, potremmo scrivere

$$10000 = 10^4.$$

Ancora più evidente appare l'utilità di tale convenzione, se pensiamo che, ad esempio, un miliardo di miliardi [18] si può scrivere nel modo seguente:

$$1'000'000'000'000'000'000 = 10^{18}.$$

A questo punto siamo pronti ad introdurre la rappresentazione decimale [19] per come ci sarà utile nella dimostrazione dei criteri di divisibilità.

Dato che tutte le volte che finiamo "un ciclo" di conteggio da 0 a 9, arriviamo a 10 e, quando si finisce anche il ciclo di conteggio da 10 a 99 si arriva a 100 ecc., possiamo utilizzare le potenze di 10 per rappresentare i numeri in modo molto comodo.

Esempio: Il numero 5391 si può scrivere come 1 più $9 \cdot 10$ più $3 \cdot 100$ più $5 \cdot 1000$, ovvero, più comodamente come

$$1 + 9 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^3.$$

Appare evidente, in questo modo, che ogni numero si può rappresentare tramite la somma di opportune potenze di 10 moltiplicate per delle cifre che vanno da 0 a 9. [20]

Come terminologia si usa anche dire che la cifra associata alla potenza 10^0 rappresenta *le unità,* quella associata a 10^1 rappresenta le decine, quella associata a 10^2 le centinaia ecc...

[18] Detto anche *trilione.*

[19] Tale rappresentazione prende più precisamente il nome di *rappresentazione decimale polinomiale* e quando introdurremo l'algebra, si capirà bene perché viene denominata "polinomiale".

[20] Per rendere ancora più coerente la scrittura *in base 10,* si pone per convenzione che $10^0 = 1$, in tal modo tutte le cifre che compaiono sono sempre associate a qualche potenza di 10. Ad esempio, $357 = 7 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2$.

LEMMA 3. *Se due numeri sono divisibili per uno stesso numero, lo è anche la loro somma o la loro differenza.*

Dim.: Giusto un'osservazione: se a e b sono divisibili entrambi per n, allora vuol dire che sono multipli di questo n, il ché vuol dire che esistono due numeri h e k tali per cui $a = h \cdot n$ e $b = k \cdot n$. Ora, la somma o differenza di a e b la possiamo scrivere come

$$a \pm b = h \cdot n \pm k \cdot n.$$

Visto che n è un numero in comune ai due addendi, possiamo anche scrivere che [21]

$$a \pm b = (h \pm k) \cdot n.$$

Quindi, anche $a \pm b$ è un multiplo di n, ovvero è divisibile per esso.

c.v.d.

TEOREMA 30 (Criteri di divisibilità). *Un numero è divisibile per il numero indicato di seguito, se valgono le condizione in elenco.*

- Divisibilità per 2: *la cifra dell'unità pari ad una tra 0, 2, 4, 6, 8.*
- Divisibilità per 3: *la somma delle cifre è un multiplo di tre.*
- Divisibilità per 5: *la cifra dell'unità è o 0 o 5.*
- Divisibilità per 7: *la somma tra il numero ottenuto escludendo la cifra dell'unità ed il quintuplo dell'unità deve essere multipla di 7.*
- Divisibilità per 10: *la cifra dell'unità è 0.*
- Divisibilità per 11: *la differenza tra la somma delle cifre di posto pari e quelle di posto dispari* [22]*è multipla di 11.*

Dim.: Se scriviamo il numero sotto forma di

$$N = n_0 + n_1 \cdot 10^1 + n_2 \cdot 10^2 + n_3 \cdot 10^3 + \cdots + n_k \cdot 10^k$$

dove gli n_i indicano le cifre opportune per le varie potenze di 10, ci rendiamo conto subito che tutta la parte $n_1 \cdot 10^1 + n_2 \cdot 10^2 + n_3 \cdot 10^3 + \cdots + n_k \cdot 10^k$ è divisibile per 2 essendo tutta la somma ottenuta come $10 \cdot$ "qualcosa" [23]. Ora osserviamo che

$$n_0 = N - (n_1 \cdot 10^1 + n_2 \cdot 10^2 + n_3 \cdot 10^3 + \cdots + n_k \cdot 10^k),$$

[21] L'operazione che segue prende il nome di *messa in evidenza,* di questa operazione abbiamo già parlato e continueremo a parlarne più diffusamente in seguito.

[22] Chiaramente, il numero più grande meno il più piccolo!

[23] Dove quel "qualcosa", poi, non è altro che il numero a cui si è soppressa la cifra dell'unità!

ovvero

$$n_0 = N - 10 \cdot \text{“qualcosa”}.$$

Se N è divisibile pure esso per due, allora anche n_0 lo deve essere -per il lemma- in quanto è differenza tra due numeri divisibili per due: ma le cifre divisibili per 2 sono solo 0, 2, 4, 6, 8. D'altra parte, se n_0 è una delle cifre elencate prima, allora N è divisibile per 2 -sempre per il lemma- in quanto somma di due numeri divisibili per due.

⋆ ⋆ ⋆

Consideriamo ora la somma delle cifre

$$n_0 + n_1 + \cdots + n_k.$$

Se essa è divisibile per 3, allora ne è un suo multiplo, ovvero esiste un numero m tale per cui

$$n_0 + n_1 + \cdots + n_k = 3 \cdot m.$$

Quindi

$$n_0 = 3 \cdot m - (n_1 + \cdots + n_k).$$

Sostituiamo nella rappresentazione di N ed otteniamo la scrittura:

$$N = 3 \cdot m - (n_1 + \cdots + n_k) + n_1 \cdot 10^1 + n_2 \cdot 10^2 + n_3 \cdot 10^3 + \cdots + n_k \cdot 10^k,$$

ovvero, facendo ordine nelle operazioni, possiamo scrivere

$$N = 3 \cdot m + 9 \cdot n_1 + 99 \cdot n_2 + \cdots + (10^k - 1) \cdot n_k.$$

Osserviamo che tutti questi addendi sono multipli di 3, anzi, a parte il primo che è solo multiplo di 3, gli altri sono anche multipli di 9. Allora N, per il lemma, sarà divisibile per tre in quanto somma di numeri tutti divisibili per 3.

⋆ ⋆ ⋆

Osserviamo che tutta la parte di N seguente:

$$n_1 \cdot 10^1 + n_2 \cdot 10^2 + n_3 \cdot 10^3 + \cdots + n_k \cdot 10^k$$

è divisibile per 5, in quanto multipla di 10. Per cui se N è anche divisibile per 5, lo dovrà essere -in virtù del lemma- pure

$$n_0 = N - (n_1 \cdot 10^1 + n_2 \cdot 10^2 + n_3 \cdot 10^3 + \cdots + n_k \cdot 10^k).$$

Ma le sole cifre divisibili per 5 sono 0 e 5, quindi la cifra dell'unità n_0 dovrà essere una delle due. D'altra parte, se la cifra dell'unità è proprio 0 o 5, allora il numero N, in quanto somma di numeri divisibili per cinque, dovrà anche esso essere un numero divisibile per 5.

⋆ ⋆ ⋆

Considerando la scrittura iniziale

$$N = n_0 + n_1 \cdot 10^1 + n_2 \cdot 10^2 + n_3 \cdot 10^3 + \cdots + n_k \cdot 10^k,$$

come già osservato precedentemente, tutta la parte con potenze di 10 può essere scritta come $10 \cdot \text{"qualcosa"}$, pertanto possiamo scrivere

$$N = n_0 + 10 \cdot \text{"qualcosa"}.$$

Se N è divisibile per 7, allora ne è un suo multiplo, per cui esisterà un numero opportuno w tale per cui

$$N = 7 \cdot w.$$

Deduciamo quindi che

$$n_0 + 10 \cdot \text{"qualcosa"} = 7 \cdot w.$$

Se moltiplichiamo tutto per 5 otteniamo:

$$5 \cdot n_0 + 50 \cdot \text{"qualcosa"} = 35 \cdot w.$$

Ma $50 = 49 + 1$ per cui possiamo scrivere

$$5 \cdot n_0 + 49 \cdot \text{"qualcosa"} + 1 \cdot \text{"qualcosa"} = 7 \cdot w.$$

Deduciamo da questa uguaglianza che

$$5 \cdot n_0 + \text{"qualcosa"} = 7 \cdot w - 49 \cdot \text{"qualcosa"};$$

il secondo membro è tutto un multiplo di 7, quindi anche il primo membro deve essere un multiplo di 7. Ora,

$$5 \cdot n_0 + \text{"qualcosa"}$$

rappresenta proprio la somma del numero a cui si è eliminata la cifra dell'unità [24] ed il quintuplo della cifra dell'unità.

⋆ ⋆ ⋆

Un numero è divisibile per dieci solo se lo è sia per due sia per cinque. Dalle condizioni già dimostrate, segue che la cifra dell'unità deve essere per forza 0.

⋆ ⋆ ⋆

Premettiamo, prima di dimostrare l'ultimo criterio nell'elenco, un'osservazione importante: il numero successivo a 10, che è 11, è divisibile per 11; ma anche il numero precedente a $10^2 = 100$, che è 99, è divisibile per 11. Si può andare avanti con le potenze di 10 e verificare che i *numeri successivi alle potenze di 10, di indice dispari, sono tutti divisibili per 11,* così come tutti i *numeri precedenti alle potenze di 10,*

[24] É la parte che abbiamo scritto come "qualcosa".

di indice pari. Fatta questa osservazione, ora è semplice dimostrare in criterio, infatti

$$N = n_0 + n_1 \cdot 10^1 + n_2 \cdot 10^2 + n_3 \cdot 10^3 + \cdots + n_k \cdot 10^k,$$

che possiamo riscrivere come:

$$N = n_0 + n_1 \cdot (11-1) + n_2 \cdot (99+1) + n_3 \cdot (1001-1) + \cdots + n_k \cdot (10^k \mp 1),$$

[25] e quindi, ancora

$$N = n_0 + 11 \cdot n_1 - n_1 + 99 \cdot n_2 + n_2 + 1001 \cdot n_3 - n_3 + \text{ecc...}$$

e riordinando i termini

$$N = (n_0 - n_1 + n_2 - n_3 + n_4 - \cdots) + 11 \cdot \text{“qualche altro numero”}.$$

Ora, per via del lemma, se la parentesi del secondo membro è anche multiplo di 11, così come appare il secondo addendo, allora anche N dovrà essere multiplo di 11, ovvero divisibile per esso.

c.v.d.

5. Operazioni con le potenze

Abbiamo introdotto, nei paragrafi precedenti, il concetto di *potenza* di un numero, come una comoda convenzione per indicare un prodotto ripetuto di un numero con se stesso:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n};$$

in generale si dice che il numero a è la *base* della potenza mentre il numero n è l'*esponente* oppure *indice della potenza.* Dato che è utile saper effettuare operazioni, con una certa disinvoltura, con le potenze, ora è il momento di introdurre le loro proprietà. Innanzitutto è chiaro che se moltiplichiamo due potenze con la stessa base, allora possiamo semplicemente sommare i loro esponenti, per indicare quante volte quella base è stata moltiplicata per se stessa, ovvero:

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m} = a^{n+m}.$$

D'altra parte, è facile convincersi che una potenza di potenza, moltiplica gli esponenti, nel senso seguente

$$(a^n)^m = \underbrace{\Big(\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n}\Big) \cdot \Big(\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n}\Big) \cdots \Big(\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n}\Big)}_{m} = a^{n \cdot m}.$$

[25]Dipende se k è pari o dispari, per stabilire i segni nella parentesi.

Consideriamo ora la nota proprietà che un numero diviso se stesso dà uno, allora, *nel caso dell'esponente* n *maggiore o uguale all'esponente* m, si avrà

$$\begin{aligned} a^n : a^m &= \Big(\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n}\Big) : \Big(\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m}\Big) = \\ &= \Big(\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n-1}\Big) \cdot \underbrace{(\cancel{a}) : (\cancel{a})} \cdot \Big(\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m-1}\Big) = \\ &= \dots = \Big(\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-m+1}\Big) \cdot \cancel{a} : \cancel{a} = a^{n-m}. \end{aligned}$$

Inoltre, dato che

$$a^n : a^n = 1 \quad \text{ma è anche} \quad a^n : a^n = a^{n-n} = a^0,$$

si deve porre

$$a^0 = 1.$$

Ricapitolando, le proprietà fondamentali delle potenze sono essenzialmente queste quattro:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $a^n : a^m = a^{n-m}, \quad \text{se} \quad n \geqslant m$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- $a^0 = 1.$

6. L'insieme dei numeri Interi

Per risolvere il "problema della divisione", che non sempre si può fare, bisogna "allargare" l'insieme numerico $\mathbb{N}$ aggiungendo nuovi elementi. Per fare questo, in effetti, noi produciamo un altro insieme, a partire dai Naturali, un sottoinsieme del quale può essere identificato proprio con $\mathbb{N}$: è in questo senso che intendiamo "aggiungere" altri elementi ad $\mathbb{N}$. In effetti, comunque, si tratta di insiemi ben distinti e sostanzialmente diversi. Procediamo dunque alla costruzione dell'insieme dei *numeri Interi,* indicato con la lettera $\mathbb{Z}$.

Consideriamo il prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ su cui poniamo la relazione "$\sim$", tale per cui due coppie sono in relazione per come di seguito [26]:

$$(n_1, n_2) \sim (a, b) \quad \text{se e solo se} \quad n_1 + b = n_2 + a.$$

Scriviamo, per capire meglio, qualche classe di equivalenza.

[26] Si dimostri, per esercizio, che la seguente relazione è, effettivamente, di equivalenza

$$
\begin{aligned}
[(0,0)] &= \{(0,0),\,(1,1),\,(2,2),\,\dots\}\\
[(1,0)] &= \{(1,0),\,(2,1),\,(3,1),\dots\}\\
[(3,1)] &= [(2,0)] = \{(3,1),\,(2,0),\,(4,2),\dots\}\\
&\dots
\end{aligned}
$$

infatti, ad esempio, nell'ultimo caso si ha:

$$2+1=3+0; \quad 1+4=2+3; \quad \text{ecc....}$$

Sull'insieme quoziente

$$\mathbb{Z}=\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_{\sim},$$

detto *insieme dei numeri Interi,* introduciamo l'operazione di *somma* componente per componente, ovvero

$$[(n_1,n_2)]+[(m_1,m_2)]=[(n_1+m_1,n_2+m_2)].$$

Osserviamo che tutto quello che finora abbiamo fatto **è realizzato in** $\mathbb{N}$ e non ci sono problemi delle definizioni, dato che stiamo operando unicamente tramite l'operazione naturale di somma. Comunque, per come osservato anche nella costruzione di $\mathbb{N}$, rimarrebbe da dimostrare [27] che l'operazione introdotta "non dipende dal rappresentate della classe": questo significa -come si dice in Matematica- che l'operazione è ben definita.
Qualche esempio di cosa stiamo facendo:

Esempio:

$$[(4,0)]+[(5,0)]=[(9,0)].$$

$$[(3,1)]+[(7,2)]=[(3+7,1+2)]=[(10,3)]=[(7,0)].$$

$$[(1,3)]+[(6,2)]=[(7,5)]=[(2,0)].$$

$$[(2,1)]+[(2,5)]=[(4,6)]=[(0,2)].$$

Prediamo in considerazione il primo esempio: in fondo, in $\mathbb{N}$ già sapevano che $4+5=9$. In un certo senso, le classi di equivalenza delle coppie che hanno come seconda componente 0, si comportano esattamente con in numeri naturali. Questo viene confermato anche dal secondo esempio, stante il fatto che $[(3,1)]=[(2,0)]$ e $[(7,2)]=[(5,0)]$. Infatti avremmo, con l'identificazione testé suggerita, $2+5=7$. È facile verificare che anche il terzo esempio porta alla stessa conclusione: *le classi di equivalenza delle coppie il cui secondo elemento è 0, sono identificabili con i numeri naturali.* In fatto nuovo è presente nel quarto esempio: nei fatti $[(2,1)]=[(1,0)]$, quindi è ancora identificabile con

[27] Non è difficile farlo, per cui si lascia come esercizio allo studente volenteroso.

il numero naturale 1; ma la classe $[(2,5)]$ non potrà mai essere portata ad avere il rappresentante con il secondo elemento nullo! Quindi tale classe di equivalenza è un "oggetto" nuovo rispetto agli elementi identificabili con i numeri naturali.

Osserviamo ora che se invertiamo le coppie, nell'ultimo esempio, scrivendo

$$[(1,2)] + [(5,2)] = [(6,4)] = [(2,0)],$$

considerando anche che $[(5,2)] = [(3,0)]$ e vale la proprietà commutativa per le addizioni in $\mathbb{N}$, possiamo interpretare tale espressione come

$$[(1,2)] + \text{“Quancosa tipo” } 3 = \text{Qualcosa “tipo” } 2.$$

Per "arrivare" da 3 a 2, in $\mathbb{N}$, si deve *sottrarre* 1.
Per cui quell'elemento $[(1,2)]$ deve intendersi come "sottrarre 1", ovvero -1. Introduciamo le seguenti definizioni:

Definizione 45. *Le classi di equivalenza del tipo* $[n,0]$, *identificabili con i numeri naturali* n, *si denoteranno con* $+n$.
Le classi di equivalenza del tipo $[0,n]$, *non più identificabili con gli elementi di* $\mathbb{N}$, *si denoteranno con* $-n$.

In pratica abbiamo "attaccato" un segno ai numeri che già conoscevamo e, in tale modo, siamo riusciti ad "ampliare" l'insieme numerico dei naturali con l'"aggiunta" di altri numeri: bisogna infatti considerare che tutti i numeri del tipo "$+n$" sono identificati con $n \in \mathbb{N}$, mentre i numeri del tipo "$-n$" ancora non esistevano.

Riprendiamo l'ultimo esempio

$$[(2,1)] + [(2,5)] = [(4,6)] = [(0,2)].$$

Trascrivendo tale espressione con le definizioni date or ora, si avrebbe:

$$(+1) + (-3) = (-2).$$

Con abuso di scrittura, in genere, scriveremo

$$1 - 3 = -2,$$

intendendo che i numeri naturali presenti in una espressione in $\mathbb{Z}$ sono comunque considerati con il segno $+$ premesso, mentre si accetta **la convenzione** che nel "prodotto" tra i segni

$$\text{“}+\text{”} \cdot \text{“}-\text{”} = \text{“}-\text{”}.$$

È molto importante capire che c'è una grande differenza tra

$$1 \in \mathbb{N}$$

e

$$+1 \in \mathbb{Z},$$

seppure vengono identificati quasi fossero la stessa cosa.

7. Le quattro operazioni in $\mathbb{Z}$

Abbiamo già definito l'addizione di due elementi di $\mathbb{Z}$ come la "somma termine a termine" degli elementi nelle coppie delle relative classi di equivalenza. A partire dalla somma, come fatto precedentemente per $\mathbb{N}$, si definiscono le altre tre operazioni. Nel *prodotto,* il fatto nuovo è che gli elementi che si moltiplicano tra loro, non devono essere necessariamente anche in $\mathbb{N}$, per cui bisogna capire come fare il prodotto di un numero del "nuovo tipo" con uno del "vecchio tipo" o, anche, come si moltiplicano due numeri del "nuovo tipo". Gli elementi del "vecchio tipo" li chiamiamo *numeri positivi,* mentre quelli del "nuovo tipo", li denotiamo come *numeri negativi.*

Ora, se moltiplichiamo due numeri positivi, essendo essi identificati con elementi di $\mathbb{N}$, chiaramente il loro prodotto dovrà essere ancora un numero positivo, dato che, ancora una volta, dovrà "uscire" un numero identificabile con un elemento di $\mathbb{N}$. Inoltre abbiamo già osservato che il "prodotto di due segni diversi" è un segno negativo [28]! Bisogna solo decidere cosa succede se moltiplichiamo due numeri negativi tra loro. Possiamo ridurre i nostri ragionamenti a sapere solo come si comporta il prodotto $(-1)\cdot(-1)$, dato che ogni numero negativo $-n$ può essere visto come prodotto $(-1)\cdot(+n)$, e quindi il prodotto tra due numeri negativi può, a sua volta, essere visto come

$$(-n)\cdot(-m) = ((-1)\cdot(+n))\cdot((-1)\cdot(+m)) = ((-1)\cdot(-1))\cdot((+n)\cdot(+m)).$$

Ma quanto fa $(-1)\cdot(-1)$?
Osserviamo che $-1 = [(0,1)]$ mentre $+1 = [(1,0)]$ e, dato che già sappiamo che $(-1)\cdot(+1) = -1$, ovvero $[(0,1)]\cdot[(1,0)] = [(0,1)]$, banalmente pensiamo che il segno negativo davanti alla classe $[(1,0)]$ *inverte la coppia* dei numeri dentro la classe di equivalenza: in pratica

$$-[(1,0)] = [(0,1)]$$

e quindi anche

$$-[(0,1)] = [(1,0)].$$

Quest'ultima scrittura, comunque, significa proprio

$$(-1)\cdot(-1) = +1.$$

A questo punto il quadro è completo: il prodotto si esegue semplicemente moltiplicando i numeri, come se i segni non ci fossero e, mettendo davanti al risultato, il prodotto "formale" tra i segni, secondo la regola

[28]Questo almeno formalmente, dato che non ha molto significato parlare di *prodotto tra segni!*

Segni diversi scrivere "-", segni uguali scrivere "+".

Esempio:

$$-4 \cdot (+2) = -(4 \cdot 2) = -8.$$

$$-3 \cdot (-5) = +(3 \cdot 5) = +15.$$

Si notino gli "abusi di notazioni" in quanto i primi numeri negativi, in entrambe le espressioni, non sono stati messi tra parentesi..

Le operazioni inverse, come al solito, si definiscono a partire da quelle "dirette" già note: per la *sottrazione,* trovare quel numero che sommato ad un altro, dà come risultato un numero noto. Ovvero, ad esempio, se $+4 + [?] = -3$, quale numero deve essere messo a posto del punto interrogativo? La risposta è data da

$$-3 - (+4) = -3 - 4 = -7.$$

Per la *divisione,* trovare quel numero che moltiplicato per un altro, dà come risultato un numero noto. Ad esempio, se $-2 \cdot [?] = +10$ quale numero è adatto a sostituire il punto interrogativo? La risposta è data da $+10 : (-2)$. Ora, dato che la divisione non è altro che una moltiplicazione letta in modo inverso, se il prodotto tra segni diversi è negativo e tra segni uguali è positivo, ancora questo varrà per la divisione, ovvero la "divisione" [29] tra segni diversi produce un numero negativo, altrimenti il risultato sarà positivo. Per cui, nel nostro esempio, si ha

$$(+10) : (-2) = -(10 : 2) = -5.$$

Anche qui, osserviamo, non si può fare sempre la divisione: esattamente come in $\mathbb{N}$, ammesso che ora sappiamo fare una "divisione formale" tra segni, non è detto che i numeri che stanno dopo i segni si possano effettivamente dividere! D'altra parte, $\mathbb{Z}$, è stato costruito per risolvere il problema della sottrazione e non della divisione: nell'esempio dato precedentemente, infatti, siamo riusciti a determinare un numero che aggiunto ad un altro, dà come risultato un numero minore dell'addendo noto.

8. L'insieme dei numeri Razionali

L'unica operazione rimasta che, ancora, non può essere sempre svolta è la divisione. Ora ci proponiamo di risolvere anche tale problema, "allargando" l'insieme $\mathbb{Z}$: anche in questo caso, sebbene possiamo pensare di "aggiungere" nuovi numeri a quelli già noti, in effetti stiamo andando a costruire un nuovo insieme, un sottoinsieme del quale

[29] Formale.

può essere *identificato* con i numeri già noti [30]. L'insieme che introdurremo a breve sarà denotato con $\mathbb{Q}$ e si chiamerà *insieme dei numeri razionali* o, più familiarmente, *insieme delle frazioni.*
Premettiamo subito che, anche in $\mathbb{Q}$, rimarrà sempre il problema di poter effettuare la **divisione per zero,** ovvero, *tale operazione non si potrà comunque fare:* la cosa buona è che tutte le altre operazioni, che già abbiamo visto nei capitoli precedenti, si potranno fare senza problemi.

Consideriamo il prodotto cartesiano $\mathbb{Z}\times\{\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$, ovvero tutte le coppie per le quali il secondo elemento è escluso che sia zero [31]. Su di esso introduciamo la relazione " $\sim$ ", tale per cui due coppie sono in relazione per come di seguito imposto:

$$(a,b) \sim (n,m) \quad \text{se e solo se} \quad a\cdot m = b\cdot n.$$

Questo tipo di moltiplicazione, "per componenti incrociate", si chiama, generalmente, *prodotto a croce.*

PROPOSIZIONE 31. *Questa relazione è una* relazione di equivalenza.

Dim:

Riflessività: è poco più di una osservazione che vale la proprietà riflessiva, infatti se consideriamo la coppia generica (a,b), con $b\neq 0$, è evidente che

$$(a,b)\sim(a,b),$$

dato che vale la proprietà commutativa per le moltiplicazioni

$$a\cdot b = b\cdot a.$$

Simmetricità: verificare la proprietà riflessiva è ancora più banale! nei fatti, considerando due coppie generiche di numeri (a,b) e (c,d), le cui seconde componenti non sono nulle, è chiaro che se

$$(a,b)\sim(c,d) \quad \text{allora} \quad (c,d)\sim(a,b),$$

infatti stiamo solo dicendo che se

$$a\cdot d = b\cdot c \quad \Rightarrow \quad c\cdot b = d\cdot a.$$

Abbiamo, nei fatti, solo letto la prima uguaglianza da destra a sinistra, invece che da sinistra a destra!

Transitività: per verificare questa ultima condizione, consideriamo tre coppie di numeri, di cui le seconde componenti non sono

[30] Sia di $\mathbb{N}$, che di $\mathbb{Z}$.

[31] Capiremo più avanti, nella costruzione, perché escludiamo che la seconda componente sia nulla.

nulle; siano esse (a,b), (c,d) e (n,m). Supponiamo che sussistano le relazioni
$$(a,b) \sim (c,d) \quad \text{e} \quad (c,d) \sim (n,m);$$
ovvero, scrivendo gli opportuni prodotti a croce, che
$$a \cdot d = b \cdot c \quad \text{e} \quad c \cdot m = d \cdot n.$$
A questo punto moltiplichiamo "membro a membro" le due uguaglianze, scrivendo
$$a \cdot d \cdot c \cdot m = b \cdot c \cdot d \cdot n$$
e dividiamo entrambe le quantità per il numero comune $c \cdot d$ ottenendo
$$a \cdot \cancel{d \cdot c} \cdot m = b \cdot \cancel{c \cdot d} \cdot n.$$
Quel che rimane è
$$a \cdot m = b \cdot n,$$
ovvero che
$$(a,b) \sim (n,m),$$
il ché verifica la proprietà transitiva.

c.v.d.

DEFINIZIONE 46. *Chiamiamo* insieme dei numeri **razionali** *l'insieme quoziente*
$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} \backslash \{0\}\}/_\sim$$
su di esso definiamo l'operazione "naturale" di prodotto *tra due elementi*
$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(a \cdot c, b \cdot d)].$$

Tralasciamo di verificare che tale operazione è ben posta [32] e passiamo a dare qualche esempio di classe di equivalenza, prima di introdurre le altre tre operazioni di addizione, sottrazione e divisione.

Esempio:
$$\begin{aligned}
[(1,1)] &= [(2,2)] = [(3,3)] = \dots \\
[(2,1)] &= [(4,2)] = [(6,3)] = \dots \\
[(-3,1)] &= [(6,-2)] = [(-21,7)] = \dots \\
[(2,4)] &= [(4,8)] = [(10,20)] = \dots \\
[(3,-2)] &= [(-9,6)] = [(15,-10)] = \dots \\
[(1,3)] &= [(2,6)] = [(4,12)] = \dots
\end{aligned}$$

[32]Ricordiamo ciò significa essenzialmente che *essa non dipende dai rappresentati scelti nella stessa classe di equivalenza,* ovvero se si cambiano le coppie con altre equivalenti, il risultato rimane lo stesso: lo studente volenteroso è invitato, comunque, a dimostrarlo.

Proviamo ora a fare qualche operazione:

$$[(3,1)]\cdot[(5,1)]=[(3\cdot 5,1\cdot 1)]=[(15,1)]$$

e

$$[(-2,1)]\cdot[(4,-1)]=[(-2\cdot 4,1\cdot(-1))]=[(-8,-1)]=[(8,1)].$$

Intuitivamente capiamo che, a meno del segno, le classi di equivalenza di coppie, le cui seconde componenti sono l'unità, si comportano [33] come i numeri interi. Ancora qualche altro esempio:

$$[(2,3)]\cdot[(6,5)]=[(2\cdot 6,3\cdot 5)]=[(12,15)]=[4,5].$$

Si poteva anche arrivare al risultato in modo più veloce, osservando che, nella stessa classe di equivalenza, compaiono tutte coppie in cui entrambi i numeri vengono moltiplicati per uno stesso numero, per cui potevano scrivere:

$$[(2,3)]\cdot[(6,5)]=[(2\cdot 6,3\cdot 5)]=[(2\cdot 2\cdot \cancel{3},\cancel{3}\cdot 5)]=[4,5].$$

Questo metodo di "cancellare" numeri uguali da entrambe le componenti di una coppia, si chiama *semplificazione* e sarebbe opportuno farla appena possibile! Così pure si ha

$$[(4,5)]\cdot[(5,4)]=[(4\cdot 5,5\cdot 4)]=[\cancel{4}\cdot\cancel{5},\cancel{5}\cdot\cancel{4}]=[(1,1)].$$

9. Le quattro operazioni in $\mathbb{Q}$

Della "moltiplicazione", ovvero del prodotto, abbiamo già parlato precedentemente, introducendola come "operazione naturale". Meno naturale, paradossalmente, è l'addizione, ovvero la somma di due classi d'equivalenza: essa non può essere effettuata componente per componente, altrimenti non sarebbe ben definita rispetto alla relazione di equivalenza data [34]! Si può dimostrare [35] che l'unico modo per rendere la somma [36] compatibile con la relazione d'equivalenza data è definirla come:

$$[(a,b)]+[(c,d)]=[(a\cdot d+b\cdot c,b\cdot d)],$$

ovvero, per la differenza,

$$[(a,b)]-[(c,d)]=[(a\cdot d-b\cdot c,b\cdot d)].$$

[33] Almeno per il prodotto.

[34] Si provi con un esempio, prendendo quattro coppie di numeri interi, a due a due equivalenti, effettuando la somma componente per componente: i risultati non sono -alla fine- equivalenti.

[35] Lo accettiamo senza dimostrazione.

[36] Lo stesso dicasi per la differenza, essendo lo stesso tipo di operazione..

Una osservazione è d'uopo: notiamo che la prima componente della coppia risultante come "somma" è data dal *prodotto a croce* delle componenti delle coppie che si vanno a sommare; mentre la seconda componente non è altro che il *prodotto diretto* delle due seconde componenti. Il prodotto a croce l'avevamo incontrato proprio nella definizione dell'equivalenza che definisce l'insieme $\mathbb{Q}$ e questo rende la definizione della somma tra numeri razionali un po' meno astrusa di quanto si possa immaginare a primo impatto! Qualche esempio prima di continuare.

Esempio:

$$\begin{aligned}[(2,3)]+[(1,2)] &= [(2\cdot 2+3\cdot 1, 3\cdot 2)] = \\ &= [(4+3,6)] = [(7,6)].\end{aligned}$$

Esempio:

$$\begin{aligned}[(3,4)]-[(2,3)] &= [(3\cdot 3-4\cdot 2, 4\cdot 3)] = \\ &= [(9-8,12)] = [(1,12)].\end{aligned}$$

L'ultima operazione rimasta è la divisione. Dato che vale sempre il discorso che è l'operazione inversa della moltiplicazione, dovrà essere fatta in modo tale che se

$$[(a,b)]\cdot[(c,d)] = [(x,y)]$$

allora

$$[(x,y)] : [(a,b)] = [(c,d)].$$

Ma l'operazione di prodotto è fatta componente per componente, per cui la prima espressione si può scrivere come

$$[(a\cdot c, b\cdot d)] = [(x,y)],$$

per cui, ricorrendo alla definizione di uguaglianza tra classi di equivalenza, dovrà essere

$$a\cdot c\cdot y = b\cdot d\cdot x.$$

Riscritta questa ultima espressione secondo classi di equivalenza si ottiene:

$$[(c,d)] = [(b\cdot x, a\cdot y)].$$

Ergo

$$[(x,y)] : [(a,b)] = [(x\cdot b, y\cdot a)].$$

Osserviamo che non sussistono più limitazioni nell'effettuare la divisione, in quanto l'abbiamo ricondotta a fare -nuovamente- un prodotto a croce tra le componenti delle coppie di numeri che rappresentano i numeri razionali.

Esempio:

$$[(5,2)]:[(3,4)] = [(5\cdot \cancel{4}, \cancel{2}\cdot 3)] = \\ = [(5\cdot 2, 1\cdot 3)] = [(10,3)].$$

Esempio: Vediamo che è stato risolto il "problema della divisione" facendo, ad esempio, $3:5$.

$$[(3,1)]:[(5,1)] \quad = [(3\cdot 1, 1\cdot 5)] \quad = [(3,5)].$$

Esempio: Oppure ancora $2:8$.

$$[(2,1)]:[(8,1)] \quad = [(\cancel{2}\cdot 1, 1\cdot \cancel{8})] \quad = [(1,4)].$$

10. Una notazione più familiare

In genere, quando uno pensa ai numeri razionali, si rappresenta subito quei numeri, che sono stati presentati durante il corso degli studi elementari, denominate *frazioni.* In effetti le due nozioni coincidono! Basta introdurre la notazione seguente:

$$[(a,b)] = \frac{a}{b}.$$

In tal modo, le operazioni introdotte nei paragrafi precedenti, si riscrivono più notoriamente come:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} &= \frac{a\cdot d \pm b\cdot c}{b\cdot d} \\ \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} &= \frac{a\cdot c}{b\cdot d} \\ \frac{a}{b}:\frac{c}{d} &= \frac{a\cdot d}{b\cdot c}. \end{aligned}$$

Osservazione: Vorremmo far notare che nell'operazione di somma/differenza, non è necessario determinare -come s'immagina che sia stato insegnato da altri insegnanti- il $m.c.m.$ tra b e d : in effetti noi richiediamo che si faccia semplicemente il prodotto tra i due, ovvero che si trovi il $b-$esimo multiplo di d ovvero il $d-$esimo multiplo di b. Perché, allora, è stato insegnato diversamente? il fatto è che le due operazioni portano sempre allo stesso risultato. Infatti, se $m.c.m.(b,d) = m$, osservando che $b\cdot d$ deve necessariamente essere un multiplo di tale m e quindi esisterà un numero n tale per cui $b\cdot d = m\cdot n$, potremmo scrivere, utilizzando la notazione "per classi di equivalenza", che

$$[(a,b)] + [(c,d)] = [(a\cdot d + b\cdot c, b\cdot d)],$$

è

$$[(a,b)] + [(c,d)] = [(a\cdot d + b\cdot c, m\cdot n)],$$

ma

$$d = (m \cdot n) : b \quad \text{e} \quad b = (m \cdot n) : d$$

per cui

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(a \cdot ((m \cdot n) : b) + ((m \cdot n) : d) \cdot c, m \cdot n)],$$

mettendo in evidenza n nella prima componente della coppia e semplificando, si ottiene:

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(\cancel{n} \cdot (a \cdot (m : b) + (m : d) \cdot c), m \cdot \cancel{n})],$$

ovvero la nota regola [37]

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(a \cdot (m : b) + c \cdot (m : d), m)],$$

riscritta con la nuova notazione

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot (m : b) + c \cdot (m : d)}{m}.$$

La scrittura $\frac{a}{b}$ viene detta *frazione,* il numero a si chiama *numeratore* ed il numero b *denominatore.* Abbiamo appena dimostrato che per determinare la somma di due frazioni *non è necessario* calcolare il minimo comune multiplo tra i denominatori, essendo nella definizione richiesto solo il prodotto tra di essi. In verità basterebbe determinare un qualsiasi multiplo comune tra essi, per poter definire la somma tra le due frazioni! Non ci dilunghiamo comunque ancor oltre su tale argomento.

11. Qualche osservazione di calcolo

Ora che sappiamo cosa sono i numeri e come si opera con essi, riflettiamo un attimo sul fatto che, nella pratica, mai nessuno pensa realmente di "passare" attraverso le classi di equivalenza per effettuare i calcoli che servono nel quotidiano. Questo perché risulta più veloce applicare metodi di calcolo direttamente sulle notazioni maggiormente familiari; ma anche per fare ciò è consigliabile ragionare su quel che si ha di fronte, piuttosto che applicare regole e tecniche in modo cieco ed ottuso. Ad esempio, se si devono sommare due frazioni aventi denominatore comune, non ha senso moltiplicare i denominatori e fare il prodotto a croce numeratore-denominatore: basta sommare direttamente i numeratori! Così è altrettanto vero che **alcune operazioni devono risultare immediate e naturali** senza dover effettuare alcun calcolo! Tipico esempio è la sottrazione di una parte dell'unità

[37] In verità inutile!

dall'unità stessa: ad esempio

$$1 - \frac{1}{3}.$$

Dovrebbe essere evidente che se si toglie da un intero, la sua terza parte, *devono rimanere* gli altri due terzi. Si immagini l'unità come qualcosa di "intero", ad esempio una torta; *le frazioni possono essere interpretate come l'indicazione di come gli interi vegono suddivisi* [38]. Per cui un terzo significa essenzialmente dividere l'unità in tre (e prenderne un pezzo). Per questo è naturale ed immediato che

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Lo stesso dicasi per una somma del tipo

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{6},$$

in cui si individua subito che $\frac{1}{6}$ **è la metà** dell'altra frazione, per cui il risultato deve essere ancora $\frac{1}{6}$, dovendo consistere dell'altra metà [39].

Altresì è vero che se due frazioni possono essere portare a denominatore comune considerando solo stessi multipli del numeratore e del denominatore, è conveniente passare alle frazioni equivalenti e sommare quelle con gli stessi denominatori, ad esempio:

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{5}{6}$$

che calcoliamo, applicando le equivalenze, come:

$$\frac{1}{4} + \frac{6}{4} - \frac{2}{6} + \frac{5}{6} = \frac{7}{4} + \frac{3}{6}$$

ovvero

$$\frac{7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4} + \frac{2}{4} = \frac{9}{4}.$$

Questi passaggi, è auspicabile che siano stati capiti ed apprezzati per la loro semplicità ed eleganza.

Per esperienza, sentiamo il dovere di osservare che le seguenti espressioni sono tutte indicanti la stessa quantità, per cui lo studente non deve aver dubbi sul fatto che possa "giocare" a proprio piacimento con esse, al fine di rendere i calcoli più agevoli e veloci:

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}, \quad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b},$$

[38] In parti uguali.

[39] In questo caso è come se l'unità stessa fosse $\frac{1}{3}$.

in particolare, queste ultime uguaglianze ci suggeriscono di **associare il segno negativo di una frazione al numeratore di essa!**

Esempio: Dovendo calcolare l'espressione

$$\frac{4}{3}-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}+\frac{1}{6}$$

noi preferiamo rivedere il tutto sotto l'espressione equivalente

$$\frac{4}{3}+\frac{-1}{2}+\frac{-5}{4}+\frac{1}{6}$$

e poi procedere come al solito, per frazioni equivalenti,

$$\frac{8+1}{6}+\frac{-2-5}{4}=\frac{3}{2}+\frac{-7}{4}=$$

$$=\frac{6-7}{4}=\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}.$$

In ultimo vogliamo far osservare quanto sia importante "piazzare" le linee di frazione al posto giusto [40]. Se consideriamo infatti

$$\frac{\frac{1}{2}}{2}$$

essendo questa quantità indicante *la metà della metà,* essa risulta essere (linea di frazione principale sopra l'ultimo 2)

$$\frac{1}{4}.$$

D'altra parte, considerando la frazione

$$\frac{1}{\frac{2}{2}},$$

dove la linea di frazione principale è quella immediatamente successiva all'1, essa diventa

$$\frac{1}{1}=1,$$

eppure entrambe le "frazioni di frazioni" riportano gli stessi numeri uno sull'altro! Quindi bisogna essere ordinati e stare attenti: non è pedanteria del docente, è un'esigenza di chiarezza!

[40] E, conseguentemente, i simboli di uguaglianza allineati alle linee di frazione principale!

11.1. Potenze ad esponente negativo. In ultimo, osserviamo che, secondo le regole delle potenze già date,

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m},$$

per cui, se $m = -n$ si ha anche

$$a^n \cdot a^{-n} = a^0 = 1.$$

Questo vuol dire che a^{-n} è il numero "inverso" di a^n, ovvero è proprio

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Infatti sussistono le banali uguaglianze

$$a^n : a^n = \frac{a^n}{a^n} = a^n \cdot \frac{1}{a^n}.$$

Visto che $1^n = 1$ per qualsiasi esponente finito n, si ha anche

$$\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

In altri termini, *se si ha un esponente negativo, invertendo la base, la potenza si riscrive con l'esponente positivo.*

12. Rappresentazione decimale e frazioni generatrici

Abbiamo già introdotto la "rappresentazione decimale" parlando dei numeri naturali. Ora osserviamo che le potenze di 10 ad esponente negativo sono tutte del tipo

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n}.$$

Osserviamo, inoltre, che una qualsiasi frazione del tipo

$$\frac{a}{10^n}$$

può essere pensata come il prodotto

$$a \cdot \frac{1}{10^n},$$

ed anche, osserviamo che, se moltiplichiamo tale frazione per 10^n, si ottiene semplicemente a. Ad esempio:

$$\frac{3}{100} = 3 \cdot \frac{1}{100} = 3 \cdot 10^{-2}.$$

Proviamo ora a considerare il numero rappresentato dalla seguente espressione:

$$2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}.$$

Fino alla potenza 0 di 10 abbiamo semplicemente il numero 2143, dopodiché seguono (come somma) $\frac{5}{10}+\frac{7}{100}$ ovvero $\frac{50+7}{100}=\frac{57}{100}$. Riscrivendo tale somma utilizzando le frazioni, scriveremo

$$2143+\frac{57}{100}=\frac{214300+57}{100}=\frac{214357}{100}.$$

È immediato notare che le cifre adoperate per scrivere il numeratore non sono altro che le cifre prese in ordine nella rappresentazione "polinomiale" precedente. Potremmo evitare di scrivere la frazione se *conveniamo* di separare le cifre provenienti da potenze negative di 10 tramite un opportuno simbolo: ora è solo una questione di gusti! C'è chi preferisce utilizzare il "." e chi preferisce utilizzare la ",". Nei fatti, comunque, scriveremmo sempre le prime quattro cifre a sinistra e le ultime due cifre a destra di tale simbolo di separazione:

$$2143.57 \quad \text{oppure} \quad 2143,57.$$

Si distinguono tre tipi di rappresentazioni decimali:

- finite,
- infinite periodiche,
- infinite aperiodiche.

Le prime due sono associate ai numeri razionali [41], il terzo tipo è stato introdotto nella prima parte del libro come rapporto corrispondente a grandezze incommensurabili e, comunque, il suo studio sarà centrale nello sviluppo dell'algebra di secondo grado. Dire che una rappresentazione decimale è finita significa semplicemente che dopo la virgola ci sono cifre, per quanto numerose, comunque in numero finito. Le rappresentazioni infinite periodiche, invece, dopo la virgola presentano un'infinità di numeri che, comunque, ad un certo punto si ripetono o singolarmente o a gruppo. Procediamo con degli esempi e vediamo anche come si fa a risalire alle frazioni a cui tali rappresentazioni sono associate.

Esempio:

$$3,3434343434... \quad \text{oppure} \quad 6,777777777777...$$

o ancora

$$5,352435243524... \quad \text{o anche} \quad 2,346565656565...$$

[41] Dimostreremo a breve, infatti, che tutti i numeri razionali hanno una rappresentazione decimale finita o finita-periodica e viceversa, che queste rappresentazioni sono sempre associate ad una frazione.

intendendo con i punti sospensivi che si ripetono, nel primo caso le cifre 34, nel secondo il 7, nel terzo 3524 e nel quarto caso le cifre 65.

Per comodità, le cifre che si ripetono, si suole riunirle sotto una lineetta, per cui avremmo -facendo riferimento agli esempi di prima- $3,\overline{34}$, ovvero $6,\overline{7}$, o ancora $5,\overline{3524}$ ed infine $2,34\overline{65}$.

In una rappresentazione decimale del tipo

$$n, abc\overline{de}$$

la parte che è sotto la lineetta si chiama *periodo,* in questo caso de, mentre la parte che sta tra la virgola ed il periodo si chiama *antiperiodo* nel nostro esempio è abc.

Osserviamo che da una frazione è facile giungere alla sua rappresentazione decimale, eseguendo ripetutamente la divisione. Chiaramente se il numeratore è minore del denominatore, basta moltiplicare per opportune potenze di dieci al fine di far diventare il numeratore (della frazione iniziale) maggiore del denominatore e poter continuare la divisione: il seguente esempio chiarirà il metodo.

Esempio: Rappresentiamo in forma decimale il numero $\frac{25}{8}$. Effettuando la divisione tra 25 e 8 si ottiene il quoziente 3 con il resto di 1. Moltiplicando per 10 il numeratore (della frazione iniziale) ed effettuando la divisione, si ottiene 31 con il resto di 2. Moltiplicando per 100 si ottiene 312 con il resto di 4. Moltiplicando per 1000, si ottiene 3125 senza resto. Quindi si ha che

$$\frac{25}{8} = \frac{25 \cdot 1000}{8 \cdot 1000} = \frac{25000}{8} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{3125}{1000} = 3,125.$$

In effetti l'algoritmo della divisione, imparato durante gli studi elementari, non fa altro che questo, però in modo più sistematico.

Esempio: Rappresentiamo la frazione $\frac{2}{3}$. In questo caso dovremmo partire direttamente moltiplicando per 10. Per cui faremmo 20 diviso 3, che dà 6 con il resto di 2. Ora siamo punto da capo: ovvero moltiplicando ancora per 10, quindi è come se moltiplicassimo per $10 \cdot 10 = 100$ il numeratore, otterremmo 66 con il resto di 2. È chiaro che il discorso è ripetitivo: ovvero si torna sempre ad avere come resto 2. Per cui la rappresentazione è periodica ed è

$$\frac{2}{3} = 0,\overline{6}.$$

12.1. Le frazioni generatrici. Il problema inverso, di risalire alla frazione rappresentata da una espansione decimale, invece, è più interessante, perché dà modo di ragionare sul metodo posizionale e sulla sua potenza di calcolo. Dovrebbe essere chiaro a tutti, ormai, che moltiplicare per potenze di dieci significa semplicemente "aggiungere" zeri in coda al numero ovvero, se il numero presenta una virgola, spostare quest'ultima di tanti posti -eventualmente aggiungendo zeri- per quanto dice l'esponente della potenza. Questa osservazione ci sarà utile a breve. L'idea fondamentale per risalire alla frazione generatrice: **vogliamo eliminare il periodo, sottraendolo da se stesso!** Questo si può realizzare in modo piuttosto semplice, isolando il periodo, sia che abbia l'antiperiodo, sia che non l'abbia, moltiplicando il numero per due opportune potenze di dieci [42]. Procediamo con degli esempi chiarificatori.

Esempio: Vogliamo risalire alla frazione generatrice del numero $1,\overline{34}$. A tal fine osserviamo che il periodo è già "isolato" dopo la virgola; ora osserviamo che se moltiplichiamo il numero in questione per 100, il risultato presenta lo stesso periodo isolato, infatti esce $134,\overline{34}$. Sottraiamo -termine per termine- nel modo seguente, i due numeri:

$$\begin{array}{rcl} 100 \cdot 1,\overline{34} & = & 134,\cancel{\overline{34}} \\ 1 \cdot 1,\overline{34} & = & 1,\cancel{\overline{34}} \quad - \\ \hline (100-1) \cdot 1,\overline{34} & = & (134-1),\cancel{\overline{0}} \end{array}$$

ovvero

$$99 \cdot 1,\overline{34} = 133,$$

da cui

$$1,\overline{34} = \frac{133}{99}.$$

Esempio: Troviamo la frazione generatrice del numero $3,21\overline{567}$. Osserviamo che il numero non presenta il periodo isolato. Per isolarlo si può moltiplicare per 100, o anche per 100000, ottenendo rispettivamente $321,\overline{567}$ e $321567,\overline{567}$. Ora operiamo come prima, ovvero sottraiamo termine a termine, ottenendo:

$$\begin{array}{rcl} 100000 \cdot 3,21\overline{567} & = & 321567,\cancel{\overline{567}} \\ 100 \cdot 3,21\overline{567} & = & 321,\cancel{\overline{567}} \quad - \\ \hline (100000-100) \cdot 3,21\overline{567} & = & (321567-321),\cancel{\overline{0}} \end{array}$$

[42] Ovvero spostando opportunamente la virgola, per come abbiamo fatto testé osservare.

ovvero
$$99900 \cdot 3,21\overline{567} = 321246,$$
da cui
$$3,21\overline{567} = \frac{321246}{99900},$$
ovvero, ridotta “ai minimi termini”,
$$3,21\overline{567} = \frac{5949}{1850}.$$
La cosa interessante da notare è che invece di moltiplicare per $100000 = 10^5$ e $100 = 10^2$ avremmo ugualmente potuto utilizzare le potenze 10^8 e 10^{11} : oppure una coppia qualsiasi tra queste quattro quantità! ovvero, ancora, altre potenze opportunamente prese [43]: la frazione generatrice, che avremmo trovato, sarebbe stata sempre la stessa!

12.2. Una identità paradossale. Qualcuno crede, erroneamente, che $0,\overline{9}$ sia una quantità prossima ad 1 ma non uguale all'unità: sembra che manchi sempre qualcosa! se noi fermassimo la sequenza infinita di 9 dopo la virgola, in effetti, mancherebbe qualcosa per arrivare ad 1, ma ora dimostriamo che
$$0,\overline{9} \quad \text{è} \quad 1.$$
Procediamo esattamente come per gli esempi di prima: moltiplichiamo per 10 e sottraiamo il numero stesso, che presenta già il periodo isolato. Questo è quello che avviene:
$$\begin{array}{rcl} 10 \cdot 0,\overline{9} & = & 9,\overline{\not{0}} \\ 1 \cdot 0,\overline{9} & = & 0,\overline{\not{0}} \\ \hline (10-1) \cdot 0,\overline{9} & = & (9-0),\overline{\not{0}} \end{array} \quad -$$
ovvero
$$9 \cdot 0,\overline{9} = 9;$$
ma l'unico numero che moltiplicato per 9 dà come risultato ancora 9 è uno, per cui
$$0,\overline{9} = 1.$$
Possiamo annoverare questa identità come uno dei tanti paradossi a cui porta il concetto di infinità.

[43] Lo studente riesce ad immaginare quali altre coppie avrebbero potuto andar bene e perché?

CAPITOLO 10

Impostazione di un modello risolutivo

Una delle principali attitudini del Matematico è quella di **risolvere problemi:** se, come abbiamo già scritto, la Matematica è *l'arte di imparare,* è anche vero che l'aver capito profondamente un problema spinge spesso alla volontà ed alla possibilità di risolverlo. Pertanto imparare le tecniche della Matematica per risolvere i problemi e poi non risolverne nemmeno uno durante il corso dei propri studi non ha alcun senso! che poi la Matematica sia così efficace per la risoluzione dei problemi, oppure per la lettura delle Leggi di Natura è un mistero che nessuno sa spiegarsi [1] . Ma come si fa a risolvere un problema? la prima cosa da fare è, sicuramente, capire quale sia il problema ed inquadrarlo nella tipologia giusta per poter poi applicare gli strumenti tecnici che conosciamo. Dopodiché bisogna estrapolare dal contesto i dati principali ed eliminare tutto il superfluo che, in genere, serve solo come "contorno di abbellimento" e potrebbe portare a distrarsi dall'obbiettivo principale. Come passo principale, quindi, si suggerisce di rappresentare i dati in una tabella, in modo che essi risultino facilmente accessibili e chiari da leggere. Se si vuole essere bravi, come in ogni attività, ci vuole, infine, un buon allenamento..

1. Problemi di "primo grado" ed equazioni

Per spiegare questo argomento, è opportuno partire subito da un esempio.

[1] Piace ricordare che un grande fisico del secolo scorso, Eugene P. Wigner, scrisse un breve saggio a tal proposito intitolato "**L'irragionevole efficacia della matematica**". Egli scrive frasi forti, tipo: «il miracolo dell'appropriatezza del linguaggio della matematica nella formulazione delle leggi della fisica», che ancora «non comprendiamo né forse meritiamo», per esprimere questo mistero, di cui già parlava Galileo nel "Saggiatore", quando espresse il seguente pensiero: «La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto».

PROBLEMA 5. *In un cortile vi sono polli e conigli: si contano in tutto 116 zampe e 34 teste. Quanti sono i polli e quanti i conigli?*

Risoluzione La prima osservazione da fare è che le teste sono in numero di una per ciascun animale, quindi il loro numero *equivale* al numero totale degli animali presenti nel cortile; mentre le zampe sono in numero di due per le galline e quattro per i conigli. Non sapendo quante galline ci stanno, indicheremo il loro numero con n, in tal modo, dato che in totale ci stanno 34 animali, il numero dei conigli è ben determinato e sarà $34 - n$. Detto questo, ci creiamo la seguente tabella di ovvia interpretazione:

	Galline	Conigli
Numero	n	34-n
Zampe	2	4

La domanda fondamentale è: "Come si ottiene il numero totale delle zampe?" Chiaramente sommando tutte quelle delle galline, che sono $2 \cdot n$, con tutte quelle contate per i conigli, che sono in numero di $4 \cdot (34 - n)$. A questo punto possiamo scrivere l'ovvia relazione

$$2 \cdot n + 4 \cdot (34 - n) = 116.$$

Una tale scrittura si chiama **equazione** [2] di primo grado. *Non occorre sviluppare tutta la teoria delle equazioni, basta ragionare* per arrivare a trovare quanto vale n.
Il principio fondamentale è:

> **In una uguaglianza, se una operazione viene effettuata su una delle due quantità, facendola anche sull'altra si ottiene ancora una uguaglianza!** [3].

Il fine è di *isolare* le quantità che contengono l'*incognita* n da un solo lato rispetto al simbolo di uguaglianza, questo perché, fatto ciò, la risoluzione dell'equazione diventa semplicemente il banale calcolo di una

[2] Su tale argomento, parleremo più diffusamente a breve.

[3] Qualcuno, questa banale osservazione, la chiama **principio d'identità**, noi la chiameremo, più simpaticamente, **principio della bilancia:** infatti, immaginando le due quantità -prima o dopo il segno di uguaglianza- come dei "pesi" che sono posti sui piatti di una bilancia messa in equilibrio (sullo zero), aggiungendo uno stesso peso ai due piatti, togliendolo, oppure dividendo le quantità in parti uguali ovvero raddoppiandole, triplicandole ecc.., la bilancia continua a stare in equilibrio.

divisione. A questo punto "risolviamo" l'equazione, ovvero *determiniamo* il giusto valore di n. Dapprima distribuiamo la moltiplicazione sulla somma, per eliminare le parentesi tonde:

$$2 \cdot n + 4 \cdot 34 - 4 \cdot n = 116,$$

e poi *contiamo quante* n *ci stanno,* raggruppandole in un'unica espressione:

$$-2n + 136 = 116.$$

Ora applichiamo il principio, testé menzionato, ripetutamente (dapprima togliamo 136 dalle due quantità prima o dopo l'uguale, poi moltiplichiamo entrambe le quantità per -1):

$$\begin{array}{rrcr} -2n & +\cancel{136} & = & 116 \\ & -\cancel{136} & & -136 \\ \hline -2n & & = & -20 \end{array}$$

per cui

$$2n = 20.$$

Questa si risolve banalmente con una semplice divisione [4]:

$$n = 20 : 2 \quad \Rightarrow \quad n = 10.$$

□

Problema 6. *Un signore acquista della legna per il camino. Durante il mese di dicembre ne brucia i tre settimi e, durante i mesi di gennaio e febbraio, i due quinti della rimanenza; gli avanzano, alla fine, dodici quintali di legna. Quanta legna aveva acquistato? Poi decide di rivendere la legna che gli era rimasta: ad un amico gliene vende cinque quintali, ad un prezzo vantaggioso, mentre alla suocera i rimanenti sette quintali, ad un prezzo doppio rispetto a quello fatto per l'amico. In tutto incassa 119,7 euro. A che prezzo ha veduto la legna all'amico?*

Risoluzione: Supponiamo che la quantità di legna acquistata sia data da n quintali. Dai dati del problema, si ricava la seguente tabella:

	Dicembre	Gennaio e Febbraio
Consumata	$\frac{3}{7} \cdot n$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot n$
Rimanenza	$n - \frac{3}{7} \cdot n = \frac{4}{7} \cdot n$	$(1 - \frac{2}{5}) \cdot \frac{4}{7} \cdot n = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot n = \frac{12}{35} \cdot n$

[4]In effetti si dovrebbe leggere: "qual è quel numero n che moltiplicato per due (ovvero raddoppiato) dà come risultato 20?

Ora noi sappiamo che i $\frac{12}{35} \cdot n$ equivalgono a 12 quintali, ovvero si può scrivere la banale equazione

$$\frac{12}{35}n = 12,$$

la cui soluzione risulta immediata dalle due osservazioni seguenti: se dodici trentacinquesimi equivalgono a dodici quintali, allora un trentacinquesimo equivale ad un quintale, per cui l'intero n equivale a $35 \cdot 1 = 35$ quintali. Ovvero, in formule:

$$\frac{1}{35}n = 1$$

(avendo diviso entrambe le quantità per 12) e

$$n = 35$$

(avendo moltiplicato entrambe le quantità per 35).

Ora risolviamo la seconda parte: sia x il prezzo di vendita (al quintale) fatto per l'amico, possiamo rappresentare i dati secondo la seguente tabella:

	Amico	Suocera
Prezzo	x	$2x$
Quantità	5	7

L'incasso è dato dalla somma di quanto ha guadagnato dall'amico e di quanto ha guadagnato dalla suocera, per cui è:

$$5 \cdot x + 7 \cdot 2x = (5 + 14) \cdot x = 19\,x.$$

Sappiamo che questa quantità equivale alla somma indicata nel problema, per cui imponiamo la seguente equazione:

$$19x = 119,7.$$

Ricaviamo x tramite la semplice divisione:

$$x = 119,7 : 19 = 6,3.$$

Per cui, all'amico, vende a $6,3$ euro al quintale.

□

1.1. Le equazioni. Chiamiamo *equazione* qualsiasi uguaglianza tra due quantità, almeno una delle quali può assumere valori diversi dipendentemente dalla variazione di uno o più parametri che prendono il nome di *variabili.* In breve:

$$1 = 1$$

non è una equazione, mentre

$$n - 1 = 2$$

è una equazione, dato che la variabile n, a seconda che sia 0, 1, 2, $\frac{1}{2}$, ecc... determina un valore diverso per la quantità riportata prima del simbolo di uguaglianza. Le quantità che si riportano prima o dopo il simbolo di uguaglianza determinano *i membri* dell'equazione: il primo membro è quello che viene prima del simbolo "=", il secondo membro quello che viene dopo. *Risolvere* un'equazione significa determinare i valori appropriati della variabile (o delle variabili) tali per cui, se sostituiti a posto delle rispettive variabili, l'equazione stessa diventa una identità: ovvero, dopo aver svolto tutti i calcoli nei due membri, si arriva ad una scrittura del tipo "numero uguale a se stesso". Ad esempio, nel caso di prima $n - 1 = 2$ sostituendo a n il numero 3 si ottiene proprio $2 = 2$, per cui 3 è *soluzione* dell'equazione. Uno si potrebbe domandare: ce ne sono altre? come si fa a pervenire alla soluzione di una equazione, ammesso che ci sia soluzione? Chiaramente è improponibile andare per tentativi, specie se ci sono numerosi calcoli da fare o, per lo meno, non molto facili. Il metodo è stato indicato nei paragrafi precedenti e lo riportiamo, qui di seguito, per comodità.

> **In una uguaglianza, se una operazione viene effettuata su una delle due quantità, facendola anche sull'altra si ottiene ancora una uguaglianza!**

Operando rispettando tale principio, si vuole arrivare a scrivere esattamente quanto vale la variabile. Proviamo con qualche esempio, facendo presente che per ora noi ci limiteremo al solo caso di equazioni in una variabile, i cui esponenti, visti come potenze, solo al più 0 od 1. Tale precisazione sarà maggiormente chiara quando si saranno studiati i polinomi e la teoria delle equazioni algebriche [5].

Esempio: Risolvere l'equazione

$$2x + 3 = 5(x - 1) + 3x + 2.$$

Procediamo come segue: prima "togliamo le parentesi" e sommiamo le quantità dello stesso tipo, poi eliminiamo -3 dal secondo membro e

[5] Ovvero stiamo trattando unicamente le **equazioni di primo grado.**

successivamente $2x$ dal primo, ottenendo...

$$\begin{array}{rrcc}
2x & +3 & = & 5x - 5 + 3x + 2 \\
\hline\hline
2x & +3 & = & 8x - \cancel{3} \\
 & +3 & & +\cancel{3} \\
\hline\hline
\cancel{2x} & +6 & = & 8x \\
-\cancel{2x} & & = & -2x \\
\hline
 & 6 & = & 6x
\end{array}$$

ovvero

$$6 = 6x \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

In genere, comunque, tutti questi passaggi si fanno "a mente" e contemporaneamente, senza indicare di volta in volta -come abbiamo fatto noi, per rendere chiari tutti i passaggi- cosa si aggiunge e cosa si sottrae.

Esempio: Risolvere l'equazione

$$3(x - 1) + 2x - 4 = 2x + 4(1 - 2x) + 1.$$

Procediamo come segue, lasciando il compito allo studente di capire cosa è stato fatto:

$$3x - 3 + 2x - 4 = 2x + 4 - 8x + 1,$$

$$3x - 7 = 5 - 8x,$$

$$11x = 12 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{12}{11}.$$

2. Polinomi

Sappiamo bene cosa significa fare il prodotto tra due numeri, che siano essi interi o razionali; ora, se noi vogliamo riferirci al prodotto tra due quantità qualsiasi, come abbiamo fatto già nei capitoli precedenti, possiamo soprassedere sull'assegnazione di un ben determinato numero alle quantità e lasciarle *indeterminate* ma individuate da lettere: ad esempio, quando scriviamo $a \cdot b$ indichiamo il prodotto tra la quantità a e la quantità b, essendo esse, tali quantità, possibilmente due numeri qualsiasi. Inoltre, quando scriviamo il prodotto tra un numero ed una lettera, ad esempio $4 \cdot a$, intendiamo quante volte abbiamo sommato ripetutamente la quantità a, con se stessa, ovvero, in altre parole, *quante "a" sono presenti* in una data somma. Ora vogliamo dare le regole per operare con scritture, possibilmente un po' più complicate, di questo tipo: ovvero come ci si deve comportare quando si ha da maneggiare *prodotti formali tra lettere e numeri.* Intanto chiariamo subito che parliamo di **prodotto formale** quando è indicata in modo più o meno esplicita una moltiplicazione, che non può effettivamente essere svolta, poiché non vengono indicate quantità numeriche, ma "grandezze" generiche. Anche nell'esempio di prima, $a \cdot b$, il prodotto è formale, dato che moltiplicare due lettere non ha proprio senso, a meno che non si pensi che esse possano assumere, di volta in volta, valori ben determinati. Detto questo, procediamo alla seguente fondamentale definizione:

DEFINIZIONE 47. *Un prodotto formale tra lettere e numeri si chiama* monomio.

In genere, il simbolo di prodotto viene sottinteso e si omette, comunque sia, un esempio di monomio, su cui qualcuno forse storcerà il naso, è il seguente:

$$2 \cdot a \cdot c \cdot 4 \cdot c \cdot c \cdot a \cdot 6 \cdot b \cdot z$$

ovvero, riscritto in forma abbreviata:

$$2\,a\,c\,4\,c\,c\,a\,6\,b\,z.$$

In genere, dato che la moltiplicazione gode della proprietà commutativa, conviene riordinare *mettendo tutti i numeri all'inizio della scrittura, successivamente tutte le lettere in ordine alfabetico.* In tal modo, il monomio di prima, diventa:

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot a\,a\,b\,c\,c\,c\,z.$$

È ancora meglio effettuare il prodotto tra i numeri ed utilizzare le regole delle potenze, raggruppando per basi uguali i vari risultati, con tale accorgimento il monomio del nostro esempio assume la forma "più amichevole" seguente:

$$48\,a^2\,b\,c^3\,z.$$

Quando non si possono più effettuare le operazioni di "riordinamento", "moltiplicazione tra numeri" o l'accorpamento di "potenze aventi le stesse basi", ovvero quando non si può più svolgere alcuna semplificazione di scrittura, allora si dice che il monomio è **in forma normale** o **in forma canonica.** Scrivere i monomi in forma canonica è molto utile per poter operare con essi e, soprattutto, per "riconoscerli".

DEFINIZIONE 48. *Due monomi sono* ***simili*** *se hanno la stessa parte letterale. Inoltre definiamo la parte numerica come il* coefficiente *del monomio, mentre la somma degli indici delle potenze della parte letterale la chiamiamo* grado *del monomio* [6] *.*

[6] Da notare che l'indice "indica" quante lettere, anche uguali, vengono moltiplicate per formare il monomio stesso.

Dato che il "coefficiente" numerico che precede la parte letterale può essere pensato come indicante quante unità della parte letterale seguente sono presenti in una somma, allora è ragionevole definire l'operazione di somma tra monomi se e solo se essi sono simili. Non volendo che questa nozione possa sfuggire all'attenzione dello studente distratto o che legge superficialmente questo paragrafo, a costo di essere ripetitivi, lo riportiamo ancora di seguito:

"La somma tra due monomi si può eseguire solo se essi sono simili!"

Nel caso ci si trovi di fronte ad una somma di monomi non simili tra loro, allora essa la si lascia così come si trova e la classifichiamo secondo la seguente definizione:

DEFINIZIONE 49. *Una "somma formale" di monomi* non simili *tra loro, si chiama* ***polinomio.*** *Si definisce, altresì, il* grado *del polinomio come il grado massimo tra tutti i gradi dei monomi che costituiscono il polinomio.*

3. Le quattro operazioni con i monomi

La prima operazione che consideriamo, di cui abbiamo appena trattato, è l'addizione [7]: essa può originare un monomio simile a quelli di partenza, nel caso i monomi che si sommano sono tra loro simili, oppure un polinomio.

Esempio: Sommiamo i seguenti monomi:

$$3a^2b \quad \text{e} \quad -5aba.$$

Dato che il secondo monomio è simile al primo, come risulta immediatamente se ricondotto a forma canonica, allora scriviamo:

$$3a^2b + (-5a^2b) = (3-5)a^2b = -2a^2b.$$

Osservazione: in pratica abbiamo applicato una *messa in evidenza formale* di tutta la parte letterale!

Esempio: Effettuiamo la somma seguente:

$$3a + 2b - 2a - 4ab - 2b + c^3 + 7ab,$$

in questo caso, operiamo ordinatamente come segue:

$$(3-2)a + (2-2)b + (-4+7)ab + c^3 =$$

$$= a + 3ab + c^3.$$

[7] Intesa come *somma algebrica* ovvero addizione o sottrazione

Osservazione: Anche se non sarebbe sbagliato scrivere $1a$, è sempre meglio sottintendere l'uno e scrivere unicamente la parte letterale, inoltre, con la pratica risulta più conveniente eliminare direttamente -non appena sia possibile!- le quantità che danno somma nulla (nel nostro esempio $2b - 2b$). Osserviamo inoltre che il risultato della somma dei sette monomi iniziali è un polinomio costituito da tre monomi [8].

Il prodotto tra monomi si effettua in modo ragionevolmente semplice facendo in modo di riscrivere "tutto il prodotto" in forma canonica, ovvero mettendo i due monomi, che si moltiplicano tra loro, l'uno appresso all'altro e considerando tutta l'espressione scritta come un unico monomio!

Esempio: Si moltiplichino $4a^2bc^3$ e a^4b^2cz. Il risultato è:

$$4a^2bc^3\,a^4b^2cz$$

ovvero

$$4a^6b^3c^4z.$$

La divisione tra monomi è un po' più problematica, dato che potrebbe portare, come risultato, a qualcosa che non è un monomio! La definizione, comunque, risulta piuttosto semplice, dato che si effettua dividendo la parte numerica e la parte letterale semplicemente dividendo i numeri tra loro ed applicando la nota regola delle potenze che si riferisce al quoziente tra potenze aventi la stessa base.

Esempio: Questo primo esempio dà come risultato ancora un monomio:

$$(3a^4b^3c^2x) : (2a^3bc) = \frac{3}{2}\frac{a^4}{a^3}\frac{b^3}{b}\frac{c^2}{c}x$$

ovvero

$$\frac{3}{2}a^{4-3}b^{3-1}c^{2-1}x = \frac{3}{2}ab^2cx.$$

Osservazione: Non è necessario scrivere le frazioni in modo separato o riportare per esteso l'applicazione delle regole delle potenze: l'abbiamo fatto solo per rendere più evidente il modo di procedere.

Esempio: Questo esempio porta ad un risultato che non è un monomio:

$$(4ab^3cx) : (2a^2b^2c).$$

Come prima effettuiamo la divisione "numero con numero" e "potenze per potenza", ottenendo:

$$\frac{4}{2}\frac{a}{a^2}\frac{b^3}{b^2}\frac{c}{c}x = 2\frac{1}{a}bx,$$

[8] Che può anche essere chiamato *trinomio.*

ovvero

$$\frac{2bx}{a},$$

che non è un monomio, dato che è presente una lettera al denominatore di un rapporto formale!

4. Tre operazioni tra polinomi

Tralasciando la divisione che vogliamo trattare più avanti nell'ambito del problema della fattorizzazione polinomiale in elementi irriducibili e della risoluzione delle equazioni di grado superiore al secondo, in questa sezione presentiamo le altre tre operazioni di somma, differenza e prodotto. In effetti c'è poco da dire. Quando si sommano due polinomi, se sono presenti monomi simili, essi si sommano per come abbiamo imparato a fare poc'anzi, altrimenti si lasciano indicati così come sono. Per il prodotto si applica la proprietà distributiva e si moltiplicano i singoli monomi di uno dei due polinomi fattori per ogni altro monomio dell'altro polinomio.

Esempio: Si trovi il risultato delle operazioni indicate:

$$(2a^2 - b + 3c - 6a) \cdot (3a - 4b^2 + c) + 6ac - 2c^2.$$

Applichiamo la distributività della somma sul prodotto e scriviamo [9]:

$$2a^2 \cdot (3a - 4b^2 + c) - b \cdot (3a - 4b^2 + c) +$$
$$+3c \cdot (3a - 4b^2 + c) - 6a \cdot (3a - 4b^2 + c) + 6ac - 2c^2,$$

e moltiplicando monomio per monomio si ha:

$$6a^3 - 8a^2b^2 + 2a^2c - 3ab + 4b^3 - bc + 9ac - 12b^2c + \underline{3c^2} +$$
$$-18a^2 + 24ab^2 - \cancel{6ac} + \cancel{6ac} - \underline{2c^2} =$$
$$= 6a^3 - 8a^2b^2 + 2a^2c - 3ab + 4a^2 - bc + 9ac - 12b^2c + c^2 - 18a^2 + 24ab^2.$$

5. Prodotti notevoli

Tra i prodotti di polinomi, alcuni assumono forma nota e "costante", per cui è utile imparare a riconoscerli ed ad operare in modo immediato con essi. In questa sezione ne presentiamo due: la cosiddetta *"somma per differenza"* e la *somma/differenza di due cubi.* Consideriamo dapprima il prodotto

$$(a + b) \cdot (a - b) = a \cdot (a - b) + b \cdot (a - b) =$$
$$= a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ba} - b^2 = a^2 - b^2,$$

[9] In genere lo si fa ma non si scrive, dato che è una operazione che si può fare "bene a mente".

ovvero, riassumendo,

$$\boxed{(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2.}$$

Questo prodotto notevole è molto utile nello svolgimento di calcoli più complessi: infatti le "incognite" a e b possono essere *quantità qualsiasi* e, pertanto, possono essere gestite in modo abbastanza arbitrario, come più fa comodo! Ad esempio, nel calcolo della seguente espressione, approfittiamo del prodotto notevole "somma per differenza" al fine di semplificare i passaggi e, soprattutto, svolgerne di meno!

$$(a+2b+3c-d)\cdot(a+2b-3c+d) = [(a+2b)+(3c-d)]\cdot[(a+2b)-(3c-d)].$$

A questo punto la risoluzione è abbastanza agevole poiché il secondo membro di tale uguaglianza è proprio una "somma per differenza", per cui proseguiamo uguagliando ancora a

$$(a+2b)^2-(3c-d)^2.$$

Svolgiamo -dato che ancora non sappiamo sviluppare i "quadrati di binomio" in modo veloce- applicando la definizione di quadrato, ottenendo

$$\begin{gathered}(a+2b)\cdot(a+2b)-(3c-d)\cdot(3c-d)=\\ =a^2+2ab+2ba+4b^2-(9c^2-3cd-3cd+d^2)=\\ =a^2+4ab+4b^2-9c^2+6cd-d^2.\end{gathered}$$

Questo modo di operare è sicuramente più efficace e leggibile che sviluppare la moltiplicazione monomio-per-monomio partendo direttamente dalla traccia! Inoltre, sapendo sviluppare velocemente i quadrati di binomio, la semplificazione dell'espressione risulterebbe ancora più agevole ed elegante.

Vediamo ora il secondo prodotto notevole, ovvero la somma o differenza di due cubi; a tal fine consideriamo l'espressione

$$(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$$

ovvero anche

$$(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2).$$

Nel primo caso si avrebbe, soprassedendo su alcuni passaggi elementari, lo sviluppo seguente:

$$a^3+\cancel{a^2b}+\cancel{ab^2}-\cancel{a^2b}-\cancel{ab^2}-b^3$$

ovvero, riassumendo,

$$\boxed{(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.}$$

Nel secondo caso si avrebbe:

$$a^3 - \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} + \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} + b^3$$

ovvero, riassumendo

$$\boxed{(a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.}$$

Si possono esprimere questi due prodotti notevoli unificando la scrittura in

$$\boxed{a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\cdot(a^2 \mp ab + b^2).}$$

Anche in questo caso, saper utilizzare tale prodotto notevole rende la semplificazione delle espressioni polinomiali più elegante e veloce. Si rimanda agli esercizi per apprendere un sapiente utilizzo dei prodotti notevoli fin qui presentati.

6. Le potenze del binomio ed il triangolo di Tartaglia

Molto spesso si ha bisogno di sviluppare potenze di binomi in modo veloce. In questa sezione presentiamo un modo molto semplice e veloce per fare questi calcoli. Iniziamo con il notare che

$$\boxed{(a+b)^0 = 1}$$

e che

$$\boxed{(a+b)^1 = a + b.}$$

Ora sviluppiamo la prima potenza non banale del binomio $(a+b)$.

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2.$$

Quindi,

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.}$$

Continuiamo con la terza potenza

$$\begin{gathered}(a+b)^3 = (a+b)^2\cdot(a+b) = \\ = (a^2 + 2ab + b^2)\cdot(a+b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = \\ = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{gathered}$$

Quindi riportiamo qui di seguito questo risultato:

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.}$$

Potremmo continuare in questo modo, ma preferiamo iniziare subito ad osservare qualcosa di interessante. In primis notiamo che nello sviluppo, tutte le potenze di a e di b, dello stesso ordine della potenza di binomio, si presentano con il coefficiente numerico 1. In secondo luogo osserviamo che i gradi dei singoli monomi sono tutti pari al valore della potenza del binomio: ovvero sono "omogenei". Ad esempio, nel cubo del binomio, tutti i monomi del suo sviluppo devono presentarsi di terzo grado! Come terza osservazione, notiamo che i coefficienti del secondo monomio e del penultimo, che abbiamo scritto, sono proprio pari all'esponente della potenza di binomio. In ultimo osserviamo che c'è una notevole relazione tra i coefficienti nei monomi dello sviluppo precedente con quello dello sviluppo successivo nelle potenze di binomio. Per capire questo, scriviamo solo i coefficienti numerici, in ordine di potenze decrescenti di a (ovvero di potenze crescenti di b), una riga appresso all'altra in questo modo:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
$$

e osserviamo ogni numero diverso da uno, in una data riga, non è altro che la somma dei numeri immediatamente "sopra" della riga precedente. Ad esempio, nella seconda riga il numero 2 è dato da $1+1$. Nella riga tre, i due tre sono dati rispettivamente da $1+2$ e da $2+1$. Immaginiamo quindi che la quarta potenza di binomio deve presentare i coefficienti formati con tale regola, il ché si può verificare essere vero,

$$1 \qquad 1+3 \qquad 3+3 \qquad 3+1 \qquad 1$$

ovvero la successiva riga nel triangolo dei coefficienti dovrà essere

$$1 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 4 \qquad 1.$$

Quindi, dovendo questi coefficienti corrispondere a monomi di quarto grado con potenze decrescenti di a, scriviamo lo sviluppo della quarta potenza di binomio come segue:

$$\boxed{(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.}$$

Speriamo che tale metodo sia stato capito ed apprezzato per la semplicità e l'ingegnosità: si potrebbe continuare in tal modo indefinitamente, comunque noi intendiamo dare solo un ulteriore esempio, sviluppando la sesta potenza del binomio. Prima di tutto ci troviamo la quinta riga e poi la sesta nello schema precedente:

$$1 \qquad 5 \qquad 10 \qquad 10 \qquad 5 \qquad 1$$

e

$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1.$$

Per cui avremo

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

Il triangolo formato dai coefficienti dei monomi prende il nome di **Triangolo di Tartaglia-Pascal.** In effetti è il matematico italiano che osservò le proprietà dei numeri presenti in tale schema e lo usò al fine di ricavare i coefficienti dei monomi nello sviluppo delle potenze di binomio; il pensatore francese, invece, osservò un'altra importante proprietà che noi incontreremo e spiegheremo meglio quando tratteremo del calcolo combinatorio e degli allineamenti di un certo numero di oggetti.

In ultimo osserviamo che i segni, presenti nei binomi, li consideriamo "legati" alle quantità che essi precedono, per cui applichiamo lo sviluppo delle potenze, moltiplicando i segni con la "regola dei segni", ad esempio, se avessimo di fronte $(a-b)^2,$ tale quadrato lo pensiamo come

$$(a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Esempio: Sviluppare i calcoli e semplificare la seguente espressione:

$$(x + 1)^2 - (2 - x)^2 + (x - 1)(x + 1).$$

Sviluppiamo i due quadrati di binomio e riconosciamo il prodotto notevole "somma per differenza":

$$x^2+2x+\cancel{1}-(4-4x+x^2)+x^2-\cancel{1} = 2x^2+2x-4+4x-x^2 = x^2+6x-4.$$

CAPITOLO 11

Polinomi: divisione e fattorizzazione

Completiamo il discorso riguardo le “quattro” operazioni con i polinomi: avevano lasciato in sospeso la *divisione.* Prima di introdurre, però, questa ultima operazione, ricordiamo come si effettua una divisione tra numeri interi: all'uopo riportiamo l'algoritmo che illustra l'operazione $23415 : 21$.

$$
\begin{array}{rl}
\overline{2\,3}\,\hat{4}\,\hat{1}\,\hat{5} & : \;\underline{\;21\;\;\;\;} \\
-\;21 & \;\;1\,1\,1\,5 \\
\hline
2\,4 & \\
-\;21 & \\
\hline
3\,1 & \\
-\;21 & \\
\hline
10\,5 & \\
-\;105 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Come si vede, *ad ogni passaggio compaiono sempre e solo tre operazioni:* prima di tutto una divisione tra “una parte del dividendo” ed il divisore. Poi la moltiplicazione tra il quoziente appena ottenuto per il divisore e, infine, la sottrazione tra la parte divisa ed il prodotto testé ottenuto. Questo processo va avanti fin quanto si può, ovvero **finché il resto non diventa minore del divisore**.
La divisione tra i polinomi avviene sulla falsariga dell'algoritmo della divisione tra numeri: prima di tutto si individuano i monomi di grado massimo tra il dividendo ed il divisore. Si effettua la divisione tra questi due monomi [1] e si scrive questo primo quoziente come primo risultato utile [2] . Poi si moltiplica quanto appena trovato per il divisore ed, in

[1] Praticamente applicando la regola delle potenze.
[2] Quoziente parziale, per la precisione.

ultimo, si sottrae il risultato dal polinomio dividendo. A questo punto il ciclo si ripete sostituendo il dividendo con l'ultimo risultato trovato. L'algoritmo prosegue **finché il resto non sia più divisibile per il divisore di partenza,** il ché avverrà, chiaramente, quando il monomio di grado massimo ottenuto nel terzo passaggio risulti di grado inferiore al monomio di grado massimo del divisore.
Un esempio chiarirà il metodo: si voglia dividere $4x^3+x-1-3x^2$ per il polinomio $1+2x+x^2$. Conviene, come prima cosa, riordinare i polinomi in ordine di grado decrescente rispetto ad x. Quindi scriviamo

$$(4x^3 - 3x^2 + x - 1) \ : \ (x^2 + 2x + 1).$$

A questo punto il monomio di grado massimo del dividendo è $4x^3$, mentre del divisore è x^2. Il quoziente tra questi due è:

$$\frac{4x^3}{x^2} = 4x.$$

Il monomio appena scritto è il primo "pezzo" del quoziente risultate dalla divisione che stiamo svolgendo!
Il prodotto di $4x$ con il divisore è

$$4x \cdot (x^2 + 2x + 1) = 4x^3 + 8x^2 + 4x.$$

Questo polinomio lo sottraiamo dal dividendo, ottenendo il "resto parziale", ovvero il dividendo successivo per continuare la divisione; per cui otteniamo:

$$4x^3 - 3x^2 + x - 1 - (4x^3 + 8x^2 + 4x) = -11x^2 - 3x - 1.$$

Procediamo con la divisione

$$(-11x^2 - 3x - 1) : (x^2 + 2x + 1).$$

Analogamente a prima abbiamo

$$\frac{-11x^2}{x^2} = -11.$$

Poscia,

$$-11 \cdot (x^2 + 2x + 1) = -11x^2 - 22x - 11$$

ed infine

$$-11x^2 - 3x - 1 - (-11x^2 - 22x - 11) = 19x + 10.$$

A questo punto l'algoritmo finisce poiché il resto è di grado inferiore al polinomio divisore.

In definitiva possiamo scrivere che il quoziente tra i due polinomi è $4x - 11$ con resto $19x + 10$, ovvero, in una forma più nota [3] e meglio intellegibile:

$$(4x^3 - 3x^2 + x - 1) = (x^2 + 2x + 1) \cdot (4x - 11) + (19x + 10).$$

Ora rappresentiamo l'algoritmo in modo familiare:

$$\begin{array}{rl|l}
 & 4x^3 - 3x^2 + x - 1 & : \ \underline{x^2 + 2x + 1} \\
- & (4x^3 + 8x^2 + 4x) & \quad 4x - 11 \\ \hline
 & -11x^2 - 3x - 1 & \\
- & (-11x^2 - 22x - 11) & \\ \hline
 & 19x + 10 &
\end{array}$$

Lo stesso algoritmo si può utilizzare per la divisione di polinomi rispetto ad una qualsiasi "incognita/variabile" scelta tra quelle costituenti i vari monomi, ad esempio, si voglia dividere il polinomio $2a^3x^2 + 3a^2x - 3a + x$ per il polinomio $a^2x - x$ rispetto all'incognita a. Procederemo considerando le lettere diverse da a alla stregua dei coefficienti numerici, anzi riscriviamo il tutto in questa forma:

$$(2x^2\, a^3 + 3x\, a^2 - 3\, a + x) : (x\, a^2 - x).$$

Allora sarà:

$$\begin{array}{rl|l}
 & 2x^2\, a^3 + 3x\, a^2 - 3\, a + x & : \ \underline{x\, a^2 - x} \\
- & (2x^2\, a^3 - 2x^2\, a) & \quad 2x\, a + 3 \\ \hline
 & 3x\, a^2 + (2x^2 - 3)\, a + x & \\
- & (3x\, a^2 - 3x) & \\ \hline
 & (2x^2 - 3)\, a + 4x &
\end{array}$$

Risultato che sarebbe stato, chiaramente, differente se la divisione l'avessimo svolta rispetto alla "lettera" x.

[3] Si veda la divisione tra interi "alla maniera di Euclide"!

1. La divisibilità e la fattorizzazione

Se un polinomio, diciamo P_1, diviso per un altro, per esempio P_2, dà resto nullo, allora, detto Q il quoziente ottenuto, si ha che

$$P_1 = P_2 \cdot Q.$$

In questo caso diremo che il polinomio P_1 è stato *fattorizzato* tramite P_2 e Q e che P_2 è un *divisore* di P_1 [4], altresì diciamo che P_1 è un polinomio *riducibile* o anche *divisibile* per P_2. La questione della fattorizzazione per i polinomi è analoga a quella della decomposizione dei numeri nel prodotto di numeri più piccoli. Abbiamo già visto che i numeri sono essenzialmente di due tipi: o *primi* [5], oppure prodotti di numeri primi [6]. Una situazione del genere si riscontra anche nel "mondo" dei polinomi; infatti essi si possono classificare in due tipi: o sono *irriducibili,* ovvero non divisibili per alcun altro polinomio di grado inferiore, tranne per se stessi ed uno, oppure sono prodotti di polinomi di grado inferiore. C'è ora da stabilire quali siano i polinomi irriducibili e, contestualmente, come riconoscerli. Un altro problema successivo, da risolvere, è capire come fattorizzare un polinomio nel caso esso non fosse irriducibile.

Il seguente teorema è giusto una semplice osservazione, ma preferiamo metterne in risalto l'enunciato poiché risulta fondamentale.

PROPOSIZIONE 32. *I polinomi di primo grado sono tutti irriducibili.*

Dim.: se fossero riducibili, ci dovrebbero essere due polinomi di grado minore il cui prodotto dà il polinomio di primo grado in questione: questo è impossibile poiché gli unici polinomi di grado minore al primo sono i numeri (che, dovrebbero essere visti come polinomi di grado zero!) ed il prodotto di due numeri è ancora un numero e non certo un polinomio di primo grado!

c.v.d.

Come vedremo a breve, gli altri polinomi irriducibili risultano essere quelli di secondo grado, che abbiano una quantità loro associata, detta *discriminante,* negativa. Altri non ve ne sono: ovvero tutti gli altri tipi di polinomi sono riducibili (nel campo dei numeri reali [7]) Il fatto

---

[4] Così come lo è Q.

[5] Ovvero divisibili solo per se stessi ed uno: cioè l'unico modo per fattorizzarli è moltiplicare se stessi per uno!

[6] Con una decomposizione unica a meno di permutazione dei fattori.

[7] La riducibilità dei polinomi dipende anche da dove si prendono i coefficienti dei vari monomi -come si dice "dal corpo numerico su cui si costruisce l'anello polinomiale-, ma questo non ci riguarda, dato che noi studiamo i polinomi con coefficienti reali.

che siano riducibili, però, non implica che effettivamente si sappiano "ridurre".

1.1. Il Teorema di Ruffini. Il più semplice polinomio è sicuramente quello di primo grado $ax + b$: possiamo immaginare che esso sia con il coefficiente $a = 1$, a tal fine basta mettere in evidenza il coefficiente a e trascurarlo per tutto quello che avremo da dire, salvo poi reintrodurlo alla fine del discorso; possiamo quindi immaginare di essere nella seguente situazione $ax + b = a \cdot (x + c)$ dove $c = \frac{b}{a}$, facendo le considerazioni solo per il *binomio* presente nella parentesi tonda. Polinomi con il coefficiente del monomio di grado massimo pari a 1 diconsi *monici.* Dato che già abbiamo detto che i polinomi di primo grado sono irriducibili, allora essi potrebbero essere ben pensati come elementi "primi" nella famiglia dei polinomi [8]. Sapere che un altro polinomio può essere diviso tramite un binomio di primo grado è già una gran cosa, dato che dopo la divisione avremo ottenuto una prima fattorizzazione come prodotto di due polinomi. Tralasciando poi il primo binomio divisore trovato, si potrebbe ripetere la scomposizione sul quoziente, ottenendo così la fattorizzazione del polinomio iniziale in fattori irriducibili. Come per la fattorizzazione dei numeri in prodotto di numeri primi, sussiste, anche per la fattorizzazione dei polinomi, un teorema di unicità:

TEOREMA 31. *La fattorizzazione dei polinomi in fattori irriducibili è unica a meno di una permutazione dei fattori.*

Dim.: Procediamo per induzione [9] sul grado dei polinomi. Per i polinomi di primo grado la cosa è ovvia, dato che l'unica fattorizzazione possibile è il polinomio stesso moltiplicato per 1. Supponiamo che l'affermazione sia vera per polinomi di grado inferiore ad n e dimostriamo l'affermazione vera per il polinomio di grado n. Evidentemente, se n non è 2 esso deve essere divisibile per un polinomio di grado uno o per

[8]Gli altri elementi "primi" sono, altresì, i polinomi di secondo grado a discriminante negativo.

[9]Senza soffermarci troppo su tale metodo di dimostrazione, basti sapere che una dimostrazione per induzione avviene in tre passi: il primo è dimostrare l'affermazione del teorema in un "primo caso" che corrisponde ad un determinato "primo numero" in un dato insieme numerico ordinato linearmente. Poi si suppone che il teorema sia vero per i successivi "$n-1$" casi e si dimostra, come terzo ed ultimo passo della dimostrazione, che è vero anche per il numero immediatamente successivo, ovvero per l'$n-$esimo caso. Se ciò si può fare, allora l'affermazione del teorema dovrà essere vera in ogni caso e l'insieme dei numeri, per i quali l'affermazione è vera, è tutto l'insieme dei numeri Naturali (ovvero si può mettere in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$).

uno di grado due a discriminante negativo [10]. Effettuata la divisione per uno di questi due polinomi, si ottiene come quoziente un polinomio di grado inferiore a n [11], per il quale varrà l'affermazione di decomposizione unica in fattori irriducibili a meno di permutazione. A questo punto il teorema è dimostrato, dato che il polinomio di grado n risulta essere, in modo unico, il prodotto del primo fattore irriducibile per tutti gli altri che fattorizzano il quoziente (del polinomio con il fattore irriducibile testé citato).

c.v.d.

Prima di affrontare il problema di trovare la fattorizzazione di un polinomio qualsiasi di grado superiore al secondo, mediante polinomi irriducibili, facciamo delle considerazioni sull'operazione di divisione. È chiaro che se si effettua la divisione di una certa quantità [12] A per una data quantità B e chiamiamo Q il quoziente ed R il resto, allora dovrà essere

$$A = B \cdot Q + R.$$

Dire che B fattorizza A significa, quindi, che il resto della divisione è nullo, ovvero che $R = 0$, infatti, in tal caso si avrebbe

$$A = B \cdot Q.$$

Se inoltre, C divide la quantità Q e chiamiamo il quoziente $Q : C = Q_1$, allora si avrà pure

$$A = B \cdot C \cdot Q_1.$$

Ovviamente, in una situzione del genere, anche C dividerà A (tramite il prodotto $C \cdot (B \cdot Q_1)$) e quindi la divisione di A con C avrà resto nullo. Possiamo tranquillamente affermare che il problema della fattorizzazione è direttamente collegato al problema della divisibilità di un polinomio per un altro di grado inferiore e, in ultima analisi, alla capacità di determinare se il resto della divisione è nullo oppure no: nei fatti, dato che gli unici polinomi irriducibili, a coefficienti reali, sono solo quelli di primo grado (e quelli di secondo grado con discriminante negativo [13]), decidere sulla fattorizzazione risulta un problema più semplice di quanto si potesse immaginare a prima vista. Cerchiamo ora un metodo per capire se un binomio di primo grado possa dividere un dato polinomio, senza però svolgere completamente tutta la

[10] Essendo gli unici due casi di irriducibilità.

[11] Per la precisione, di un grado o di due inferiore!

[12] In questo capitolo tali quantità sono polinomi, ma quel che diciamo vale, in generale, per la divisione tra numeri o tra due qualsiasi grandezze per le quali si possa concepire una operazione di divisione.

[13] Come vedremo a breve.

divisione, operazione che potrebbe risultare lunga ed infruttuosa. Per quanto abbiamo detto potremmo concentrarci unicamente sul resto e vedere se esso è nullo oppure no: nel primo caso risulta la divisibilità, nel secondo no! occorrerebbe un metodo per determinare il resto della divisione senza svolgere la stessa. Per fortuna un metodo esiste e parte dalla seguente osservazione. Premettiamo che se in un polinomio qualsiasi sostituiamo un dato valore a posto di una lettera, diremo che effettuiamo una *valutazione* del polinomio nel valore considerato. Ad esempio, se nel polinomio $P(x) = 1 + 2x - 3x^2 + x^3$ mettiamo a posto di x il valore 2, ovvero poniamo $x = 2$, scrivendo anche

$$P(x)|_{x=2} \quad \text{ovvero anche} \quad P(2)$$

otteniamo la *valutazione del polinomio in* 2 pari a

$$1 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 + 2^3 = 1.$$

Osservazione: Supponiamo che dividendo il polinomio

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

per il polinomio $(x - a)$, si abbia quoziente $Q_{n-1}(x)$ [14] e resto R [15], allora potremmo scrivere

$$P_n(x) = (x - a) \cdot Q_{n-1}(x) + R.$$

Se valutiamo tale espressione in a, si otterrebbe anche

$$P_n(a) = (a - a) \cdot Q_{n-1}(a) + R$$

ovvero

$$P_n(a) = R,$$

a prescindere dal valore del quoziente $Q_{n-1}(a)$. Segue quindi il seguente importantissimo teorema (del resto):

TEOREMA 32. *Il resto della divisione di un polinomio per il binomio $x - a$ è dato dalla valutazione del polinomio in a.*

◇

COROLLARIO 19 (Teorema di Ruffini). *Se la valutazione del polinomio in a è zero, allora esso è divisibile per $x - a$* [16].

[14] Polinomio di un grado inferiore rispetto a $P_n(x)$.

[15] Che deve essere per forza di grado zero, ovvero una costante!

[16] E viceversa, se il polinomio è divisibile per $x - a$ allora la valutazione del polinomio in a dà zero

Dim: Dato che R è la valutazione del polinomio in a, se essa è zero, vuol dire che la divisione tramite $x-a$ è "esatta" (ovvero senza resto), quindi $x-a$ divide il polinomio di partenza.

c.v.d.

Ora che abbiamo un metodo per determinare il resto della divisione senza effettuare la stessa, il problema della fattorizzazione risulta notevolmente semplificato, sebbene non risolto del tutto [17].
Vediamo, con qualche esempio, come sfruttare i fatti narrati.

Esempio: Determinare la fattorizzazione del polinomio

$$x^2 - 6x + 8.$$

Soluzione: Cerchiamo una fattorizzazione del tipo

$$x^2 - 6x + 8 = (x-a) \cdot (x-b)$$

dato che un polinomio di secondo grado, se scomponibile, lo sarà solo come prodotto di due polinomi di primo grado. Ora c'è il problema di scegliere a (e successivamente b); una indicazione ce la suggerisce la stessa espressione di partenza: visto che il termine noto 8 deve formarsi moltiplicando a per qualcosa, cerchiamo, come prima approccio, tra uno dei divisori di 8. Scriviamo allora l'insieme dei divisori di 8, $Div(8) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$ e proviamo a valutare il polinomio di partenza $P = x^2 - 6x + 8$ negli elementi di tale insieme.
Si ha:

$$P|_{x=1} = 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = 3 \neq 0, \quad \text{non va bene!}$$

$$P|_{x=2} = 2^2 - 6 \cdot 2 + 8 = 0 \quad \text{evviva, evviva!.}$$

A questo punto potremmo effettuare la divisione del polinomio con $x-2$ per trovare quanto vale l'altra parentesi, oppure anche continuare con questo metodo e trovare

$$P|_{x=4} = 4^2 - 6 \cdot 4 + 8 = 0, \quad \text{nuovamente: "evviva, evviva"!,}$$

e concludere che sia $x-2$, sia $x-4$ sono divisori (irriducibili) del polinomio di partenza, ergo:

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2) \cdot (x-4).$$

□

[17] Infatti non è detto che si riesca ad individuare quale valore di a sia opportuno mettere per ottenere la divisibilità del polinomio di partenza tramite il binomio irriducibile $x-a$, .

Esempio: Fattorizzare il polinomio

$$x^3 - 3x^2 + 4.$$

Soluzione: Essendo il polinomio di terzo grado, la scomposizione potrebbe essere o come prodotto di tre fattori di primo grado, oppure come prodotto di un fattore di primo grado per un altro di secondo grado. Consideriamo, al solito, i divisori del termine noto $Div(4) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ ed iniziamo con le valutazioni, avendo indicato il polinomio di partenza con $P(x)$.
Si ha:

$$P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = 2 \quad \neq 0,$$

$$P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 0 \quad \text{ok!}$$

pertanto abbiamo

$$P(x) = (x - 2) \cdot Q(x)$$

dove $Q(x) = \frac{P(x)}{x-2}$.

Proviamo a vedere se ci sono altri numeri che vanno bene.

$$P(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 4 = 0 \quad \text{ok!}$$

per cui si ha anche la divisibilità per il fatto $x + 1$, ergo:

$$P(x) = (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - a).$$

Ora però, se provassimo con tutti gli altri possibili divisori, ci accorgeremmo che non ci sono altri numeri per i quali la valutazione risulti nulla, per cui a deve essere uno dei numeri già trovati, ma quale? basta effettuare la divisione, ovvero il polinomio di partenza diviso $x^2 - x - 2$ dato da $(x - 2) \cdot (x + 1)$. Il risultato è, in effetti, un binomio già trovato precedentemente, ovvero $x - 2$; per cui potremmo scrivere

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x - 2)^2 \cdot (x + 1).$$

□

Esempio: Fattorizzare il polinomio

$$4x^3 - 5x^2 - 7x + 2.$$

Soluzione: Proviamo con i divisori di due:

$$P|_{-1} = 4 \cdot (-1)^3 - 5 \cdot (-1) - 7 \cdot (-1) + 2 = 0,$$

quindi $(x + 1)$ è un fattore.

$$P|_1 = 4 \cdot (1)^3 - 5 \cdot (1)^2 - 7 \cdot (1) + 2 = -6;$$
$$P|_{-2} = 4 \cdot (-2)^3 - 5 \cdot (-2)^2 - 7 \cdot (-2) + 2 = -36;$$
$$P|_2 = 4 \cdot (2)^3 - 5 \cdot (2)^2 - 7 \cdot (2) + 2 = 0$$

quindi anche $(x-2)$ è un fattore.

Ora, il modo più immediato per determinare il terzo fattore irriducibile è effettuare la divisione

$$(4x^3 - 5x - 7x + 2) : (x^2 - x - 2),$$

essendo il divisore dato dal prodotto dei due fattori irriducibili precedentemente trovati: alla fine delle operazioni, otterremo quoziente $(4x-1)$ e resto (chiaramente) zero! per cui possiamo scrivere la seguente fattorizzazione:

$$4x^3 - 5x^2 - 7x + 2 = (4x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-2).$$

C'è da notare che anche

$$P|_{\frac{1}{4}} = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 2 = 0$$

quindi anche $4 \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right)$ è un fattore [18],

solo che a pochi sarebbe venuto in mente di valutare il polinomio di partenza in una frazione! questo d'altra parte, è il grande limite di questo metodo: individuare i numeri giusti, soprattutto se questi non sono numeri interi [19].

□

1.2. Prime considerazioni sulla fattorizzazione dei polinomi di secondo grado. Tra gli esempi visti or ora, il primo riguardava la fattorizzazione di un polinomio di secondo grado: è stato possibile procedere a tale scomposizione mediante il teorema di Ruffini. Avevamo però detto che non tutti i polinomi di secondo grado sono fattorizzabili, ad esempio

$$x^2 + 1$$

non è fattorizzabile. Prendiamo il discorso in modo generale e vediamo dove si nascondono le insidie e le differenze.

Prima di tutto definiamo la forma generica di un polinomio di secondo grado:

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c,$$

[18] Abbiamo messo il fattore 4 prima della parentesi, dato che il polinomio di partenza non è monico, quindi non potrebbe mai essere scomposto nel prodotto di tre binomi monici di primo grado: chiaramente $4 \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right)$ è proprio il fattore $(4x-1)$ trovato tramite la divisione.

[19] E, purtroppo, altri metodi non ci sono!

dove a, b e c sono numeri reali.
Se $P_2(x)$ si potesse fattorizzare, potremmo pensare che esso sia dato dal prodotto

$$P_2(x) = a \cdot (x - n_1) \cdot (x - n_2).$$

Il secondo membro di tale uguaglianza è

$$a \cdot [x^2 - (n_1 + n_2)x + n_1 \cdot n_2]$$

e, dovendo essere $P_2(x)$, avremo le identità

$$a = a,$$
$$b = -a \cdot (n_1 + n_2) \quad \text{e}$$
$$c = a \cdot n_1 \cdot n_2.$$

Consideriamo, ad esempio, il polinomio irriducibile di prima: $x^2 + 1$, se esso si potesse fattorizzare, avendo $a = 1$, $b = 0$ e $c = 1$, si dovrebbero trovare due numeri n_1 e n_2 tali per cui

$$n_1 + n_2 = 0$$

e

$$n_1 \cdot n_2 = 1.$$

La prima equazione ci dice che i numeri devono essere opposti, mentre la seconda che devono anche essere reciproci: non c'è nessuna coppia di numeri che possa avere queste due caratteristiche contemporaneamente, per cui la fattorizzazione in $(x - n_1) \cdot (x - n_2)$ non può avvenire.

Per trattare, però, il caso generale, dovremo premettere la teoria delle equazioni di secondo grado: pertanto sospendiamo il discorso e lo riprenderemo alla fine del prossimo capitolo.

CAPITOLO 12

Teoria delle equazioni algebriche

Nell'affrontare la risoluzione dei problemi più semplici, abbiamo imparato a risolvere le equazioni di primo grado. Ricordando, per somme linee l'argomento, una equazione è una uguaglianza tra due quantità, almeno una delle quali è suscettibile di assumere diversi valori, in funzione di qualche parametro incognito. Risolvere un'equazione significa determinare i valori che rendano l'uguaglianza una identità, qualora essi siano sostituiti ai valori incogniti dell'equazione. Per arrivare alla risoluzione di una equazione ci si può avvalere del seguente principio generale: "*Quello che si fa ad un termine di uno dei due membri dell'equazione, lo si deve fare a tutti i termini, così come quello che si fa ad un membro, deve essere fatto identicamente anche all'altro*". Affrontiamo, in questo capitolo, in generale la teoria delle *equazioni algebriche,* ovvero di quelle equazioni che sono esprimibili tutte come un'*uguaglianza tra due polinomi o potenze* [1] *di polinomi.*
Ad esempio è un'equazione algebrica

$$x^2 - 3x = x - 1$$

oppure

$$\sqrt[3]{1 - x^2} = x^4 + 5,$$

dato che quest'ultima risulta essere $(1 - x^2)^{\frac{1}{3}} = x^4 + 5,$ od ancora

$$\sqrt[3]{x} = \sqrt{x - 1}.$$

1. Equazioni di primo grado

Le equazioni di primo grado, dette anche *lineari,* sono quelle già incontrate e che abbiamo imparato a risolvere; in breve sono tutte riconducibili alla forma standard "polinomio di primo grado uguagliato a zero", ovvero:

$$\boxed{ax + b = 0}.$$

[1] Anche ad esponente razionale

Applicando la nostra regola aurea sottraiamo b da entrambi i membri e dividiamo per a ottenendo la soluzione

$$\boxed{x = -\frac{b}{a}.}$$

Diciamo subito che mentre per le equazioni di primo grado *esiste sempre un'unica soluzione,* che è quella indicata nell'ultimo riquadro, per equazioni di grado superiore al primo non è detto che una soluzione si riesca a determinarla: ad esempio $x^2+1=0$, ovviamente, non ha soluzione. Basta considerare il fatto che x^2 è una quantità sempre positiva o al più nulla e sommando ad essa una unità, il risultato non può che essere un numero strettamente positivo, il ché implica che non si potrà mai ottenere zero tra i valori possibili di tale espressione. Prima di discutere in generale sulla risoluzione delle equazione di secondo grado è utile -anche per procedere con un certo ordine logico- imparare ad operare correttamente con i numeri irrazionali, pertanto dedichiamo le prossime tre sezioni a tale argomento.

2. Operare con i numeri reali: operazioni con i radicali

Nella risoluzione delle equazioni di secondo grado, come vedremo presto, comparirà l'operazione di "estrazione" di radice: è il momento di imparare ad operare con esse e, più in generale, con tutti i numeri irrazionali di tipo algebrico [2] .

Ricordiamo che un numero irrazionale non si può rappresentare sotto forma di frazione e, proprio per questo, non è possibile esprimere un valore ben determinato di esso: ci dobbiamo accontentare di darne una approssimazione (per eccesso o per difetto). Il prototipo di numero irrazionale (algebrico) è $\sqrt{2}$, della quale abbiamo dimostrato l'irrazionalità e discusso ampiamente nella parte riguardante la geometria euclidea. Altri numeri irrazionali, per la dimostrazione della cui irrazionalità sono occorsi molti secoli e sforzi da parte di tanti matematici, che han dovuto preparare il terreno, introducendo nuove teorie o sviluppando quelle già esistenti, sono π ed il numero di Nepero e, entrambi non algebrici (ovvero, come si dice solitamente, essi rappresentano *numeri irrazionali trascendenti*). Vogliamo discutere sul modo

[2] Ovvero che si possono ottenere tramite la risoluzione di una equazione polinomiale a coefficienti razionali -dette anche **equazioni algebriche**-; vi sono anche numeri **irrazionali trascendenti,** la cui caratteristica è di non essere soluzione di equazioni algebriche.

di effettuare operazioni con numeri irrazionali o tra razionali ed irrazionali, sviluppando il concetto di radicale. Ricordiamo, pertanto la seguente definizione.

DEFINIZIONE 50. *Se un numero, moltiplicato due volte con se stesso, dà il valore* a, *diremo che esso è la* radice *di* a *e lo indichiamo con* $\sqrt{a}$.

Quindi, per la definizione appena data, si ha

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a.$$

Generalizzando il concetto, si può dare la seguente definizione.

DEFINIZIONE 51. *Se un numero, moltiplicato* n *volte con se stesso, dà il valore* a, *diremo che esso è la* radice ennesima *di* a *e lo indichiamo con* $\sqrt[n]{a}$.

Ad esempio, se un numero moltiplicato tre volte con se stesso dà il valore due, esso si denota con $\sqrt[3]{2}$. Si ha, dunque, per definizione:

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2.$$

Nel caso generale si ha

$$\underbrace{\sqrt[n]{a} \cdots \sqrt[n]{a}}_{n-\text{volte}} = a.$$

Si definisce **radicale** tutto il numero $\sqrt[n]{a}$, mentre n si chiama **indice** della radice, essendo il numero a il **radicando.**

La teoria dei radicali (aritmetici o algebrici [3]) può essere ricondotta alle operazioni sulle potenze dei numeri, giusto dopo le osservazioni che faremo a breve: non c'è assolutamente bisogno di imparare alcunché di nuovo!

Osservazione 1: Abbiamo detto che $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, ma, almeno formalmente [4], anche

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2.$$

Questo vuol dire che potremmo porre

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}.$$

Vediamo se funziona anche con radicali ad indice diverso da due.

$$\underbrace{\sqrt[n]{a} \cdots \sqrt[n]{a}}_{n-\text{volte}} = a,$$

[3]A seconda se i radicandi sono numeri o espressioni letterali.

[4]Dato che non sappiamo come attribuire un **vero** significato ad una potenza con esponente non intero!

ma anche

$$\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \cdots a^{\frac{1}{n}}}_{n-\text{volte}} = a^{\overbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}^{n-\text{volte}}} = a^{\frac{n}{n}} = a.$$

Ancora una volta, quindi, possiamo immaginare che

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

ed operare formalmente tramite le "regole delle potenze", per semplificare espressioni con radicali, ovvero effettuare calcoli in cui compaiono radicali.

Ricordiamo solo le principali regole che torneranno utili nel proseguo:

(1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ e $a^n : a^m = a^{n-m}$.
(2) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
(3) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Osservazione 2: In base a quanto osservato precedentemente, possiamo scrivere

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}},$$

(anche in virtù della terza regola sulle potenze, ricordata poco sopra); in breve possiamo affermare:

"l'indice della radice rappresenta il denominatore dell'esponente del radicando".

Osservazione 3: Se un numero è il quadrato di un altro, allora la sua radice quadrata non è altro che il numero di cui è il quadrato. Ad esempio: 9 è il quadrato di 3, per cui la radice quadrata di 9 è 3:

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{poiché} \quad 3 \cdot 3 = 9.$$

Altresì è vero che se un numero è il cubo di un altro, allora la sua radice cubica è il numero di cui è cubo, e così via per le radici con indici superiori. Ad esempio $16 = 2^4$ per cui $\sqrt[4]{16} = 2$.

Osservazione 4: la seconda regola delle potenze ricordata, suggerisce un modo veloce per semplificare radicali, ovvero per ricondurli a forme basilari. Ad esempio, si voglia determinare $\sqrt{18}$, dato che $9 \cdot 2 = 18$, potremmo scrivere

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

e si osservi che si è soprasseduto su questi ulteriori due ovvi passaggi:

$$\sqrt{9 \cdot 2} = (9 \cdot 2)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2},$$

in cui abbiamo provveduto a “distribuire” la potenza sulle due basi, per come ci suggeriva la seconda regola ricordata.

Osservazione 5: ricordiamo ora la divisione tra due numeri interi: se dividiamo il numero a con il numero b (ad esso minore) otteniamo un quoziente q ed un resto r tali per cui

$$a = b \cdot q + r.$$

Questa semplice operazione è anche utile per semplificare radicali in cui l'esponente compare con un numero maggiore dell'indice della radice: procediamo con un esempio. Si voglia semplificare il radicale $\sqrt[4]{10^7}$; se lo scrivessimo sotto forma di potenza avremmo

$$\sqrt[4]{10^7} = 10^{\frac{7}{4}}.$$

La divisione $7:4$ dà quoziente 1 e resto 3, per cui scriviamo

$$7 = 4 \cdot 1 + 3$$

e dividendo ogni termine per 4

$$\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}.$$

Se mettiamo questo risultato nell'espressione di prima otteniamo:

$$\sqrt[4]{10^7} = 10^{\frac{7}{4}} = 10^{1+\frac{3}{4}} = 10^1 \cdot 10^{\frac{3}{4}} = 10\sqrt[4]{10^3},$$

avendo applicato la prima regola delle potenze ricordata poco sopra. Un altro esempio ci convincerà della “regola pratica” che enunceremo a breve. Semplifichiamo $\sqrt[3]{4^{13}}$. Scriviamola sotto forma di potenza ed effettuiamo la divisione per come fatto prima:

$$\sqrt[3]{4^{13}} = 4^{\frac{13}{3}} = 4^{4+\frac{1}{3}} = 4^4 \cdot 4^{\frac{1}{3}} = 256\sqrt[3]{4}.$$

Pertanto possiamo dare la seguente “regola pratica”:

> *se l'esponente del radicando è maggiore dell'indice della radice, effettuando la divisione [5], il quoziente rimane come potenza del radicando senza radice, il resto come potenza del radicando sotto la radice.*

3. Operazioni tra radicali

Due radicali sono *simili* se sono “uguali” come radicali, ovvero possono essere portati ad avere lo stesso indice e lo stesso radicando a meno di un fattore moltiplicativo. Ad esempio $\sqrt{18}$ e $\sqrt{50}$ sono simili, infatti il primo radicale è $3\sqrt{2}$ mentre il secondo è $5\sqrt{2}$.

[5] Tra esponente e indice.

Radicali simili si sommano (o si sottraggono) esattamente come si faceva per i monomi [6], ovvero si indica la quantità totale di radicale dello stesso tipo che è presente nell'espressione:

$$\sqrt{18}+\sqrt{50}\;=\;3\sqrt{2}+5\sqrt{2}\;=\;(3+5)\sqrt{2}\;=8\sqrt{2}.$$

D'altra parte, se i radicali non sono simili, la somma la si lascia indicata:

$$\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

è già il risultato della somma tra $\sqrt{3}$ e $\sqrt{2}$. Per la moltiplicazione e la divisione, si opera seguendo le regole delle potenze e la definizione di radicale, ad esempio:

$$5\sqrt{6}\cdot(4\sqrt{2}+6\sqrt{3})=5\cdot4\underbrace{\sqrt{3}\sqrt{2}}_{\sqrt{6}}\sqrt{2}+5\cdot6\underbrace{\sqrt{2}\sqrt{3}}_{\sqrt{6}}\sqrt{3}\;=$$

$$=\;20\cdot2\sqrt{3}+30\cdot3\sqrt{2}\;=\;40\sqrt{3}+90\sqrt{2}.$$

Si noti che abbiamo "sdoppiato" la $\sqrt{6}$ ed utilizzato la definizione di radice quadrata per arrivare al risultato finale. Un altro modo di procedere avrebbe potuto essere così:

$$5\sqrt{6}\cdot(4\sqrt{2}+6\sqrt{3})=5\cdot4\sqrt{6\cdot2}+5\cdot6\sqrt{6\cdot3}\;=\;20\sqrt{12}+30\sqrt{18}\;=$$

$$=\;20\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}+30\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}\;=\;40\sqrt{3}+90\sqrt{2}.$$

Si sarebbe ancora potuto operare in tal guisa:

$$5\sqrt{6}\cdot(4\sqrt{2}+6\sqrt{3})=5\cdot4\cdot6^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{2}}+5\cdot6\cdot6^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{2}}\;=$$

$$=20\cdot(6\cdot2)^{\frac{1}{2}}+30\cdot(6\cdot3)^{\frac{1}{2}}=20\cdot(3\cdot2^2)^{\frac{1}{2}}+30\cdot(2\cdot3^2)^{\frac{1}{2}}\;=$$

$$=20\cdot2\cdot3^{\frac{1}{2}}+30\cdot3\cdot2^{\frac{1}{2}}=40\sqrt{3}+90\sqrt{2}.$$

Ognuno poi operarerà come gli sembrerà più facile: sarebbe il caso di saper affrontare tutt'e tre i modi di procedere, dato che a volte è più conveniente il primo, a volte il secondo ed altre volte il terzo modo di lavorare.

Esempio: Si voglia calcolare il valore della seguente espressione:

$$(\sqrt[4]{25}-2)\left[(\sqrt{5}+2)+3\sqrt{3\sqrt{3}}:\sqrt{3}-6\sqrt{\sqrt{\frac{3}{16}}}\right].$$

Procediamo mischiando un po' di tecniche illustrate prima:

$$(5^{\frac{2}{4}}-2)\left[(\sqrt{5}+2)+3\cdot(3\cdot3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}:3^{\frac{1}{2}}-2\cdot3\cdot\left(\left(\frac{3}{2^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]=$$

[6] Si potrebbe dire che con essi si opera la somma mettendo in evidenza gli stessi radicali.

$$
\begin{aligned}
&= (5^{\frac{1}{2}} - 2)\left[(\sqrt{5}+2) + 3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} - 2^{1-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} \cdot 3^{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\right] = \\
&= (\sqrt{5}-2)\left[(\sqrt{5}+2) + 3^{\frac{5}{4}} - 3^{\frac{5}{4}}\right] = \\
&= (\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) = 5-4 = 1.
\end{aligned}
$$

□

Esempio: Si semplifichi il seguente radicale:

$$\sqrt[3]{4\sqrt{2\sqrt[4]{8\sqrt[5]{8^3}}}}.$$

Sebbene possa sembrare una espressione difficile, il tutto si semplifica se scriviamo l'espressione sotto forma di potenza di due:

$$\left(2^2\left(2\left(2^3\left(\left(2^3\right)^3\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{\frac{1}{3}\cdot\left(2+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{9}{40}\right)} = 2^{\frac{1}{3}\cdot\frac{80+20+15+9}{40}} = 2^{\frac{1}{3}\cdot\frac{\cancel{124}^{31}}{\cancel{40}_{10}}} = 2^{\frac{31}{30}} = \\
&= 2^{\frac{30+1}{30}} = 2\sqrt[30]{2}.
\end{aligned}
$$

□

Soffermiamoci ancora un po' sulla divisione tra radicali, ad esempio si voglia calcolare $\sqrt{5} : \sqrt{3}$ oppure si voglia determinare il reciproco di $\sqrt{7}$. Si potrebbe rispondere, con una certa facilità, che

$$\sqrt{5} : \sqrt{3} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}},$$

oppure che il reciproco di radical-sette sia $\frac{1}{\sqrt{7}}$.
Entrambe le risposte, seppure ineccepibili, ci sembrano tuttavia insoddisfacenti. Ad esempio, il reciproco di un radicale sarebbe meglio che fosse un altro radicale. Così come la divisione tra due radici, ci piacerebbe di più se fosse rappresentato da un radicale che non contenga frazioni come radicando. Tutto questo si può fare sfruttando un'idea molto semplice, ovvero che moltiplicare per uno non cambia il risultato di una moltiplicazione e, soprattutto, uno lo si può scrivere sempre come un numero diviso se stesso. Basta ora mettere in pratica quest'idea tenendo in mente la definizione di radicale. Con il prossimo esempio si capirà subito quel che vogliamo dire:

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}.$$

Inoltre,

$$\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{7}\sqrt{7}.$$

3.1. Razionalizzazioni. Operazioni come quelle testé descritte prendono il nome di **razionalizzazioni.** In breve, razionalizzare significa "eliminare" tutti i radicali da uno dei termini di una frazione, ovvero dal numeratore o dal denominatore. Si noti che razionalizzare i denominatori significa effettuare delle divisioni in modo che nei risultati i radicandi non siano numeri razionali [7]: ovvero otteniamo *frazioni di numeri irrazionali a posto di rapporti tra numeri irrazionali!* Come abbiamo visto negli esempi precedenti, se il denominatore di una frazione contiene **un singolo radicale,** allora basta fare in modo che la potenza del radicando "raggiunga" il valore dell'indice della radice e si ottiene il valore per cui moltiplicare numeratore e denominatore in modo da non alterare la frazione stessa. Ad esempio: per razionalizzare il denominatore di $\frac{2}{\sqrt[5]{9}}$ non basta moltiplicare per $\frac{\sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{9}}$, ovvero per $\frac{\sqrt[5]{3^2}}{\sqrt[5]{3^2}}$, dato che così facendo non si riuscirebbe ad eliminare la radice quinta, infatti

$$\frac{2}{\sqrt[5]{9}} \cdot \frac{\sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{9}} = \frac{2\sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{3^4}}.$$

Per arrivare da due a cinque, dovremmo "integrare" l'esponente del radicando con tre, per cui dovremmo utilizzare la $\sqrt[5]{3^3}$, così facendo, in effetti, otterremmo:

$$\frac{2}{\sqrt[5]{9}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{2}{3}\sqrt[5]{27}.$$

Se il denominatore (o il numeratore da razionalizzare) contiene una somma di due termini, di cui almeno uno è un radicale, per poter eliminare le radici, non basta moltiplicare, come fatto prima, per la singola radice: l'idea è che per eliminare una radice quadrata, occorre -in qualche modo- elevarla al quadrato. Il modo più semplice e giusto è di sfruttare il prodotto notevole "somma per differenza": $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Il seguente esempio è chiarificatore: si voglia razionalizzare $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$; allora scriveremo [8]

$$\frac{1}{3+\sqrt{2}} = \frac{1}{3+\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{1}{3+\sqrt{2}} \cdot \frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}}{9-2} = \frac{3-\sqrt{2}}{7}.$$

[7] Da cui il termine "razionalizzare".

[8] Almeno per questa volta, tutti i passaggi!

Analogamente operiamo per la razionalizzazione seguente:

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{6-3} = \frac{6\sqrt{2}+6}{3} = 2\sqrt{2}+2.$$

Utilizzando altri prodotti notevoli e trucchi di questo tipo, si possono razionalizzare scritture più complicate, però non vogliamo continuare oltre su questa linea troppo tecnica nell'operare e poco foriera di nuove idee.

3.2. Radicali doppi. Si chiamano *radicali doppi* quelle espressioni in cui il radicando presenta una somma di due addendi, di cui uno è un radicale e l'altro no. La tipica forma è quindi

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}.$$

Anche se è possibile, come fannno molti autori, arrivare ad una formula per semplificare una tale espressione, rendendola somma di due numeri reali, a noi sembra meglio e didatticamente più efficace cogliere l'occasione per ragionare ed apprezzare la bella idea alla base del metodo che stiamo per illustrare. Non vogliamo indugiare in tecnicismi sterili, ma sviluppare buone idee! Ebbene, l'idea "geniale", per quanto semplice, è che la radice quadrata di un quadrato è la base della potenza quadrata! ovvero, se si riuscisse a scrivere il radicando come un quadrato, l'espressione sarebbe presto semplificata. Ora, immaginiamo che $a \pm \sqrt{b}$ sia il quadrato di un binomio, diciamo di $(A \pm B)^2$, allora il doppio prodotto deve essere rappresentato da $\sqrt{b}$, mentre la somma dei quadrati di A e B deve essere il numero a. Questo perché i quadrati eliminano le radici, quindi nello sviluppo del quadrato di binomio, se compare un radicale, questo deve stare in un termine che non contiene alcun quadrato [9]. Quindi cerchiamo due numeri A e B tali per cui

$$A^2 + B^2 = a$$

e

$$2AB = \sqrt{b}.$$

Continuiamo con un esempio chiarificatore.

Esempio: si semplifichi

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}.$$

Soluzione: Il doppio prodotto di A e B deve essere $-4\sqrt{3}$, per cui scriviamo

$$2\,A\,B = 4\sqrt{3};$$

[9] Esettamente come avviene per il doppio prodotto!

dimezzando otteniamo
$$A \cdot B = 2\sqrt{3}.$$
La scelta più semplice, sperando che sia quella giusta [10],è
$$A = 2 \quad \text{e} \quad B = \sqrt{3}.$$
Visto che
$$2^2 + (\sqrt{3})^2 = 7,$$
che coincide con quanto scritto nel radicando [11], siamo portati a scrivere
$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = 2 - \sqrt{3}.$$
□

Osserviamo, in ultimo, che anche $(\sqrt{3} - 2)^2$ è $7 - 4\sqrt{3}$, ma non c'è dubbio che mai avremmo potuto semplificare il radicale doppio con $\sqrt{3} - 2$, perché? [12].

Bisogna sempre stare attenti, quando nel radicando compare una differenza, di indicare il quadrato di binomio sempre di una quantità positiva, scegliendo come sottraendo il numero più piccolo!

Esempio: si semplifichi
$$\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}.$$
Soluzione: Come prima, poniamo
$$2\,A\,B = 4\sqrt{3}$$
e dopo dimezzamento
$$A \cdot B = 2\sqrt{3}.$$
La scelta più facile ora, non è soddisfacente, infatti se fosse $A = 2$ e $B = \sqrt{3}$, la somma dei due quadrati uscirebbe:
$$A^2 + B^2 = 4 + 3 = 7,$$
mentre nel radicando c'è scritto 8. Un'altra possibile scelta (semplice) potrebbe essere $A = 1$ e $B = 2\sqrt{3}$, ma anche in questo caso non sarebbe una giusta decisione, infatti avremmo
$$A^2 + B^2 = 1 + 12 = 13.$$

[10] Altrimenti dovremmo "sperimentare" qualche altra scelta!

[11] A posto di a.

[12] Lo studente solerte dovrebbe aver già risposto alla domanda, comunque il punto fondamentale è che $\sqrt{3} - 2$ è una quantità negativa e non avrebbe potuto rappresentare la radice quadrata di un numero al quadrato, ché, invece, è una quantità positiva!

Proviamo allora con una scelta un po' più "fantasiosa": dato che $\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$, scegliamo di porre

$$A = \sqrt{6} \quad \text{e} \quad B = \sqrt{2}.$$

Questa è un'ottima decisione, infatti si ha

$$A^2 + B^2 = 6 + 2 = 8,$$

e quindi concludiamo l'esercizio scrivendo

$$\sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

□

Siamo ora pronti ad affrontare il problema della risoluzione delle equazioni di secondo grado o di grado superiore.

4. Equazioni di secondo grado

Le equazioni di secondo grado sono quelle che si possono riscrivere tutte nella forma standard "polinomio di secondo grado uguagliato a zero", ovvero:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0.}$$

Per ora non sappiamo come risolvere un'equazione di questo tipo, però in alcuni casi particolari, ad una risoluzione, possiamo arrivare senza grossi problemi. Ad esempio, se ci trovassimo di fronte ad un'equazione del tipo

$$x^2 - 4 = 0,$$

la soluzione si potrebbe determinare sommando ad entrambi i membri 4, ottenendo l'equazione equivalente

$$x^2 = 4.$$

Ora, la domanda a cui rispondere è: "Quali sono i numeri che moltiplicati per se stessi [13] danno 4? la risposta, ovviamente, è 2 o -2, valori che, quindi, risolvono l'equazione di partenza. D'altra parte avevamo già introdotto il concetto di *radicale aritmetico,* per cui avremmo potuto scrivere tranquillamente che la soluzione è

$$x = \pm\sqrt{4} \quad = \pm 2,$$

come testé scritto.
Altra equazione di tipo particolare che sappiamo risolvere è una del tipo

$$3x^2 - 6x = 0,$$

[13] Ovvero elevati al quadrato.

dato che, mettendo in evidenza il fattore $3x$, possiamo riscrivere l'equazione sotto forma di

$$3x(x-2)=0.$$

Ora, la semplice constatazione che il prodotto di due numeri o più numeri è zero se e solo se almeno uno dei fattori è nullo, arriviamo alla conclusione che la soluzione all'equazione è data dai due numeri 0 o 2 [14]. Possiamo, in verità, dire qualcosa di molto più preciso e generale, riguardo a queste due forme particolari delle equazioni di secondo grado: a parte il fatto che esse sono entrambe *incomplete,* poiché rispetto alla forma standard "mancano" dei "pezzi", nel primo caso l'equazione è "formalmente" come una di primo grado, salvo poi determinare le soluzioni tramite una *estrazione di radice;* questa operazione però potrebbe risultare problematica, per non dire impossibile, se dovessimo farla per un numero negativo, dato che non c'è alcun numero reale il cui quadrato è negativo! ad esempio per $x^2+1=0$, se a qualcuno saltasse in mente di provare [15], si ritroverebbe a scrivere $x^2=-1$ e l'estrazione della radice quadrata di -1 sarebbe l'operazione impossibile: per cui, ancora una volta, risulta confermato che quella equazione non ha soluzione. Nell'altro caso, invece, si trovano sempre due soluzioni, di cui una è gratis: sarà sempre zero! In effetti, la messa in evidenza, genera la fattorizzazione del polinomio di secondo grado in due di primo grado, di cui uno è x, a meno di una costante, e l'altro è un binomio di primo grado. Con il principio di annullamento del prodotto, ovvero che un prodotto è nullo se e solo se uno dei fattori lo è, si ricavano due equazioni di primo grado, di cui una è $x=0$ e l'altra è $ax+b=0$, della cui soluzione abbiamo discusso nella sezione precedente. Ricapitolando, se l'equazione di secondo grado è **incompleta,** la soluzione si ricava abbastanza facilmente come segue:

$$ax^2+c=0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}},$$

a condizione che a e c non abbiano lo stesso segno [16] ***altrimenti non c'è soluzione.***

$$ax^2+bx=0 \quad \rightarrow \quad x_1=0 \quad \vee \quad x_2=-\frac{b}{a},$$

sempre due soluzioni, di cui una nulla.

---

[14] Questo valore annulla la parentesi.

[15] Si spera che l'argomentazione secondo cui la somma di due numeri positivi non potrà mai dare zero, basti!

[16] poiché il radicando deve risultare positivo

4.1. Risoluzione nel caso completo. Si può risalire alla soluzione dell'equazione di secondo grado, nel caso completo, tramite un'idea abbastanza semplice, ma geniale: facciamo in modo che essa possa essere trattata come un'equazione incompleta e ne determiniamo la soluzione per come abbiamo imparato a fare or ora. In particolare sfruttiamo il cosiddetto metodo del *completamento del quadrato* per riscrivere il polinomio di secondo grado in modo più opportuno.
Ricordiamo che il quadrato di binomio genera un trinomio di secondo grado, il ché è molto comodo dato che nelle equazioni di secondo grado si ha proprio un trinomio di secondo grado uguagliato a zero. Purtroppo, però, non tutti i trinomi di secondo grado sono quadrati di binomio: semplicemente ci si avvicinano nell'aspetto! Confronteremo il trinomio dell'equazione di secondo grado con un quadrato di binomio del tipo

$$(A+B)^2$$

in cui A e B indicano due quantià, che possiamo scegliere a nostro arbitrio, in modo che più si avvicini, lo sviluppo della potenza, al polinomio dell'equazione. Prima di procedere, sarà comodo rendere *monica* l'equazione, mettendo in evidenza il coefficiente del monomio di secondo grado:

$$a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),$$

a questo punto, l'equazione standard è equivalente a quest'altra:

$$* \quad \boxed{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.}$$

Scegliendo $A = x$ e sviluppando il quadrato di binomio, otteniamo

$$(x+B)^2 = x^2 + 2Bx + B^2.$$

Ora imponiamo che il doppio prodotto sia proprio il termine lineare nell'equazione monica, ovvero

$$2Bx = \frac{b}{a}x,$$

da cui, dovendo ancora scegliere B, arriviamo alla "brillante" conclusione di porre

$$B = \frac{b}{2a}.$$

Se sviluppassimo il quadrato con queste due scelte delle quantità A e B, otterremo

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Considerando che l'ultima frazione è proprio un numero così come l'ultimo termine del trinomio nell'equazione monica, possiamo eliminare $\frac{b^2}{4a^2}$ ed aggiungere al quadrato di binomio $\frac{c}{a}$ per ottenere esattamente l'equazione monica a partire dallo sviluppo del quadrato di binomio, ovvero:

$$\boxed{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0}$$

è esattamente l'equazione del riquadro etichettata con $*$. Ora siamo ricondotti -almeno nella forma- all'equazione incompleta del tipo primo tipo: nei fatti possiamo scrivere:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a},$$

da cui, estraendo la radice quadrata:

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$$

e, infine:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}.$$

Riscriviamo, solo per rendere maggiormente chiara e memorizzabile, dopo semplici passaggi [17] la formula risolutiva appena trovata:

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Considerazione: La risoluzione dell'equazione di secondo grado completa può essere determinata se e soltanto se la quantità presente come radicando, nell'espressione della formula appena scritta, non è negativa. Inoltre, se tale radicando è nullo, la soluzione è unica, poiché aggiungere o togliere zero da una quantità non modifica quest'ultima [18] e, in ultimo se tale radicando è positivo, allora le soluzioni dell'equazione sono due e distinte.

Definizione 52. *La quantità*

$$b^2-4ac$$

si chiama ***discriminante*** *del polinomio e si indica con* Δ.

[17] L'alunno solerte giustifichi questi passaggi!

[18] In tal caso la soluzione è ancora -formalmente- data dalla risoluzione di una equazione di primo grado, come vedremo a breve.

La definizione di Δ è motivata dal fatto che a seconda che essa sia una quantità positiva, nulla o negativa, [19] corrispondentemente l'equazione ha due, una o nessuna soluzione.

Dato che questo è un fatto importante lo ripetiamo: data l'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

si determina, associata al trinomio di secondo grado, una quantità detta *discriminante* definita come

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

e, a seconda dei casi si ha:

$$\Delta > 0 \quad \rightarrow \quad \text{L'equazione ha 2 soluzioni}$$

(distinte),

$$\Delta = 0 \quad \rightarrow \quad \text{L'equazione ha 1 soluzione}$$

(o meglio, due coincidenti) e, in ultimo

$$\Delta < 0 \quad \rightarrow \quad \text{L'equazione ha 0 soluzioni}$$

(ovvero non ha soluzioni).

Esempio: Si risolva la seguente equazione:

$$2x^2 + 4x - 6 = 0.$$

Soluzione: Essendo completa, dovremo applicare la formula risolutiva. Preventivamente determiniamo il Δ, dato che se esso è negativo possiamo dire subito che l'equazione non ammette soluzioni, altrimenti riutilizziamo la quantità quando servirà. Orbene, $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 16 + 48 = 64$. Quindi sappiamo che l'equazione ammette due soluzioni distinte: considerando che $8 \cdot 8 = 64$ allora avremo

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm 8}{4} = -1 \pm 2.$$

Volendo essere più precisi, una soluzione è data da $x_1 = -1 - 2 = -3$ e l'altra $x_2 = -1 + 2 = 1$.

□

Esempio: Risolvere la seguente equazione:

$$x(x-1) = -3x - 1.$$

Soluzione: Prima di tutto la riportiamo in forma standard:

$$x^2 - x + 3x + 1 = 0$$

[19] Si *discriminano* le varie situazioni

ovvero

$$x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Determiniamo ora il discriminante:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0.$$

Essendo il discriminante nullo, allora l'equazione ammette un'unica soluzione che è $x = \frac{-b}{2a}$, nel caso specifico

$$x = \frac{-2}{2} = -1.$$

Allo stesso identico risultato saremmo arrivati considerando che quel trinomio non è altro che lo sviluppo del seguente quadrato di binomio:

$$(x + 1)^2,$$

quindi la soluzione è $x + 1 = 0$ ovvero $x = -1$.

□

Questo è un fatto generale: **se il $\Delta = 0$ allora l'equazione di secondo grado si può sempre mettere sotto forma di un quadrato di binomio uguagliato a zero.** Altre considerazioni saranno fatte quando tratteremo della relazione tra le soluzione dell'equazione di secondo grado ed i suoi coefficienti numerici, il tutto riferito al problema della fattorizzazione dei polinomi di secondo grado: questione lasciata in sospeso ma che ritornerà in discussione a brevissimo.

Esempio: Risolvere l'equazione

$$x^2 - 4x + 1 = 2(1 - 2x) + 8.$$

Soluzione: Riportiamola in forma standard:

$$x^2 - \cancel{4x} = 2 - \cancel{4x} + 7,$$

quindi:

$$x^2 = 9.$$

Essendo incompleta, non serve continuare per scrivere, inutilmente, la forma standard vera e propria, che sarebbe stata $x^2 - 9 = 0$. A questo punto utilizzare la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado complete sarebbe solo un grave *errore logico.* Quindi, semplicemente, determiniamo le soluzioni estraendo la radice di 9, che, notoriamente, è ± 3. Le soluzioni sono quindi $x_1 = -3$ e $x_2 = 3$.

□

5. Il teorema fondamentale dell'Algebra

A parte l'opportunità di svolgere un congruo numero di esercizi per impratichirsi con l'argomento e quindi di aver già acquisito una certa familiarità con l'argomento, sicuramente si sarà già notato che una equazione di primo grado ammette sempre un'unica soluzione; mentre una di secondo grado fino ad un massimo di due soluzioni. Se l'equazione fosse di terzo, quarto o decimo grado, sarebbe lecito pensare che debbano avere, rispettivamente, al più tre, quattro o dieci soluzioni? Un'altra domanda che verrebbe spontanea è: dato che per i primi due gradi si sono trovate delle formule risolutive, è ragionevole pensare che anche per equazioni di grado superiore al secondo si riesca a trovare un formula risolutiva?
Iniziamo con dare una risposta negativa all'ultima domanda: non possono essere trovare formule risolutive per equazioni di grado superiore al secondo complete [20]. La domanda comunque era ragionevolmente posta, tant'è che ad essa si è cercato di rispondere positivamente nel corso dei secoli. Tra i risultati che si riuscirono a dimostrare si annovera un teorema di Ruffini del 1799 dimostrato successivamente in modo completo e senza errori [21] da Abel nel 1824, esso affermava che per le equazioni di quinto grado o superiore, non potevano essere date formule risolutive che coinvolgessero solo i coefficienti del polinomio e le semplici operazioni algebriche di somma, prodotto [22] ed elevamenti a potenza, seppur con esponente razionale. Pochi anni dopo il risultato di Abel, un giovane francese dal temperamento romantico, ribelle e burrascoso, tal Évariste Galois, scrivendo una memoria poco prima di morire a seguito di un duello, sul quale esito -evidentemente- non nutriva alcun dubbio (aveva circa 20 anni!), dimostrò, con metodi innovativi [23], che per tutte le equazioni di grado superiore al secondo non si può trovare una formula risolutiva coinvolgenti le operazioni già ricordate. Correva l'anno 1832 e, per quei tempi, i metodi di Galois non erano ancora concepibili appieno e solo poche persone le avrebbero potuto apprezzare, infatti ci volle del tempo prima che qualcuno si accorgesse che i lavori del povero Galois meritavano interesse ed erano

[20] Per alcuni tipi particolari di equazioni si riescono a determinare le formule risolutive, ma sono piuttosto difficili da ricordare e non servono a granché, nemmeno da un punto di vista didattico!

[21] La dimostrazione che ne diede Ruffini era affetta da un errore, quindi non accettabile!

[22] Nonché le operazioni inverse di differenza e quoziente.

[23] Contribuendo a creare una nuova branca della Matematica, chiamata oggigiorno Algebra Astratta.

efficienti per dipanare ogni dubbi sulla risolubilità delle equazioni di grado superiore al secondo.
La risposta alla prima questione che avevamo posto, invece, è positiva: è vero, un'equazione di grado n non può avere più di n soluzioni diverse. Anzi, in un campo completo [24], il grande Gauss dimostrò che *un'equazione di grado n ha esattamente n soluzioni, magari non tutte distinte, ma comunque che possano contarsi "coincidenti" per un certo numero di volte* [25]. Correva l'anno 1799 quando Gauss pubblicò la sua dimostrazione, pochi anni più tardi ne fu pubblicata una ancora più semplice, ad opera di Jean-Robert Argand, nell'anno 1814. La cosa notevole è che Argand non era un matematico professionista, bensì un semplice libraio appassionato di Matematica [26]. Il teorema dimostrato dal "Princeps mathematicorum" [27] prende il nome di **Teorema fondamentale dell'Algebra.** Sulla dimostrazione soprassediamo, non fosse altro che ci vorrebbero strumenti più raffinati di quelli che abbiamo finora visto e, soprattutto, non è interessante ai fini dello sviluppo della presente opera.

6. La fattorizzazione dei polinomi di secondo grado

Per ogni polinomio di secondo grado, vi è associata una equazione di secondo grado ottenuta uguagliando a zero il polinomio stesso. Tra le soluzioni dell'equazione ed i coefficienti del polinomio esistono delle notevoli relazioni che permetterebbero, addirittura, di risolvere le equazioni a partire dai coefficienti del polinomio e fattorizzare il polinomio a partire dalle soluzioni dell'equazione associata. In questa paragrafo indagheremo su tali relazioni e completeremo il discorso lasciato in sospeso alla file del precedente capitolo.

Consideriamo il polinomio "standard" di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c;$$

[24] Cosa che i numeri reali ancora non sono, infatti si possono introdurre altri tipi di numeri, costruendoli un po' come sono stati costruiti i vari insiemi numerici, chiamati *numeri complessi,* che costituiscono un campo completo.

[25] Ovvero, come si dice solitamente: "n soluzioni prese con la propria molteplicità"

[26] D'altra parte, altre grandi menti matematiche non erano matematici professionisti: basti pensare a Fermat, il cui mestiere era magistrato o Leibniz, di cui si può dire che fosse un matematico, filosofo, scienziato, logico, inventore di linguaggi, diplomatico, giurista, storico, magistrato ecc...)

[27] Epiteto che si riferisce a Carl Friedrich Gauss, considerato, appunto, il "Principe dei matematici".

uguagliando a zero otteniamo l'associata equazione di secondo grado. Rendiamo l'equazione monica, mettendo in evidenza il coefficiente di secondo grado a, ottenendo:

$$a \cdot (x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0.$$

Ora, l'equazione di partenza equivale esattamente a quest'altra:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Supponiamo che essa abbia soluzioni x_1 e x_2, non necessariamente distinte [28]. La definizione di soluzione di una equazione implica che questi numeri, sostituiti a posto dell'incognita x rendono il polinomio di secondo grado $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ esattamente pari a zero. D'altra parte anche il prodotto

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

si annulla degli stessi numeri x_1 e x_2, per cui i due polinomi di secondo grado, quello ottenuto da quest'ultimo prodotto di binomi e quello monico scritto prima, devono coincidere. Abbiamo allora

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - x_1) \cdot (x - x_2).$$

D'altra parte, il prodotto delle due parentesi scritte prima, non è altro che

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$$

per cui concludiamo che [29]

$$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$$

e

$$\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2.$$

Se $a = 1$ certamente si ha che *il coefficiente della parte lineare è la somma, cambiata di segno, delle soluzioni dell'equazione, mentre il termine noto è il prodotto delle due soluzioni.*

A questo punto, per fattorizzare il polinomio di secondo grado, basta trovare le soluzioni dell'equazione associata e riscrivere il polinomio sotto forma di

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2).$$

[28] Nel caso non abbia soluzione, non ci sarebbe nulla da dire.

[29] Qualche autore lo chiama, in modo altisonante, "*Principio di identità dei polinomi*": in breve, due polinomi di pari grado, per coincidere, dovendo avere gli stessi identici monomi e quindi devono avere i coefficienti delle potenze di x, dello stesso grado, uguali.

Ad esempio, si voglia fattorizzare il polinomio

$$2x^2 + 5x - 3.$$

Le soluzioni, dell'equazione associata, sono date da

$$x_{1,2} = \frac{-5 \mp \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \mp 7}{4}$$

ovvero $x_1 = -3$ e $x_2 = \frac{1}{2}$. Il polinomio si fattorizza, allora, in

$$2 \cdot (x - \frac{1}{2}) \cdot (x + 3)$$

o, meglio ancora,

$$(2x - 1) \cdot (x + 3).$$

Osservazione: vogliamo ribadire, ancora una volta, il fatto che se $\Delta = 0$, le due soluzioni coincidono in una sola: in questo caso si ha la fattorizzazione

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1)^2$$

ovvero, **in corrispondenza del discriminante nullo, il polinomio di secondo grado non è altro che il quadrato di un binomio.** Se, invece, l'equazione di secondo grado non ha soluzioni, allora il trinomio non si può fattorizzare come prodotto di due fattori di primo grado: questo avviene proprio per $\Delta < 0$.

In ultimo osserviamo che, avendo un polinomio monico di secondo grado, si può arrivare alla soluzione dell'equazione associata, cercando due numeri la cui somma, cambiata di segno, coincida con il coefficiente del monomio di primo grado ed il cui prodotto risulti essere il termine noto. Anzi, in pratica conviene cercare una scomposizione del termine noto come prodotto di due numeri e poi verificare quale coppia, tra queste fattorizzazioni, abbiano la somma cambiata di segno pari al coefficiente b dell'equazione stessa. Per esempio, vogliamo determinare le soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

senza applicare la formula risolutiva. A tale fine consideriamo i prodotti tra due numeri che diano come risultato 5, essi sono essenzialmente due

$$1 \cdot 5$$

ovvero

$$(-1) \cdot (-5).$$

La prima coppia ha somma

$$1 + 5 = 6$$

e dato che questa, cambiata di segno, coincide con il secondo addendo del polinomio di secondo grado, abbiamo trovato le due soluzioni, che sono $x_1 = 1$ e $x_2 = 5$. Altro esempio, determinare le soluzioni, senza applicare alcuna formula (e senza utilizzare il Teorema di Ruffini), di

$$2x^2 + 6x - 8 = 0.$$

Prima di tutto rendiamo l'equazione monica mettendo in evidenza il coefficiente del termine di secondo grado:

$$2 \cdot (x^3 + 3x - 4) = 0.$$

Le coppie di numeri che, moltiplicate tra loro, danno -4 sono:

$$-1 \cdot 4,$$

$$2 \cdot (-2)$$

e

$$1 \cdot (-4).$$

Ora, la prima coppia ha somma 3, la seconda 0 mentre la terza -3. Dato che il termine b dell'equazione monica è $+3$, scegliamo come soluzioni la terza coppia, ovvero $x_1 = 1$ e $x_2 = -3$. Si osservi che, per risolvere le equazioni, anche se non lo scriviamo esplicitamente, stiamo, in effetti, determinando le fattorizzazioni, in prodotto di binomi lineari, del polinomio di secondo grado associato: ad esempio, per quest'ultima equazione studiata, abbiamo determinato che

$$2x^2 + 6x - 8 = 2(x - 1)(x + 3),$$

da cui si leggono le due soluzioni testé date $x_1 = 1$ e $x_2 = -3$.

7. Equazioni di grado superiore al secondo

Per equazioni di grado superiore al secondo, a meno di casi particolari o riconducibili ad essi, non ci sono formule risolutive: questo è stato il grande risultato dell'algebra moderna, almeno ai suoi inizi. Questo però non significa che si rinuncia a risolvere le equazioni dal terzo grado in su: c'è una tecnica semplice che, nei casi fortunati in cui si può applicare, risolve il problema in modo completo [30]. L'idea fondamentale è questa: si fattorizza il polinomio in un prodotto di polinomi di grado inferiore, possibilmente fino ad ottenere fattori irriducibili e poi si fa la considerazione che un prodotto è nullo se e soltanto almeno

[30] In caso contrario, bisognerà procedere con tecniche di "analisi numerica", che verranno illustrate in altri volumi della presente opera.

uno dei fattori si annulla; in questo modo si ottengono tante equazioni di primo grado per quanti sono i fattori trovati nella decomposizione e si risolvono queste ultime equazioni, a meno di aver trovato fattori irriducibili non risolvibili, presentando polinomi di secondo grado a discriminante negativo. Di fondamentale aiuto torna, in questo caso, la conoscenza del teorema di Ruffini, dato che con esso viene agevolata la ricerca dei fattori irriducibili del tipo $x - a$.

Esempio: Determinare le soluzioni dell'equazione

$$x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0.$$

Soluzione: Siamo in presenza di una equazione di quarto grado, per cui non abbiamo formule risolutive utili. Cerchiamo, per quanto possibile, di fattorizzare il polinomio, che indichiamo per comodità $p(x)$. Per il teorema di Ruffini, dato che $p(1) = 1 + 2 - 13 - 14 + 24 = 0$ allora un fattore è $(x - 1)$.
Cerchiamo altri fattori in questo modo: notiamo che anche $p(3) = 0$, così come $p(-2)$ e $p(-4)$. Ora, dato che abbiamo già trovato quattro fattori irriducibili di primo grado, abbiamo finito "il gioco". Possiamo scrivere quindi:

$$p(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 2)(x + 4).$$

L'equazione ha quindi le quattro soluzioni seguenti:

$$(x - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1,$$

oppure

$$(x - 3) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 3,$$

oppure

$$(x + 2) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -2$$

o, infine

$$(x + 4) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -4.$$

□

Esempio: Risolvere l'equazione

$$x^3 + 2x^2 + x - 4 = 0.$$

Soluzione: Cerchiamo di fattorizzare il polinomio. Per $x = 1$ si ha la valutazione $1+2+1-4 = 0$ e quindi $(x-1)$ è un fattore. Purtroppo non vi sono altri numeri per i quali la valutazione del polinomio sia zero. Allora procediamo con la divisione, nel dubbio che il teorema di Ruffini non sia abbastanza potente per scoprire ulteriori fattori lineari. Dopo qualche passaggio otteniamo il seguente risultato:

$$(x^3 + 2x^2 + x - 4) : (x - 1) = x^2 + 3x + 4.$$

Quindi l'equazione di partenza la possiamo riscrivere come

$$(x-1)(x^2+3x+4)=0.$$

Le soluzioni sono date da $(x-1)=0$ oppure $(x^2+3x+4)=0$. La prima equazione dà il valore $x=1$ come soluzione, la seconda non dà alcun altro valore aggiuntivo, dato che l'equazione di secondo grado in questione ha $\Delta=9-16=-7$ negativo [31].

□

8. Equazioni fratte ed equazioni riconducibili a forme note

Si attribuisce la parola "fratte" a quelle equazioni algebriche in cui l'incognita compare ad almeno un denominatore di qualche frazione; ad esempio $\frac{1}{x}=1$ è una equazione fratta. Non serve fare una teoria a parte per le equazioni fratte, dato che esse possono essere ricondotte a semplici equazioni non-frazionarie applicando il principio di equivalenza tra due frazioni.
Esso può essere sintetizzato in questa frase:

> *"Due frazioni sono uguali se e soltanto se il prodotto a croce, numeratore di una frazione per denominatore dell'altra, esce sempre lo stesso numero".*

In formule:

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \quad \Longleftrightarrow \quad A\cdot D=B\cdot C.$$

L'unica cosa a cui bisogna sempre stare attenti è che non tutte le soluzioni ottenute, eliminando le frazioni, debbono essere necessariamente accettate come soluzioni dell'equazione di partenza; infatti, se alcune di esse annullano almeno un denominatore, dovranno essere scartate: le divisioni per zero, per quanto bravi possiate pensare d'essere, non si possono comunque fare! Per cui, ***dopo aver determinato le soluzioni, bisogna sempre verificare che esse siano accettabili.***

Esempio: Si risolva la seguente equazione:

$$\frac{5}{x+1}-\frac{5}{x-1}+\frac{19}{3}=x^2-1.$$

Soluzione: Scriviamo l'equazione in forma di uguaglianza tra due frazioni:

$$\frac{5(x-1)-5(x+1)}{(x+1)(x-1)}=x^2-\frac{22}{3},$$

[31] Ovvero x^2+3x+4 è un fattore irriducibile.

[32] ovvero

$$\frac{-10}{x^2-1} = \frac{3x^2-22}{3}.$$

A questo punto effettuiamo il prodotto a croce e scriviamo la seguente equazione:

$$-10 \cdot 3 = (3x^2-22)(x^2-1)$$

e dopo pochi passaggi

$$3x^4 - 25x^2 + 52 = 0.$$

Questa è, almeno nella forma, un'equazione di secondo grado, infatti la possiamo riscrivere sotto forma di

$$3(x^2)^2 - 25(x^2) + 52 = 0,$$

in cui x^2 prende il posto di x nell'equazione standard. Allora la possiamo risolvere esattamente come se fosse un'equazione di secondo grado, con la "piccola" differenza di non determinare subito il valore dell'incognita x, bensì del suo quadrato. Ora

$$x^2_{1,2} = \frac{25 \mp \sqrt{25^2 - 12 \cdot 52}}{6} = \frac{25 \mp 1}{6}.$$

Otteniamo quindi le due equazioni

$$x^2 = 4$$

e

$$x^2 = \frac{\cancel{26}^{\,13}}{\cancel{6}_{\,2}}.$$

Estraendo le radici quadrate otteniamo le quattro soluzioni:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -\sqrt{\frac{13}{2}} \quad \text{e} \quad x_4 = \sqrt{\frac{13}{2}};$$

esse sono tutte accettabili in quanto nessuna annulla denominatori espressi nell'equazione iniziale.

□

[32] Ricordiamo che per sommare due frazioni, anche nel caso in cui non siano espressi unicamente numeri, bensì espressioni (con polinomi o altro) la regola è sempre quella presentata nella costruzione dell'insieme $\mathbb{Q}$ ovvero

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D + B \cdot C}{B \cdot D}.$$

Esempio: Si risolva la seguente equazione:

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 - x} + \frac{x-1}{x+1} = 1.$$

Soluzione: Riportiamo in forma standard come uguaglianza tra due sole frazioni [33]:

$$\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{x}{x^2 - x},$$

$$\frac{x + 1 + x(x-1)}{x(x+1)} = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x},$$

$$\frac{x^2 + 1}{x(x+1)} = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x}.$$

Ora -brutalmente [34]- facciamo il prodotto a croce:

$$(x^2 + 1)(x^2 - x) = (x^2 - 2x) \cdot x(x+1).$$

Svolgendo qualche calcolo:

$$x^4 - x^3 + x^2 - x = x^4 + x^3 - 2x^3 - 2x^2,$$

otteniamo

$$3x^2 - x = 0.$$

Questa è una equazione di secondo grado incompleta, mettiamo x in evidenza ed otteniamo

$$x \cdot (3x - 1) = 0,$$

da cui

$$x = 0 \quad \text{oppure} \quad x = \frac{1}{3}.$$

Verifichiamo che la prima opzione non è accettabile, dato che annulla il denominatore della prima frazione nell'equazione iniziale, mentre la seconda è accettabile: ergo la soluzione dell'equazione è (solamente) $x = \frac{1}{3}$.

□

[33]Questo si può fare in tanti modi, per esempio sottraendo, per come faremo, da entrambi i membri la seconda frazione presente nella traccia!

[34]Dato che si potrebbe semplificare la seconda frazione, prima di procedere...

8.1. Accenni a forme particolari. Già abbiamo incontrato un'equazione di grado superiore riconducibile ad una equazione di secondo grado, era

$$3x^4 - 25x^2 + 52 = 0.$$

In effetti si poteva fare la posizione:

$$X = x^2$$

e l'equazione si sarebbe potuta riscrivere come

$$3X^2 - 25X + 52 = 0,$$

vedendo ancora più chiaramente la **forma** dell'equazione di secondo grado. Equazioni di questo tipo si chiamano ***biquadratiche***, da "doppiamente quadratiche". Per risolverle basta applicare la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado, per la variabile al quadrato, scartare le soluzioni negative, delle quali non si possono determinare le radici quadrate ed estrarre le radici delle soluzioni positive [35] Ci sono anche altre equazioni, di grado superiore al secondo, che possono essere ricondotte a forme note; ad esempio, tutti i trinomi in cui compare un monomio di grado doppio di un altro e uno di grado zero, ovvero del tipo

$$a\,x^{2n} + b\,x^n + c = 0.$$

In questo caso basta fare la posizione

$$X = x^n$$

ed essa assume la tipica forma di un'equazione di secondo grado. Chiaramente non si determineranno direttamente i valori-soluzione dell'equazione di partenza, bensì dei valori che rappresentano la potenza $n-$esima dell'incognita. La soluzione [36] sarà data dalla determinazione dei radicali di ordine n dei numeri trovati con la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado (ove è possibile determinare tali radici).

9. Accenno alle equazioni irrazionali

Le equazioni algebriche irrazionali sono quelle in cui l'incognita compare come radicando in almeno un radicale: detto altrimenti, sono quelle ove compare almeno una potenza ad esponente razionale, non intero, dell'incognita oppure un polinomio come radicando di qualche radicale. Ad esempio, è irrazionale l'equazione

$$\sqrt{x} - 1 = 0.$$

[35] Come fatto nell'esercizio precedente.

[36] Per una ragione che apparirà chiara subito dopo aver letto la prossima sezione.

Non è irrazionale l'equazione

$$\sqrt{x^4} + x - 2 = 0,$$

dato che si potrebbe riscrivere come

$$x^2 + x - 2 = 0$$

che è una equazione di secondo grado. Per risolvere le equazioni irrazionali, basta riscriverle eliminando i radicali e, per fare ciò, in genere, si isolano i termini con le radici e si elevano entrambi i membri dell'equazione per un numero opportuno. Ad esempio se l'equazione è

$$\sqrt{x-2} + x = 4,$$

si potrebbe operare isolando la radice al primo membro ed elevando al quadrato il tutto:

$$\sqrt{x-2} = 4 - x$$

$$(x-2) = (4-x)^2.$$

Bisogna comunque **prestare molta attenzione** al fatto che non è detto che le soluzioni dell'equazione ottenuta eliminando le radici, debbano essere accettate come soluzioni dell'equazione irrazionale iniziale: infatti, se almeno un radicando [37] diventasse negativo, valutandolo con la soluzione trovata, questo stesso numero dovrebbe essere scartato come soluzione, in quanto le radici di numeri negativi non esistono!

Bisogna sempre verificare che le soluzioni trovate siano accettabili!

Continuiamo con la risoluzione dell'equazione portata in esempio:

$$x - 2 = 16 - 8x + x^2$$

da cui

$$x^2 - 9x + 18 = 0,$$

le soluzioni sono date da

$$x_1 = 3 \quad \text{e} \quad x_2 = 6.$$

L'unico radicando presente nell'equazione irrazionale data è $x - 2$ che rimane positivo sia valutandolo con x_1 sia valutandolo con x_2, ergo i numeri trovati sono entrambi soluzione dell'equazione irrazionale data.

□

[37] Di un radicale ad indice pari.

Esempio: Si risolva la seguente equazione [38]:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} = \frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{20+4x}}.$$

Soluzione: Per prima cosa effettuiamo il prodotto a croce per eliminare le razioni:

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{20+4x} = (4-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x}+4);$$

il secondo membro è un prodotto notevole "somma per differenza", mentre per il primo membro effettuiamo la moltiplicazione tra radicali:

$$\sqrt{20x+4x^2} = 16-x.$$

Elevando al quadrato otteniamo

$$4x^2+20x = (16-x)^2$$

e, dopo qualche altro passaggio

$$3x^2+52x-256 = 0.$$

Applichiamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Dato che il termine lineare ha coefficiente pari, possiamo semplificare un po' i calcoli in questa maniera:

$$x_{1,2} = \frac{\left(-\frac{b}{2}\right)\mp\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a},$$

in pratica effettuiamo la divisione per 2 prima ancora di svolgere qualsiasi altro calcolo [39]. Procediamo quindi con

$$x_{1,2} = \frac{-26\mp\sqrt{26^2+3\cdot 256}}{5} = \frac{-26\mp\sqrt{1444}}{3} = \\ = \frac{-26\mp 38}{3}$$

da cui

$$x_1 = 4 \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{64}{3}.$$

[38] Irrazionale ed anche fratta!

[39] Qualche autore si riferisce a questa formula come **formula ridotta** e chiama il radicando presente nell'espressione "delta quarti", ovvero pone

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac,$$

dato che è proprio Δ diviso per quattro.

Ora, per l'equazione di partenza, la soluzione trovata x_2 non è accettabile, dato che altrimenti la $\sqrt{x}$ avrebbe il radicando negativo, mentre l'altro numero x_1 è accettabile poiché alcun radicando diverrebbe negativo: quindi la soluzione dell'equazione irrazionale proposta è $x = 4$.

□

CAPITOLO 13

Problemi di secondo grado

Dopo aver discusso sull'aspetto tecnico dei calcoli, passiamo ora alla parte più interessante e divertente: risolviamo problemi. Ricordiamo che quando si risolvono problemi, a parte i calcoli da fare per arrivare ad una soluzione, la cosa principale è impostarli e, pertanto, possibilmente, presentare uno schema risolutivo, magari tramite una tabella riassuntiva ovvero un quadro sinottico. Nella grande famiglia dei problemi di secondo grado, ovvero la cui impostazione porta alla risoluzione di un'equazione di secondo grado, compaiono tutti quelli in cui si applicano i teoremi di Euclide o di Pitagora: d'altra parte essi parlano esplicitamente di quadrati e rettangoli! Oltre, comunque, ai problemi di natura geometrica, molti altri si presentano in svariati contesti: passeremo in rassegna alcuni stereotipi, risolvendoli negli esempi seguenti.

Problema 7. *Un gruppo di persone deve pagare un conto di* $108,00$ *euro, diviso in parti uguali. Due di questi però non pagano e perciò il debito di ciascuno degli altri si trova aumentato di* $9,00$ *euro. Quanti erano i debitori, inizialmente?*

Soluzione: Immaginiamo che x sia il numero delle persone all'inizio, e riassumiamo nella seguente tabella la situazione descritta nel problema:

	Prima	Dopo
Numero Persone	x	$x-2$
Quota pro-capite	$\frac{108}{x}$	$\frac{108}{x}+9$
Totale di tutte le quote	108	$(x-2)\cdot\left(\frac{108}{x}+9\right)$

C'è un ovvio invariante, rappresentato dal totale da pagare, per cui possiamo imporre l'equazione:

$$108 = (x-2)\cdot\left(\frac{108}{x}+9\right).$$

E, dopo qualche passaggio...

$$108 = 108 + 9x - \frac{216}{x} - 18$$

$$9x^2 - 18x - 216 = 0.$$

Dividendo tutto per nove otteniamo l'equazione equivalente semplificata:

$$x^2 - 2x - 24 = 0,$$

le cui soluzioni sono date [1] da

$$x_{1,2} = 1 \mp 5,$$

ovvero $x_1 = -4$ e $x_2 = 6$. Chiaramente la soluzione negativa è da scartare, dato che, dal contesto, si evince che si debbano considerare unicamente soluzioni positive [2], per cui concludiamo che i debitori, inizialmente, erano 6.

□

Molto simile al problema appena discusso, è il seguente di carattere molto più tecnico:

Problema 8. *Si è previsto che un certo numero di colonne deve sostenere un carico di* 15840 *kg. Si è poi costretti, in fase di realizzazione, a sopprimere tre colonne; questo causa un aumento del carico sostenuto da ognuna delle rimanenti di* 440 *kg. Qual è il numero delle colonne previste in fase di progetto?*

Soluzione: Sia x il numero delle colonne e riportiamo in una tabella tutto quello che viene detto nel problema.

	Prima	Dopo
Numero Colonne	x	$x-3$
Carico cadauna	$\frac{15840}{x}$	$\frac{15840}{x}+440$
Carico totale	15840	$(x-3)\cdot\left(\frac{15840}{x}+440\right)$

[1]Utilizziamo la "formula ridotta".

[2]Non si può fare una raccolta di soldi tra un numero negativo di persone!

Come per il problema precedente, nell'ultima riga, sulle due colonne, deve essere presente lo stesso carico totale, per cui si ricava la seguente equazione:

$$15840 = (x-3) \cdot \left(\frac{15840}{x} + 440 \right).$$

Passaggi analoghi a quelli effettuati nel problema precedente, considerando che $15840 = 440 \cdot 36$, portano alla seguente equazione:

$$440x^2 - 440 \cdot 3\,x - 440 \cdot 36 \cdot 3 = 0.$$

Dividendo tutto per 440 si ottiene l'equazione equivalente

$$x^2 - 3x - 36 \cdot 3 = 0.$$

Applichiamo ora la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado e troviamo le due soluzioni:

$$x_{1,2} = \frac{3 \mp \sqrt{9 + 36 \cdot 12}}{2} = \frac{3 \mp \sqrt{9 \cdot (1+48)}}{2} = \frac{3 \mp 21}{2}.$$

Ragionevolmente scartando la soluzione negativa, si perviene al risultato $x = 12$. Quindi le colonne previste in fase di progetto erano dodici.

□

Passiamo ora ad un problema che si colloca nel mondo della cinematica.

Problema 9. *Due automobili partono contemporaneamente per un viaggio lungo* 360 *Km, che percorrono a velocità costante. La prima automobile, che viaggia ad una velocità superiore di* 10 *Km/h a quella della seconda, arriva mezz'ora prima. A che velocità hanno viaggiato le due auto?*

Soluzione: Sia v_1 la velocità della prima automobile. Riportiamo in una opportuna tabella quello che sappiamo del problema.

	Auto 1	Auto 2
Velocità	v_1	$v_1 - 10$
Tempo impiegato	$\frac{360}{v_1}$	$\frac{360}{v_1-10}$

Osserviamo che il tempo scorre uguale per tutti [3] e quindi possiamo scrivere che

$$\frac{360}{v_1} = \frac{360}{v_1 - 10} - \frac{1}{2}$$

indicando la frazione $\frac{1}{2}$ la mezz'ora di ritardo della seconda automobile sulla prima. Pertanto possiamo scrivere

$$\frac{360}{v_1} = \frac{360 \cdot 2 - (v_1 - 10)}{2 \cdot (v_1 - 10)}$$

e quindi, effettuando il prodotto a croce,

$$2 \cdot (v_1 - 10) \cdot 360 = v_1 \cdot (720 - v_1 + 10).$$

Dopo qualche altro passaggio...

$$720v_1 - 7200 = 720v_1 - v_1^2 + 10v_1$$

ovvero

$$v_1^2 - 10v_1 - 7200 = 0.$$

Risolvendo tramite formula risolutiva (ridotta) e trascurando la soluzione negativa, priva di significato "fisico", otterremo:

$$v_1 = 5 + \sqrt{7225} = 5 + 85 = 90 \quad (\mathrm{Km/h}).$$

A questo punto sappiamo che la prima automobile viaggiava a 90 Km/h mentre l'altra a 80 Km/h.

□

PROBLEMA 10. *Un serbatoio si vuota in 15 ore se sono aperti i due tubi di scarico; se viene aperto solo il tubo più piccolo, occorrono, per svuotare il serbatoio, 16 ore in più che se fosse aperto solo il tubo più grosso. Quanto tempo occorre affinché il serbatoio venga vuotato aprendo solo lo scarico più grosso?*

Soluzione: ragioniamo in termini di *portata,* ovvero di variazioni di volume nel tempo, nel caso precipuo: quanti litri passano in un'ora [4]. Rappresentiamo in una tabella tutti i dati del problema, indicando con x il tempo impiegato dallo scarico più grande, per svuotare la vasca.

	Scarico piccolo	Scarico grande
Tempo Svuotamento Vasca	$x + 16$	x
Portata (Vasca/Ore)	$\frac{1}{x+16}$	$\frac{1}{x}$

[3] Cosa che non sarebbe vera se fossimo in un contesto "relativistico".

[4] O in qualche altro periodo di tempo.

Ora, la portata degli scarichi aperti contemporaneamente è la somma delle singole portate dei due scarichi e, sappiamo, che assieme impiegano 15 ore, il ché vuol dire che assieme, i due scarichi, avrebbero la portata di un singolo scarico pari a $\frac{1}{15}$. Per cui scriveremo l'equazione:

$$\frac{1}{x+16}+\frac{1}{x}=\frac{1}{15}.$$

Dopo facili passaggi, che riportiamo di seguito, otterremo l'equazione di secondo grado che risolve il problema.

$$\frac{x+(x+16)}{x(x+16)}=\frac{1}{15},$$

$$15(2x+16)=x^2+16x;$$

$$x^2-14x-240=0.$$

$$x_{1,2}=7\mp\sqrt{49+240}=7\mp 17.$$

Scartando la soluzione negativa, priva di significato "fisico", si ha la soluzione $x=24$.
Quindi occorrono 24 ore affiché lo scarico grosso svuoti la vasca "lavorando" da solo.

Problema 11. *Trova a quale distanza tra Terra e Luna, sulla congiungente dei loro centri, un corpo rimarrebbe in equilibrio sotto l'azione delle attrazioni gravitazionali dei due corpi celesti. Si assuma il valore di 385000 Km come distanza Terra-Luna e 81 come rapporto tra le loro masse* [5].

Soluzione: Indichiamo la distanza tra il corpo e la terra con x. A questo punto possiamo compilare una opportuna tabella da cui prender le mosse per l'impostazione dell'equazione risolutiva.

	Terra	Luna
Distanza dal corpo	x	$385000-x$
Forza esercitata sul corpo	$G\cdot\frac{M_{\text{terra}}\cdot M_{\text{corpo}}}{x^2}$	$G\cdot\frac{M_{\text{luna}}\cdot M_{\text{corpo}}}{(385000-x)^2}$

[5] Si ricordi che la legge di attrazione gravitazionale, formulata da Newton nella seconda metà del XVII secolo, secondo cui ogni corpo attrae qualsiasi altro con una forza che è direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

Osserviamo che se il corpo è in equilibrio, allora le forze attrattive si devono bilanciare, per cui si può porre:

$$G \cdot \frac{M_{\text{terra}} \cdot M_{\text{corpo}}}{x^2} = G \cdot \frac{M_{\text{luna}} \cdot M_{\text{corpo}}}{(385000 - x)^2}.$$

A questo punto semplifichiamo:

$$\cancel{G} \cdot \frac{M_{\text{terra}} \cdot \cancel{M_{\text{corpo}}}}{x^2} = \cancel{G} \cdot \frac{M_{\text{luna}} \cdot \cancel{M_{\text{corpo}}}}{(385000 - x)^2}.$$

Quindi si ha pure

$$\frac{\frac{M_{\text{terra}}}{M_{\text{luna}}}}{x^2} = \frac{1}{(385000 - x)^2}$$

e, sostituendo il rapporto noto:

$$\frac{81}{x^2} = \frac{1}{(385000 - x)^2}.$$

Per risolvere, procediamo con il solito prodotto a croce e portiamo tutto ad un membro:

$$81 \cdot (385000 - x)^2 = x^2,$$

$$80\,x^2 - 81 \cdot 770000x + 81 \cdot 385000^2 = 0.$$

Per non scrivere troppi zeri, eliminiamone tre e ricordiamoci di aggiungerli alla soluzione che troveremo, riportando l'equazione alla forma:

$$80x^2 - 81 \cdot 770\,x + 81 \cdot 385^2 = 0.$$

Applichiamo la formula in forma ridotta:

$$x_{1,2} = \frac{81 \cdot 385 \mp \sqrt{(81 \cdot 385)^2 - 80 \cdot 81 \cdot 385^2}}{80}.$$

A questo punto troviamo le due soluzioni

$$x_{1,2} = \frac{81 \cdot 385 \mp 385\sqrt{81^2 - 80 \cdot 81}}{80} = \frac{81 \cdot 385 \mp 385\sqrt{81 \cdot (81 - 80)}}{80} =$$

$$= \frac{81 \cdot 385 \mp 385 \cdot 9}{80} = \frac{385}{80}\,(81 \mp 9).$$

Le due soluzioni sono quindi

$$x_1 = \frac{385 \cdot 72}{80} = 346.5 \quad 2 \quad x_2 = \frac{385 \cdot 90}{80} = 433.125.$$

Ricordiamoci ora di moltiplicare per 1000 per ritornare all'equazione risolutiva del nostro problema, ottenendo le due soluzioni

$$x_1 = 346500\,\text{Km} \quad \text{e} \quad x_2 = 433125\,\text{Km}.$$

Visto che il corpo deve stare tra Terra e Luna, la seconda soluzione non è accettabile [6], per cui il corpo dovrà stare ad una distanza di 346500 Km dalla terra.

□

Problema 12. *Abbiamo due resistenze di cui non conosciamo il valore, ma sappiamo che esse equivalgono ad un'unica resistenza di* 10 *ohm, se poste in serie ed ad una di* 2.4 *ohm, se poste in parallelo. Possiamo determinare il valore delle due resistenze?*

Soluzione: La risposta è affermativa e parte dalla seguente considerazione: la resistenza totale, nel caso di posizione in serie, è data dalla somma delle resistenze e, nel caso della posizione in parallelo, si sa che il reciproco della resistenza totale è la somma dei reciproci delle singole resistenze. Per cui possiamo rappresentare la situazione in tabella.

	Resistenza 1	Resistenza 2
serie	x	$10 - x$

Imponendo la condizione sul caso di resistenze in parallelo avremmo

$$\frac{1}{2.4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{10 - x}.$$

Riportiamo tutto al caso di uguaglianza tra due frazioni, sommando le frazioni del secondo membro:

$$\frac{10}{24} = \frac{(10 - x) + x}{x \cdot (10 - x)},$$

$$\frac{10}{24} = \frac{10}{10x - x^2}$$

ed essendo due frazioni con ugual numeratore uguali se e soltanto se anche i denominatori sono tali, imponiamo l'equazione:

$$24 = 10x - x^2,$$

ovvero

$$x^2 - 10x + 24 = 0.$$

Le due soluzioni, facilmente ricavabili anche "ad occhio" sono 4 e 6 e, essendo entrambe positive, esse corrispondono al valore di ciascuna delle due resistenze [7]

[6] In considerazione del fatto che la distanza tra Terra e Luna è inferiore al risultato x_2 trovato!

[7] Provare per credere!

□

PROBLEMA 13. *Se un padre ed un figlio hanno oggi rispettivamente quaranta e cinque anni, tra quanti anni il rapporto tra le età dei due sarà uguale al triplo degli anni trascorsi da oggi?*

Solizione: Questo è il tipico indovinello da "settimana enigmistica". La risoluzione è abbastanza semplice una volta impostata la seguente tabella, dove n indica il numero di anni che passano:

	Padre	Figlio
Età ora	40	5
Età tra n anni	$40+n$	$5+n$

Per cui si richiede di risolve la seguente equazione

$$\frac{40+n}{5+n} = 3 \cdot n,$$

ovvero

$$40 + n = 15n + 3n^2$$

ed, infine

$$3n^2 + 14n - 40 = 0.$$

La risoluzione, come al solito, si determina applicando la formula risolutiva:

$$n_{1,2} = \frac{-7 \mp \sqrt{49+120}}{3} = \frac{-7 \mp 13}{3}.$$

Scartando il valore negativo, ricaviamo il valore n degli anni a venire:

$$n = \frac{13-7}{3} = 2.$$

Infatti, tra due anni il padre avrà 42 anni ed il figlio $7:$ il loro rapporto è di $42 : 7 = 6$ e questo è proprio il triplo di 2.

□

PROBLEMA 14. *In un ristorante pranzano venti persone tra uomini e donne. Alla fine del pranzo, sia il gruppo degli uomini, sia quello delle donne, paga un conto di* $360,00$ *euro. Il ristoratore è però gentile verso le donne, per cui pratica uno sconto di quindici euro a ciascuna donna. In totale, quanti uomini hanno pranzato?*

Soluzione: Indichiamo con x il numero degli uomini, allora possiamo riportare i dati nella seguente tabella:

	Uomini	Donne
Numero di individui	x	$20-x$
Quota pro-capite	$\frac{360}{x}$	$\frac{360}{20-x}$

L'informazione data sullo sconto, ci permette di impostare l'equazione risolutiva: [8]

$$\frac{360}{x} - \frac{360}{20-x} = 15.$$

Riportiamo in forma standard:

$$360 \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{20-x}\right) = 15,$$

$$24 \cdot \frac{(20-x)-x}{x \cdot (20-x)} = 1,$$

$$24 \cdot \frac{20-2x}{20x-x^2} = 1$$

ed, infine:

$$480 - 48x = 20x - x^2,$$

ovvero

$$x^2 - 68x + 480 = 0.$$

Risolviamo al solito con la formula risolutiva ridotta:

$$x_{1,2} = 34 \mp \sqrt{34^2 - 480} = 34 \mp 26.$$

Le soluzioni sono quindi

$$x_1 = 8 \quad \text{e} \quad x_2 = 60,$$

la seconda chiaramente non accettabile, in quanto i due gruppi di persone costituiscono, in totale, un insieme di 20 individui.

□

Concludiamo questa carrellata di esempi con gli ultimi due, il primo tratto da *"Elementi di Algebra" del sacerdote Alessandro Casano, pubblico professore nella Reale Università di Palermo, anno 1833*, il secondo essendo un "classico" della geometria euclidea. Raccomandiamo di svolgere tutti gli esercizi proposti in relazione a questo capitolo,

[8] A parole quello che stiamo per scrivere suona come una cosa del genere: "La differenza tra la quota maschile e quella femminile è di quindici euro".

al fine di godere appieno della propria bravura e trarre la giusta gratificazione, nonché il buon piacere che solo la Matematica può dare [9].

Problema 15. *Tre compagnie di operai, lavorando insieme, farebbero un'opera in 15 ore; se però lavorassero separatamente, la prima compagnia impiegherebbe* $\frac{4}{5}$ *e la terza compagnia* 15 *ore in più rispetto al tempo impiegato dalla seconda. Si cerca il tempo che dovrà impiegare ciascuna compagnia.*

Soluzione: Sia x il tempo, in ore, che impiegherebbe, lavorando da sola, la seconda compagnia per completare il lavoro e rappresentiamo i dati in una tabella.

	1^a compagnia	2^a compagnia	3^a compagnia
Tempo totale	$\frac{4}{5}\,x$	x	$x+15$
Parte lavoro in 1 h	$\frac{1}{\frac{4}{5}x} = \frac{5}{4x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x+15}$

Dato che in quindici ore, assieme, completano un lavoro, possiamo porre

$$\left(\frac{5}{4x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+15}\right) \cdot 15 = 1.$$

Risolviamo semplificando un po' alla volta.

$$\left(\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{5}{4} + 1\right) + \frac{1}{x+15}\right) \cdot 15 = 1,$$

$$\left(\frac{9}{4x} + \frac{1}{x+15}\right) \cdot 15 = 1,$$

$$15 \cdot \frac{9 \cdot (x+15) + 4x}{4x \cdot (x+15)} = 1,$$

$$15 \cdot \frac{13x + 135}{4x^2 + 60x} = 1$$

da cui ricaviamo

$$15 \cdot (13x + 135) = 4x^2 + 60x.$$

[9] Oltre che, ovviamente, per familiarizzare ed impratichirsi con i metodi risolutivi ed i calcoli occorrenti per la risoluzione dei problemi stessi.

Portando tutto ad un membro e semplificando otteniamo la seguente equazione di secondo grado:

$$4x^2 - 135x - 15 \cdot 135 = 0.$$

Risolviamo tramite formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{135 \mp \sqrt{135^2 + 16 \cdot 15 \cdot 135}}{8} =$$
$$= \frac{135 \mp \sqrt{135 \cdot (135 + 240)}}{8} = \frac{135 \mp \sqrt{27 \cdot 5 \cdot 15 \cdot 25}}{8} =$$
$$= \frac{135 \mp \sqrt{81 \cdot 25^2}}{8} = \frac{135 \mp 9 \cdot 25}{8} = \frac{135 \mp 225}{8}.$$

L'unica soluzione accettabile, quella positiva, è dunque

$$x = \frac{135 + 225}{8} = 45.$$

Quindi la seconda compagnia dovrebbe impiegare 45 ore, la prima $\frac{4}{5} \cdot 45 = 36$ ore e la terza $45 + 15 = 60$ ore, se dovessero lavorare separatamente.

□

PROBLEMA 16 (Determinazione della Sezione Aurea). *Tagliare un segmento in modo che esso risulti ripartito nella proporzione "medio ed estremo"* [10]*, ovvero determinare la parte del segmento medio proporzionale tra quella rimanente e l'intero segmento.*

Soluzione: Se x indica la distanza del punto di divisione da uno degli estremi e supponiamo che il segmento sia lungo 1, allora la parte rimanente sarà lunga $1 - x$; per cui possiamo imporre la seguente proporzione:

$$1 : x = x : (1 - x)$$

da cui si ricava la seguente equazione di secondo grado:

$$x^2 = 1 - x,$$

o ancora

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Le soluzioni di questa equazione sono date da

$$x_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2},$$

[10] Come avrebbe scritto fra' Luca Pacioli nella sua opera "De Divina Proportione"

scartando quella negativa, che non ha alcun significato geometrico, rimane

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618.$$

Concludiamo qui, sebbene su questo numero trovato, ci sarebbe da scrivere una montagna di libri!

□

1. Accenno alla risoluzione delle disequazioni

Ogni volta si mettono a confronto quantità non uguali, almeno una delle quali è suscettibile di assumere valori diversi, si definisce una disequazione. In generale, risolvere una disequazione significa determinare in quali intervalli di valori la prima quantità risulta maggiore, o minore, della seconda quantità. Si utilizzeranno i seguenti simboli: per denotare che la quantità Q_1 è *maggiore* della quantità Q_2 scriveremo

$$Q_1 > Q_2.$$

Inversamente potremmo dire, in questo caso, che la seconda quantità è *minore* della prima, scrivendo

$$Q_2 < Q_1.$$

Se è ammesso che una delle due quantità sia al più maggiore o al più minore, ovvero se è ammesso che le due quantità siano anche uguali tra loro, si utilizzeranno le seguenti scritture:

$$Q_1 \geqslant Q_2, \quad \text{ovvero} \quad Q_2 \leqslant Q_1.$$

Ora, risolvere una disequazione si riduce, sostanzialmente, alla risoluzione di una equazione, ottenuta cambiando il simbolo di disuguaglianza con quello di uguaglianza. Il ragionamento che segue giustifica l'affermazione testé fatta. Iniziamo con l'osservare che una quantità positiva, se prima non si annulla, non può diventare negativa e, viceversa, se essa è negativa, non può diventare positiva se prima "non passa da zero" [11]. Questo principio viene chiamato della *permanenza del segno* e verrà dimostrato quando si affronteranno gli argomenti di analisi infinitesimale (tra il quarto ed il quinto anno di corso). Si badi bene che non è detto che una quantità debba per forza cambiare di segno, ovvero diventare maggiore o minore di zero, una volta che si sia annullata: semplicemente non può farlo se prima non si annulla! Osserviamo ora che se $Q_1 > Q_2$ allora la differenza $Q_1 - Q_2$ è positiva,

[11] In verità potrebbe succedere che la caratteristica di positività o negatività possa cambiare senza che la quantità stessa si annulli, ma ciò avviene, comunque, in casi particolari, determinati dall'uguaglianza a zero di qualche quantità.

ovvero $Q_1 - Q_2 > 0$ e, viceversa, se $Q_1 < Q_2$ allora $Q_1 - Q_2 < 0$. Possiamo quindi ricondurre tutte le disequazioni alla ricerca degli intervalli ove una sola quantità, ottenuta come differenza tra le due, sia maggiore o minore di zero. A questo punto il ragionamento su cui si basa il nostro modo di operare è questo: sapendo dove una quantità si annulla, si sa anche dove essa non è pari a zero e, per il principio della permanenza del segno, in ogni intervallo in cui l'espressione non è nulla, il segno che ha è esattamente quello che ha in un valore qualsiasi dell'intervallo stesso. Basta allora "saggiare" [12] l'espressione in valori arbitrariamente e comodamente presi in ciascuno di questi intervalli per stabilirne il segno. Procediamo con qualche esempio.

Esempio: Si risolva la disequazione

$$2x - 3 > x + 5.$$

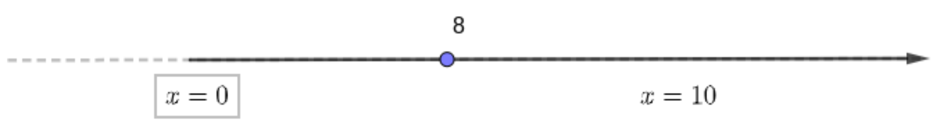
Soluzione: Dalla disequazione, passiamo all'equazione associata

$$2x - 3 = x + 5$$

la cui soluzione è

$$x = 8.$$

A questo punto si sa dove le due quantità risultano uguali: è per $x = 8$.



Prima di tale valore c'è, ad esempio, $x = 0$. Per tale valore si avrebbe

$$2 \cdot 0 - 3 = -3$$

come primo membro e

$$0 + 5 = 5$$

come secondo membro: visto che -3 non è maggiore di 5, la disequazione nell'intervallo $(-\infty, 8)$ non è soddisfatta. D'altra parte, dopo $x = 8$ c'è $x = 10$. Per tale valore si ha, come primo membro

$$2 \cdot 10 - 3 = 17$$

[12] Ovvero "valutare".

e come secondo

$$10 + 5 = 15.$$

Visto che $17 > 15$, per tutti i valori maggiori di 8 la disuguaglianza è soddisfatta, ovvero l'intervallo cercato è $(8, +\infty)$.

□

Esempio: Si risolva la disequazione

$$x^2 + x > 3x + 3.$$

Soluzione: Passiamo all'equazione associata:

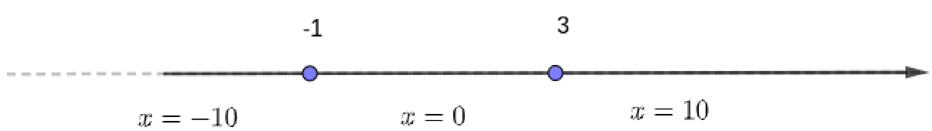
$$x^2 + x = 3x + 3,$$

da cui

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Tramite formula risolutiva, oppure per mezzo della fattorizzazione polinomiale $(x-3) \cdot (x+1) = 0$ ricaviamo le due soluzioni $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$. Per tali due valori sappiamo che le quantità sono uguali, ora cerchiamo dove è verificata la giusta disuguaglianza.
Chiamiamo $E(x)$ il polinomio [13]

$$E(x) = Q_1 - Q_2 = x^2 - 2x - 3.$$



Prima di -1 c'è -10. Ora $E(-10) = (-10)^2 - 2 \cdot (-10) - 3$ è chiaramente positivo, per cui per tutti i valori minori di -1 tale rimane l'espressione. D'altra parte, tra -1 e 3 c'è, comodamente 0 e si ha $E(0) = -3$, negativo: tale segno rimane per tutti i valori dell'intervallo. Dopo 3 possiamo scegliere, ancora comodamente 10 e considerare che $E(10)$ è positiva. In definitiva otteniamo che la disequazione ha come soluzione l'intervallo $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

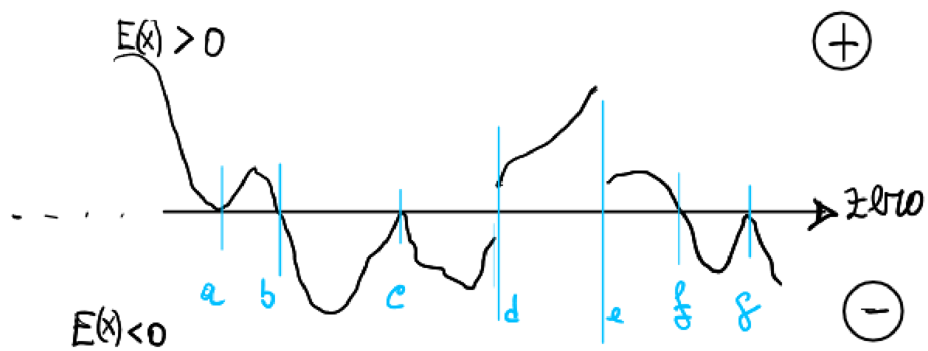
□

Continuiamo con un altro esempio, non prima di aver enfatizzato sufficientemente questo principio generale per la risoluzione delle disequazioni :

[13] $E(x)$ come *espressione* dipendente da x.

Una espressione non può cambiare di segno se prima non lo perde! e può perderlo solo in due modi: o si annulla, oppure non può essere calcolata in quel dato valore.

Per convincersene, basta esaminare la seguente figura



Nei valori della x pari a a, b, c, d, e, f e g, l'espressione $E(x)$ perde il proprio segno: in particolare in a, b, c, f e g, perché si annulla, in d ed e perché non si può calcolare [14] .

Esempio: Si risolva la disequazione:

$$\frac{x^2-4}{x^2+6x+8} < 0.$$

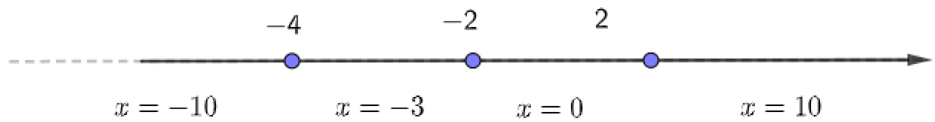
Soluzione: Uguagliamo a zero sia il numeratore che il denominatore [15]. Otteniamo le due equazioni

$$x^2-4=0 \quad \text{e} \quad x^2+6x+8=0.$$

La prima ha soluzioni $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$. La seconda ha soluzione $x_1 = -2$ e $x_2 = -4$. Molto semplicemente, ora, mettiamo ordinatamente sulla retta reale i valori trovati, dal più piccolo al più grande, ed individuiamo quattro intervalli:

[14]Presenta un salto: diremo, dopo aver studiato un po' di Analisi Matematica, che presenta una discontinuità.

[15]Il numeratore per trovare dove la frazione si annulla, il denominatore per sapere dove essa non può essere calcolata: sono i due casi in cui quell'espressione perde il proprio segno. In generale, per risolvere una disequazione, dobbiamo cercare dove si annullano tutte le quantità che potrebbero influire sul segno dell'espressione finale: ovvero i singoli fattori al numeratore o al denominatore.



Primo) $(-\infty, -4)$
Secondo) $(-4, -2)$
Terzo) $(-2, 2)$
Quarto) $(2, +\infty)$.

Indichiamo tutta la frazione con $E(x)$ e testiamone la positività o negatività in valori opportuni presi uno per ciascuno di tali intervalli. Si ha:

Primo) $E(-10) = \frac{96}{48} > 0$
Secondo) $E(-3) = \frac{5}{-1} < 0$
Terzo) $E(0) = \frac{-4}{8} < 0$
Quarto) $E(10) = \frac{96}{168} > 0$.

Cercando i valori in cui l'espressione risulta negativa, individuiamo il secondo ed il terzo intervallo come soluzione della disequazione:

$$(-4, -2) \cup (-2, 2).$$

Osserviamo che per $x = -2$ si avrebbe il denominatore uguale a zero, per cui la frazione non esiste: questo è uno dei motivi per il quale viene escluso tale valore dall'intervallo $(-4, 2)$. □

Osservazione: In segno di espressioni tipo $\frac{Q_1}{Q_2}$ è sostanzialmente lo stesso di quelle date da $\frac{Q_2}{Q_1}$ e $Q_1 \cdot Q_2$. Si invita lo studente a meditare su tale affermazione.

Concludiamo con un esempio di esercizio poco più elaborato.

Esempio: Si determini il segno dell'espressione:

$$\frac{(x+1) \cdot \sqrt{9 - x^2}}{(x^3 + 3x^2 - x - 3) \cdot (x^2 + 1) \cdot x^3}$$

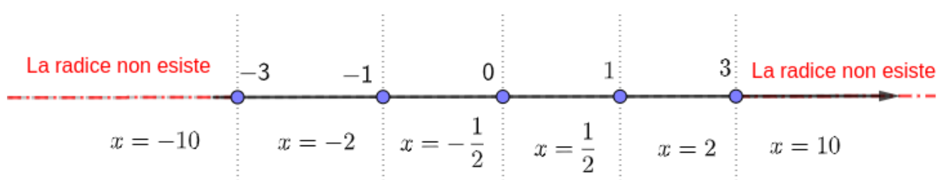
Soluzione: Uguagliamo a zero tutti i fattori che possano contribuire alla determinazione del segno dell'espressione data. Quindi risolviamo le seguenti quattro equazioni, trascurando il fattore x^2+1 che è sempre positivo [16]:

[16] Perché?

(1) $x + 1 = 0$
(2) $9 - x^2 = 0$, in verità la radice sarebbe sempre positiva come fattore, il problema è che potrebbe non esistere, se l'espressione a radicando fosse negativa: quando si studieranno le funzioni, questa argomentazione rientrerà nell'ambito della determinazione dei *campi di esistenza.*
(3) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$
(4) $x^3 = 0$.

La prima equazione dà il primo valore $x = -1$. La seconda i due ulteriori valori $x = -3$ ovvero $x = 3$. La terza equazione è data dal prodotto $(x^2 - 1)(x + 3) = 0$, per cui si ottengono gli ulteriori due valori -1, 1, e -3 che già avevamo ottenuto prima. L'ultimo valore da considerare è $x = 0$. Mettendo in fila tutti i valori, su una retta numerica, distinguiamo i seguenti intervalli:

Primo) $(-\infty, -3)$
Secondo) $(-3, -1)$
Terzo) $(-1, 0)$
Quarto) $(0, 1)$
Quinto) $(1, 3)$.
Sesto) $(3, +\infty)$.



Se indichiamo tutta l'espressione con $E(x)$ allora potremmo cercare il segno di essa nei seguenti valori (ammesso che si possa fare!): -10, -2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 2, 10. È facile convincersi che nel primo e nel quinto intervallo l'espressione non si può calcolare: infatti in -10 e 10 il radicando assume valore negativo. Per gli altri casi si ha [17]:

(1) $E(-2) = \frac{(-1)\cdot\sqrt{\text{qualcosa}}}{(-8+12+2-3)\cdot(\text{qualcosa di positivo})\cdot(-8)} =$

$$= \frac{(-)}{(+)(+)(-)} = (+)$$

[17] Si osservi che delle varie espressioni, a noi interessa solo il segno e non il valore, il ché vuol dire: una volta determinato se esce un numero positivo o negativo, **annotiamo solo il segno.**

$$(2)\quad E\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{\text{qualcosa}}}{\left(-\frac{1}{8}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-3\right)\cdot(\text{qualcosa di positivo})\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)} =$$

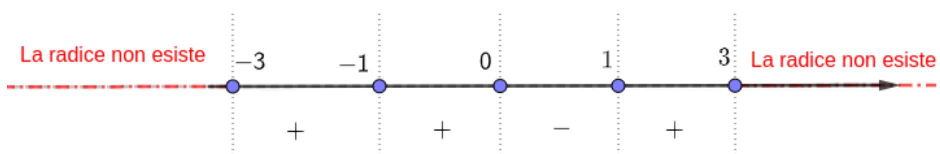
$$= \frac{(+)}{(-)(+)(-)} = (+)$$

$$(3)\quad E\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\sqrt{\text{qualcosa}}}{\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-3\right)\cdot(\text{qualcosa di positivo})\cdot\left(\frac{1}{8}\right)} =$$

$$= \frac{(+)}{(-)(+)(+)} = (-)$$

$$(4)\quad E(2) = \frac{(3)\cdot\sqrt{\text{qualcosa}}}{(8+12-2-3)\cdot(\text{qualcosa di positivo})\cdot(8)} =$$

$$= \frac{(+)}{(+)(+)(+)} = (+)$$



Facendo riferimento alla figura con i segni riportati, concludiamo dicendo che la frazione è positiva in $(-3,-1) \cup (-1,0) \cup (1,3)$ ed è negativa nell'insieme $(0,1)$; si annulla [18] per $x = 3$, e non si calcola in -3, 0, -1 e 1.

□

2. Accenno alla risoluzione dei sistemi

Quando più condizioni sono da considerare contemporaneamente, in Matematica si parla di *sistema.* Si possono avere sistemi di equazioni, se vi sono più equazioni che debbono essere contemporaneamente verificate, oppure sistemi di disequazioni, se sono le disequazioni ad essere più d'una e tutte da verificare contemporaneamente; ci potrebbero essere anche casi di disequazioni ed equazioni da verificare contemporaneamente: un caso misto. In questo capitolo accenniamo solo alla risoluzione di sistemi di equazioni di primo grado, rinviando al prossimo libro della presente opera la discussione dei sistemi più complicati. Le equazioni in due variabili di primo grado, sono dette lineari, poiché

[18] Dove si annulla il numeratore, sempre che nello stesso valore non si annulli anche il denominatore! nel nostro caso escludiamo il valore -3.

- dal punto di vista “grafico” - esse rappresentano delle rette (nel piano cartesiano) [19]. Visto che due rette possono essere sia parallele che incidenti, od anche sovrapposte, si intuisce bene che un sistema di due equazioni lineari può avere un'unica soluzione (quando le rette corrispondenti sono incidenti), nessuna soluzione (se le rette sono parallele) ovvero infinite soluzioni (allorquando le due rette risultano essere sovrapposte). Inoltre, più equazioni lineari messe a sistema possono essere soddisfatte se e soltanto se tutte le rette corrispondenti sono incidenti nello stesso punto. Detto questo, la domanda fondamentale è: “come arrivare ad una soluzione?”. Innanzitutto ricordiamo che la soluzione di un'equazione si ha quando l'equazione diventa un'identità se a posto delle incognite si sostituiscono i valori-soluzione: questo, in un sistema, deve essere contemporaneamente vero per tutte le equazioni presenti nel sistema stesso con gli stessi valori-soluzione. Nel caso di sistemi lineari, la teoria è completa ed anche facilmente accessibile. Ci sono ben quattro metodi per arrivare ad una soluzione, ammesso che essa ci sia! ma anche nel caso il sistema non ammetta una soluzione o non ce ne sia una unica, si possono sempre fare considerazioni interessanti sia dal punto di vista algebrico, sia dal punto di vista geometrico.

Limitiamoci, come detto prima, al caso di sistemi lineari di due equazioni di primo grado in due incognite. Qualsiasi sia la forma di partenza delle due equazioni messe a sistema, quest'ultimo può sempre riscriversi nella seguente forma standard:

$$\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y = c_1 \\ a_2\,x + b_2\,y = c_2. \end{cases}$$

Il primo metodo che illustriamo è detto ***del confronto:*** si ricavano i valori di una stessa incognita in funzione di tutte le altre quantità, sia nella prima che nella seconda equazione, e si considera semplicemente che nella soluzione del sistema queste due quantità devono coincidere. Quindi, uguagliando le due scritture, si ottiene un'equazione di primo grado in un'unica incognita che, risolta, dà il primo valore-soluzione. L'altro si ottiene sostituendo il valore appena trovato nella scrittura determinata all'inizio del metodo. Procediamo con un esempio.

Esempio: Si voglia risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2\,x + 3\,y = 5 \\ 4\,x - 2\,y = 1. \end{cases}$$

[19] Come si vedrà nel corso del terzo anno di studio, quando si introdurrà la Geometria Analitica.

Soluzione: Ricaviamo l'incognita y da entrambe le equazioni:

$$y = \frac{5 - 2\,x}{3}, \quad \text{e} \quad y = \frac{4\,x - 1}{2}.$$

Uguagliando queste due quantità otteniamo l'equazione

$$\frac{5 - 2x}{3} = \frac{4x - 1}{2}$$

da cui

$$10 - 4x = 12x - 3$$

e quindi

$$16x = 13.$$

Ergo la soluzione, limitatamente all'incognita x è $x = \frac{13}{16}$. Ora basta sostituire tale valore ad una delle due equazioni di prima, per ottenere il secondo valore-soluzione:

$$y = \frac{4 \cdot \frac{13}{16} - 1}{2} = \frac{13 - 4}{8} = \frac{9}{8}.$$

La soluzione del sistema è data dalla coppia di numeri $\left(\frac{13}{16}, \frac{9}{8}\right)$.

□

Il secondo metodo che presentiamo viene chiamato ***di sostituzione:*** si ricava una delle due incognite da una delle due equazioni poi, supponendo che tale valore sia noto come soluzione del sistema, si sostituisce nell'altra equazione l'espressione ottenuta, ricavando nuovamente una equazione di primo grado ad una incognita. Nell'esempio di prima, potremmo sostituire il valore della y determinato dalla prima equazione, nella seconda, ottenendo l'equazione

$$4\,x - 2\,\frac{5 - 2\,x}{3} = 1.$$

A questo punto, risolvendo questa equazione otteniamo:

$$\left(4 + \frac{4}{3}\right) x - \frac{10}{3} = 1,$$

$$16\,x - 10 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{13}{16},$$

come prima, ricavando la y dall'espressione che abbiamo utilizzato nella sostituzione.

□

Il terzo metodo, a noi molto caro, si chiama di ***eliminazione:*** si basa essenzialmente sul fatto che se a quantità uguali si aggiungono quantità uguali, i risultati ottenuti saranno ancora uguali tra loro! In pratica, dato che in una equazione si può fare quello che si vuole su

ciascun membro e su ciascun termine, a patto che si faccia la stessa operazione anche sull'altro membro e su tutti i termini, facciamo in modo che tra le due equazioni presenti nel sistema compaiano stesse incognite con uguale coefficiente: se si sottrae membro a membro le due equazioni l'incognita viene eliminata e rimane solo l'altra, che genera una equazione di primo grado ad una incognita.
Richiamiamo l'esempio di prima, risolvere

$$\begin{cases} 2\,x + 3\,y = 5 \\ 4\,x - 2\,y = 1. \end{cases}$$

Se noi raddoppiamo le quantità della prima equazione (ovvero moltiplichiamo ogni termine per due) otteniamo quest'altro sistema equivalente al precedente:

$$\begin{cases} 4\,x + 6\,y = 10 \\ 4\,x - 2\,y = 1. \end{cases}$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima si ottiene quest'altra equazione:

$$(6 - (-2))y = 10 - 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{9}{8}.$$

Sostituendo tale valore in una delle due equazioni di ottiene il valore-soluzione per l'incognita x, oppure si può procedere eliminando la y, ad esempio moltiplicando la prima equazione per due e la seconda per tre, ottenendo:

$$\begin{cases} 4\,x + 6\,y = 10 \\ 12\,x - 6\,y = 3. \end{cases}$$

In questo caso sommiamo membro a membro [20] le due equazioni per ottenere:

$$16x = 13 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{13}{16}.$$

□

Il quarto metodo, detto ***di Cramer:*** lo citiamo solo per sapere che esiste, non ritenendo opportuno utilizzarlo, avendo già altri tre metodi piuttosto facili e molto efficaci [21]

[20] O meglio ancora "termine a termine".

[21] Specie l'ultimo descritto, di eliminazione, che sarebbe da preferire su tutti sia per eleganza, sia per efficienza.

Parte 3

Geometria

(ciclometria e geometria solida)

CAPITOLO 14

Circonferenza e Cerchio

Ricordiamo la definizione di circonferenza data già nella prima parte del libro, in cui abbiamo definito il *luogo geometrico.*

DEFINIZIONE 53. *Si chiama* circonferenza *il luogo geometrico* [1] *dei punti del piano che equidistano da un punto prefissato, detto* centro. *La distanza di tali punti dal centro viene detta* raggio.

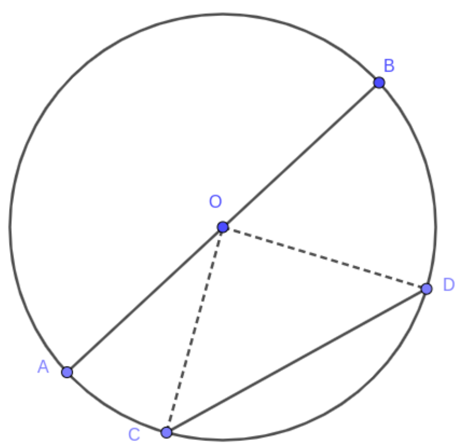
Diremo che i punti con distanza dal centro inferiore al raggio sono *interni* alla circonferenza, mentre quelli, con distanza maggiore, sono *esterni.* Chiamiamo ***cerchio*** la figura formata dai punti della circonferenza uniti a tutti quelli interni ad essa. Pertanto potremmo anche dire che il contorno di un cerchio è descritto dalla circonferenza od anche che la circonferenza è il perimetro del cerchio. Ricordiamo ora che un qualsiasi segmento che unisce due punti sul perimetro di un poligono, che non siano sullo stesso lato, si chiama corda: questa definizione viene ripetuta per la circonferenza, dato che chiameremo *corda* un qualsiasi segmento i cui estremi appartengano alla circonferenza. Le corde passanti per il centro vengono dette *diametri.*
Osserviamo che ogni diametro è la somma di due raggi e, dato che questi ultimi sono tutti uguali tra loro, anche i diametri saranno tutti congruenti tra loro. I punti estremi di un diametro diconsi *punti diametralmente opposti.*
Non ci soffermiamo sull'ovvia affermazione che circonferenze o cerchi con raggi uguali sono congruenti, essendo perfettamente sovrapposte non appena i loro centri si portino a coincidere.
Dati due punti su una circonferenza, chiamiamo *arco* ciascuna delle due parti in cui resta divisa la circonferenza; i punti che individuano un arco, diconsi *estremi dell'arco.* In genere un arco si indica con un archetto posto sopra le lettere che denotano i suoi punti estremi, ad esempio così $\overset{\frown}{AB}$. La corda che unisce gli estremi di un arco si dice essere *sottesa* dall'arco oppure si dice anche che la corda sottende l'arco. Ogni angolo che ha il vertice nel centro della circonferenza si chiama

[1] Ricordiamo che un *luogo geometrico* è un insieme di punti che godono tutti e soli di una stessa proprietà.

angolo al centro. Si utilizza anche la seguente terminologia: l'angolo al centro *insiste* sull'arco compreso tra i suoi lati ed anche che l'angolo al centro, l'arco e la corda sottesa sono elementi *corrispondenti.* Si chiama *settore circolare* l'intersezione dell'angolo al centro con il cerchio: in pratica è la classica "fetta di torta". I settori circolari formati da due raggi allineati, ovvero da un diametro, vengono denominati *semicerchi* e l'arco corrispondente a ciascuno di essi, vien detto *semicirconferenza.* Altresì è d'uso indicare la parte di cerchio individuata da una corda e dall'arco ad essa sottesa come *segmento circolare* ad una base. Se le corde sono due e parallele, allora l'intersezione tra i due segmenti circolari si chiama segmento circolare *a due basi.*
Passiamo ora a dimostrare i primi rilevanti teoremi sulle circonferenze ed i suoi elementi.

PROPOSIZIONE 33. *Il diametro è sempre la corda maggiore di qualunque altra.*

Dim.: Sia $\overline{AB}$ il diametro, O il centro della circonferenza e $\overline{CD}$, una corda qualsiasi.



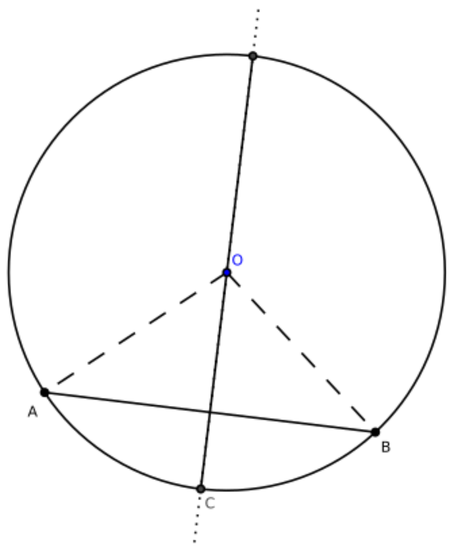
Costruimo il triangolo $\overline{OCD}$ tracciando dagli estremi C e D due raggi. Ricordandoci che in un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due [2], allora possiamo scrivere $\overline{CD} < \overline{OC} + \overline{OD}$, ma quest'ultima somma è fatta tra due raggi, per cui è congrua al diametro $\overline{AB}$, ergo $\overline{CD} < \overline{AB}$.

c.v.d.

[2]La nota *disuguaglianza triangolare!*

Proposizione 34. *In una circonferenza, il diametro perpendicolare ad una corda è asse di quest'ultima e, viceversa, data una corda qualsiasi, il suo asse passa dal centro della circonferenza.*

Dim.: Consideriamo una corda $\overline{AB}$ e sia O il centro della circonferenza. Tracciamo il diametro perpendicolare alla corda e sia C il punto d'intersezione tra i due segmenti.



Se tracciamo due raggi, uno per A e l'altro per B, si forma un triangolo isoscele $\overline{AOB}$. Il segmento $\overline{OC}$ è, per come l'abbiamo tracciato, l'altezza relativa alla base del triangolo isoscele e quindi è anche mediana. Quindi abbiamo dimostrato che C è punto medio della corda, ergo il diametro, essendo perpendicolare e passante per tale punto medio, risulta essere l'asse della corda. Viceversa consideriamo la corda $\overline{AB}$ ed il suo asse r. Per dimostrare che O appartiene a tale asse, basta ricordare la proprietà di *luogo geometrico* dell'asse stesso, ovvero che i suoi punti equidistano dagli estremi del segmento. Se consideriamo che $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ per definizione di circonferenza, allora è chiaro che $O \in r$.

c.v.d.

Ora dimostriamo un'altra particolarità della circonferenza, ovvero che è individuata da tre punti non allineati.

Proposizione 35. *Per tre punti non allineati passa una ed una sola circonferenza.*

Dim.: Ricordiamo la definizione di *circocentro* di un triangolo: esso è quel punto ottenuto come intersezione dei tre assi di un triangolo. A questo punto, dato che tre punti non allineati determinano un triangolo, intersecando gli assi dei lati di tale triangolo otterremo i centro della circonferenza che passa dai tre punti, vertici del triangolo stesso.

c.v.d.

Punti che appartengono ad una stessa circonferenza li chiameremo *cociclici.*

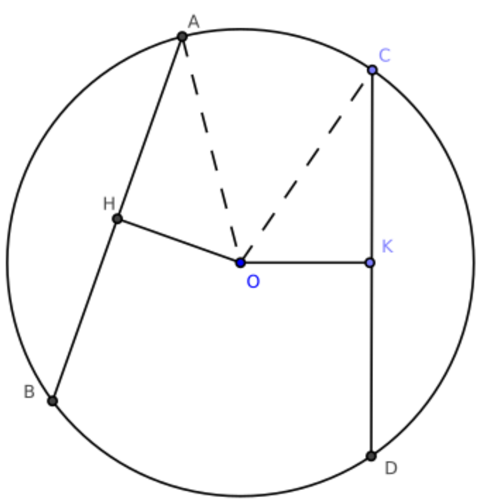
COROLLARIO 20. *Tre punti non allineati sono sempre cociclici.*

Dim.: Per tre punti non allineati passa sempre una sola circonferenza e questo lo dimostra.

c.v.d.

Importante è anche realizzare quest'altra particolarità della circonferenza:

PROPOSIZIONE 36. *Corde congruenti equidistano dal centro*

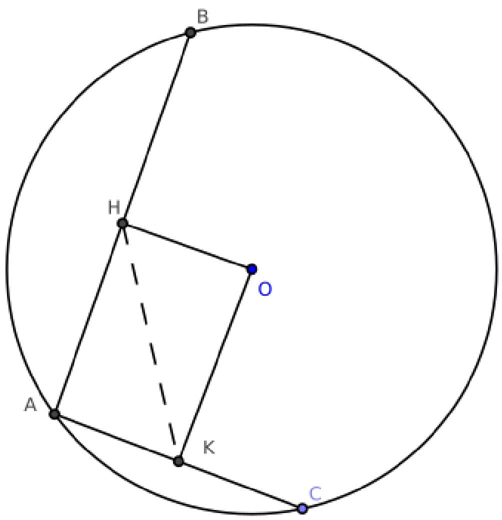


Dim.: Consideriamo due corde congruenti $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Tracciamo le distanze dal centro $\overline{OH}$ e $\overline{OK}$ relative ad esse. I triangoli $\overline{OAH}$ e $\overline{OCK}$ sono rettangoli con ipotenuse congruenti, $\overline{OA} \cong \overline{OC}$ essendo raggi! e con un cateto congruente $\overline{AH} \cong \overline{CK}$ essendo metà di corde congruenti. Per cui sono triangoli rettangoli congruenti, ergo $\overline{OH} \cong \overline{OK}$. Viceversa, se $\overline{OH} \cong \overline{OK}$, allora i triangoli rettangoli $\overline{AOH}$ e $\overline{COK}$ risultano congruenti avendo $\overline{OA} \cong \overline{OC}$ e $\overline{OH} \cong \overline{OK}$, per cui avranno pure $\overline{AH} \cong \overline{CK}$. Raddoppiando questi ultimi due segmenti risulteranno congruenti le corde $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

c.v.d.

Proposizione 37. *Date due corde disuguali, quella maggiore dista dal centro meno di quella minore e viceversa, se due corde hanno distanze dal centro differenti, la corda più lunga disterà meno dal centro rispetto a quella più corta.*

Dim.: Consideriamo due corde disuguali e, per comodità, supponiamo che abbiano il vertice A in comune [3].



Ipotizziamo inoltre che la corda $\overline{AB}$ sia maggiore della corda $\overline{AC}$. Tracciamo le distanze $\overline{OH}$ e $\overline{OK}$, rispettivamente per la prima e la seconda corda. Dato che, per ipotesi $\overline{AB} > \overline{AC}$, allora la disuguaglianza rimane tale anche per le loro metà, ovvero $\overline{AH} > \overline{AK}$. Nel triangolo $\overline{AHK}$ si ha quindi la relazione tra gli angoli $A\hat{K}H > A\hat{H}K$, dato che "a lato maggiore si oppone l'angolo più grande". Considerando gli angoli complementari, la disuguaglianza risulta invertita [4], per cui si ha $O\hat{H}K > O\hat{K}H$; d'altra parte, nel triangolo $\overline{OHK}$, sempre considerando che "ad angolo maggiore si oppone il lato più lungo", si ha $\overline{OH} < \overline{OK}$.
Viceversa, supponendo $\overline{OH} < \overline{OK}$, se fosse $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, allora si dovrebbe avere $\overline{OH} \cong \overline{OK}$ [5], contro ipotesi. D'altra parte non può

[3] Si può sempre fare poiché abbiamo testé dimostrato che corde uguali equidistano dal centro.

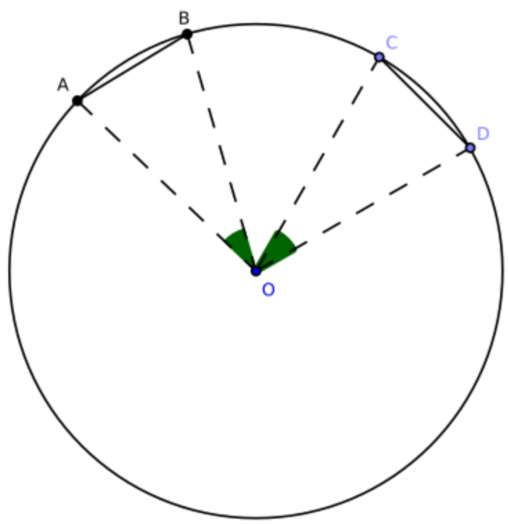
[4] Perché?

[5] Per il teorema di prima.

nemmeno essere $\overline{AB} < \overline{AC}$ altrimenti, per quanto testé dimostrato, dovrebbe essere $\overline{OH} > \overline{OK}$. L'unica possibilità rimasta è quella affermata dalla tesi, ovvero $\overline{AB} > \overline{AC}$.

c.v.d.

PROPOSIZIONE 38. *Ad archi uguali corrispondono angoli al centro e corde congruenti.*



Dim.: Supponendo $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$ allora, sovrapponendo C con A e D con B, si ottiene anche la sovrapposizione dei raggi $\overline{OA}$ su $\overline{OC}$ e $\overline{OB}$ su $\overline{OD}$. Pertanto gli angoli al centro si sono perfettamente sovrapposti così come le corde $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

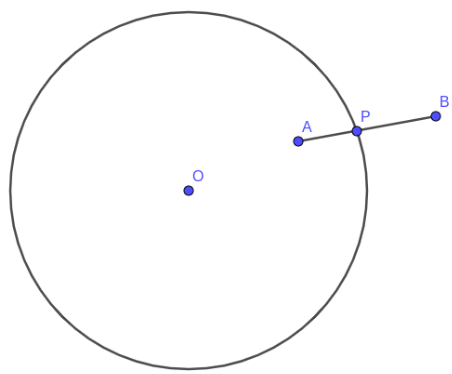
c.v.d.

È chiaro che si possono scambiare gli archi uguali con gli angoli al centro congruenti, ovvero ancora con corde congruenti e si ottengono altri due teoremi analoghi al precedente: non ci dilunghiamo oltre su questa osservazione.

Introduciamo il seguente postulato, coerente ad un analogo postulato fatto per i poligoni [6] .

[6] In verità questa affermazione non sarebbe propriamente un postulato ma, potendosi dimostrare, come sa chi ha seguito un corso di Topologia, un teorema e, più precisamente, è noto come *Teorema di Jordàn*: la dimostrazione è comunque piuttosto elaborata e richiede strumenti matematici avanzati.

Postulato 30. *Ogni segmento che ha un estremo in un punto interno della circonferenza e l'altro in uno esterno, deve intersecare la circonferenza in qualche punto.*

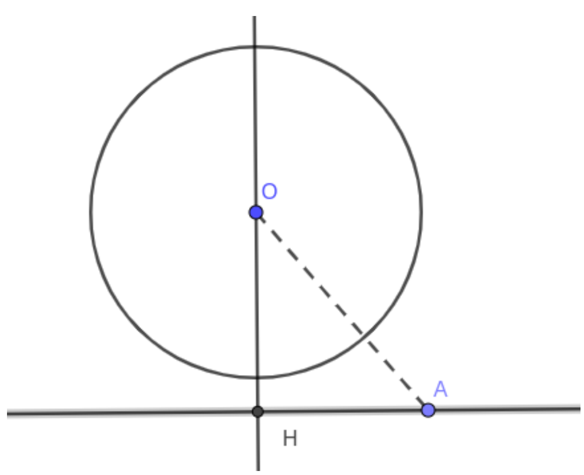


Il postulato afferma l'esistenza di quel punto P.

Premesso che chiameremo **tangente** ogni retta che abbia con la circonferenza un unico punto di intersezione, ovvero la cui distanza dal centro sia pari al raggio della circonferenza stessa, possiamo ora discutere sulle posizioni di una retta rispetto ad una circonferenza: il seguente teorema è piuttosto ovvio ed intuitivo.

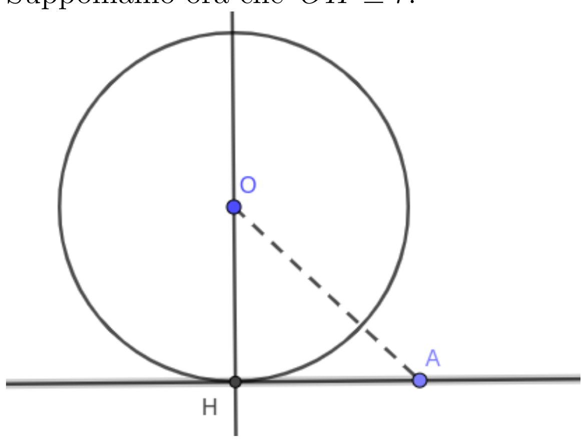
Proposizione 39. *Se la distanza di una retta dal centro è superiore al raggio, allora la retta non interseca la circonferenza; se tale distanza è quanto il raggio, allora c'è esattamente un punto in comune con la circonferenza. Altresì è vero che se la distanza è minore dal raggio, i punti di intersezione con la circonferenza sono proprio due.*

Dim.: Supponiamo che la distanza $\overline{OH}$ della retta dal centro O della circonferenza sia maggiore del raggio r.



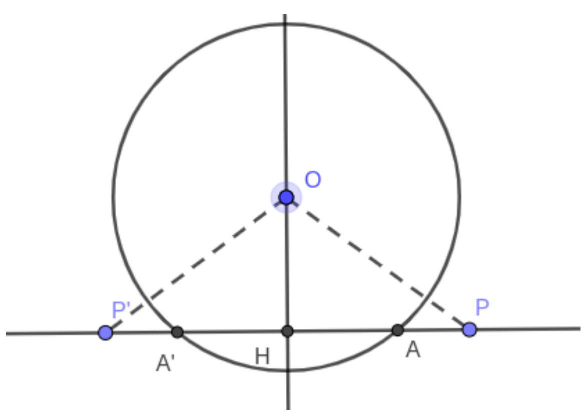
Osserviamo, innanzitutto, che il punto H è esterno alla circonferenza. Preso un qualsiasi altro punto A della retta, si può considerare il triangolo rettangolo $\overline{OHA}$, la cui ipotenusa $\overline{OA}$, essendo maggiore - ovviamente- di $\overline{OH}$ è sicuramente maggiore di r. Questo vuol dire che tutti i punti della retta sono esterni alla circonferenza, dato l'arbitrarietà nella scelta di A, ovvero la retta non ha alcun punto in comune con la circonferenza.

Supponiamo ora che $\overline{OH} \cong r$.



In questo caso H deve stare sulla circonferenza e, come prima, considerando un qualsiasi altro punto della retta, si potrebbe osservare che la distanza di tale punto da O è sicuramente maggiore di $\overline{OH}$ ovvero del raggio, ergo, tutti i punti della retta, ad eccezione di H sono esterni alla circonferenza.

In ultimo sia $\overline{OH} < r$.



Allora H è un punto interno alla circonferenza; consideriamo un punto P sulla retta in modo tale che $\overline{HP}$ sia proprio quanto il raggio. Il triangolo $\overline{OHP}$ è rettangolo con ipotenusa $\overline{OP} > \overline{HP} = r$. Quindi il punto P si trova esternamente alla circonferenza e, per il postulato enunciamo poc'anzi, il segmento $\overline{HP}$ deve intersecare la circonferenza in qualche punto A. D'altra parte il punto P lo si può fissare sia a destra che a sinistra di H, quindi ci sono due punti che possono essere considerati alla stregua di A. Questo dimostra che ci sono due punti in comune tra la circonferenza e la retta. Non possono essercene di più, dato che tre punti ciciclici non possono essere allineati.

c.v.d.

COROLLARIO 21. *Le rette tangenti sono perpendicolari ai raggi nei punti di tangenza*

Dim.: Nei fatti la distanza dal centro, che è "presa", per definizione, ortogonalmente alla retta, coincide con il raggio.

c.v.d.

Una retta che non interseca la circonferenza la si dirà *esterna* alla circonferenza, mentre una che la interseca in due punti la si definisce **secante.**

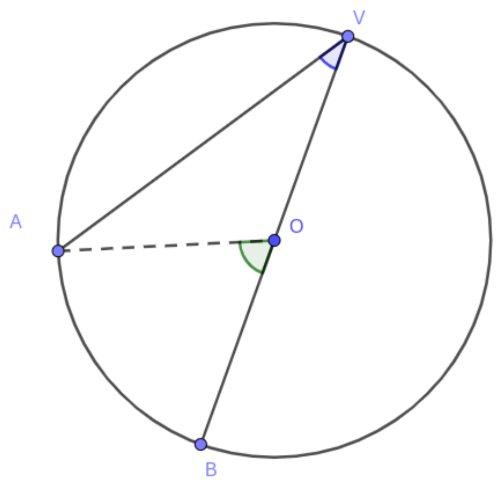
Esercizio: Si dimostri il teorema inverso, ovvero, a seconda che la retta sia secante, tangente oppure esterna, rispettivamente la distanza dal centro sarà minore, uguale o maggiore del raggio [7].

Per procedere, definiamo ora gli **angoli alla circonferenza** come quegli angoli il cui vertice appartiene alla circonferenza ed i lati sono o entrambi secanti oppure uno secante e l'altro tangente alla circonferenza. C'è una notevole proprietà che tali angoli posseggono ed è espressa dal seguente teorema.

PROPOSIZIONE 40. *Gli angoli alla circonferenza sono metà degli angoli al centro corrispondenti.*

Dim.: La dimostrazione segue più o meno facilmente da considerazioni sulle posizioni che possono assumere i lati dell'angolo alla circonferenza, rispetto al centro della stessa. Distinguiamo sei casi. Nel primo caso consideriamo un lato dell'angolo $A\hat{V}B$, ad esempio VB, passante per il centro O della circonferenza.

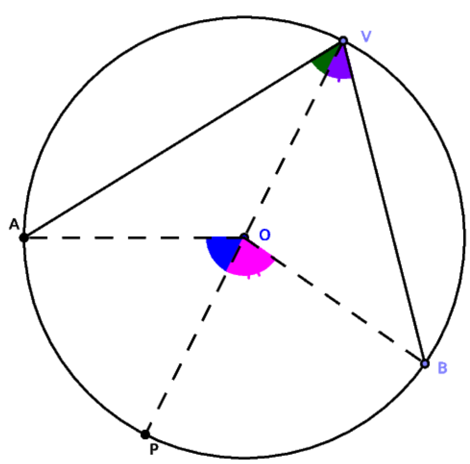
[7] Suggerimento: lo si dimostri utilizzando un ragionamento "per assurdo".



Tracciando il raggio $\overline{OA}$ formiamo un triangolo isoscele ed osserviamo che l'angolo $A\hat{O}V$ è ad esso esterno [8], per cui è congruo alla somma degli angoli interni non adiacenti, ovvero

$$\hat{A} + \hat{V} \cong 2\hat{V} \cong A\hat{O}B$$

da cui ovviamente la tesi. Nel secondo caso consideriamo il centro della circonferenza interno all'angolo alla circonferenza.



Tracciamo i due raggi $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ ed il diametro VP. Ancora una volta gli angoli $A\hat{O}P$ e $B\hat{O}P$ sono esterni a due triangoli isosceli, per cui

[8] Stiamo ovviamente parlando del triangolo $\overline{AOV}$

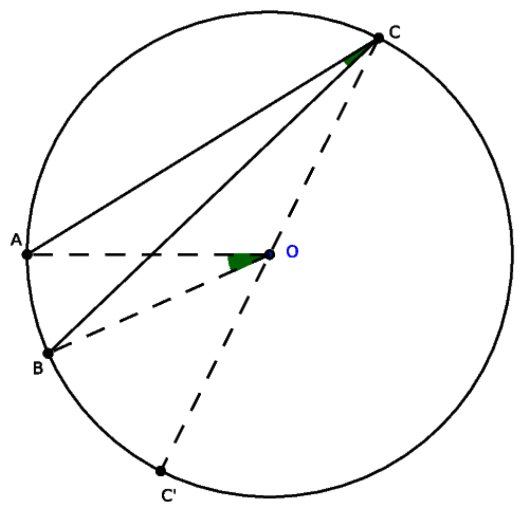
entrambi sono uguali alla somma degli angoli interni non adiacenti ad essi: possiamo quindi scrivere

$$A\hat{O}B = A\hat{O}P + P\hat{O}B \cong 2A\hat{V}O + 2O\hat{V}B$$

da cui

$$A\hat{O}B \cong 2A\hat{V}B,$$

esattamente come afferma la tesi, essendo il primo l'angolo al centro ed il secondo l'angolo alla circonferenza corrispondente. Nel terzo caso immaginiamo che i due lati secanti formano un angolo a cui non appartiene il centro della circonferenza.

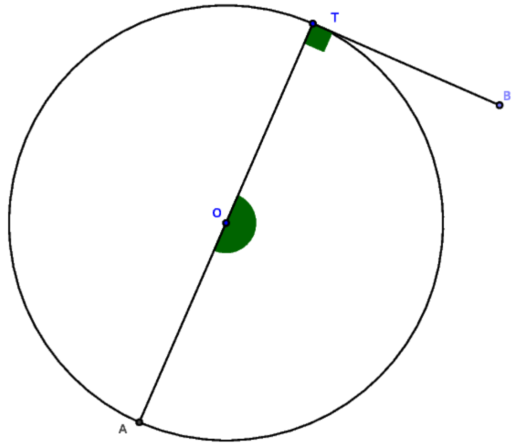


In tal caso tracciamo i raggi $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ e quest'ultimo lo prolunghiamo per formare il diametro $\overline{CC'}$. Osserviamo [9] ora che l'angolo $B\hat{O}C' \cong 2B\hat{C}O$ e l'angolo $A\hat{O}B \cong 2A\hat{C}C'$. Ergo, sottraendo opportunamente,

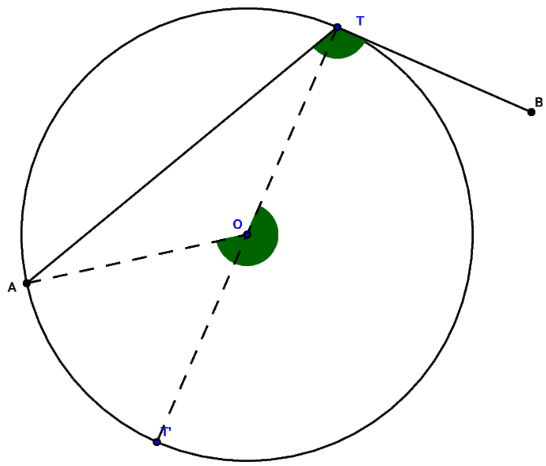
$$A\hat{O}C \cong 2A\hat{C}C' - 2B\hat{C}O = 2A\hat{C}B,$$

equivalente alla tesi.
Consideriamo ora i casi in cui uno dei lati è tangente alla circonferenza. Se il lato secante è proprio il diametro della circonferenza, c'è poco da dire.

[9]Lo studente solerte dovrebbe motivare le congruenze che scriveremo a breve.



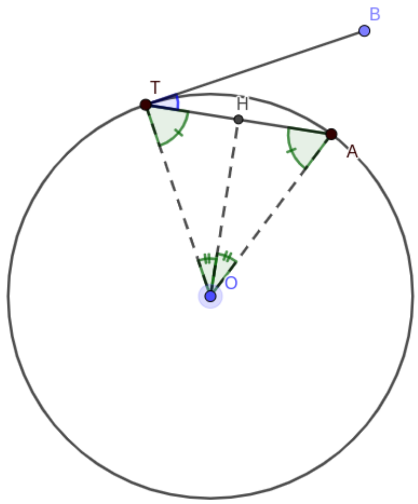
La tangente è perpendicolare a tale diametro nel punto di tangenza T, per cui forma un angolo retto che è proprio la metà dell'angolo al centro $A\hat{O}T$. Consideriamo ora il caso in cui il centro della circonferenza è interno all'angolo al centro.



Tracciamo i due raggi $\overline{OA}$ e $\overline{OT}$, prolungando quest'ultimo per formare il diametro $\overline{TT'}$. Possiamo ora scrivere le seguenti congruenze: $A\hat{O}T' \cong 2A\hat{T}O$ e, ovviamente, $T\hat{O}T' \cong 2O\hat{T}B$, da cui, sommando

$$A\hat{O}T \cong 2A\hat{T}B,$$

come afferma la tesi. In ultimo consideriamo il centro della circonferenza non appartenente all'angolo.



Tracciamo come prima i raggi $\overline{OA}$ e $\overline{OT}$. Inoltre tracciamo l'asse $\overline{OH}$ del segmento $\overline{AT}$. Possiamo ora osservare che gli angoli $H\hat{O}T$ e $A\hat{T}B$ sono entrambi complementari dello stesso angolo $O\hat{T}H$, per cui sono congruenti. Inoltre $\overline{OH}$ è la bisettrice dell'angolo $A\hat{O}T$, essendo sull'asse della base del triangolo isoscele $\overline{OAT}$, quindi si ha

$$A\hat{O}T = 2H\hat{O}T \cong 2A\hat{T}B.$$

c.v.d.

Corollario 22. *Angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco, o su archi uguali, sono congruenti. Viceversa, gli angoli alla circonferenza uguali devono insistere su archi congruenti.*

Dim.: In effetti tutti questi angoli sono la metà di uno stesso angolo al centro, ovvero di angoli al centro congruenti.

c.v.d.

Corollario 23. *Tutti gli angoli alla circonferenza che insistono su mezza circonferenza sono angoli retti.*

Dim.: dato che l'angolo al centro corrispondente è un angolo piatto.

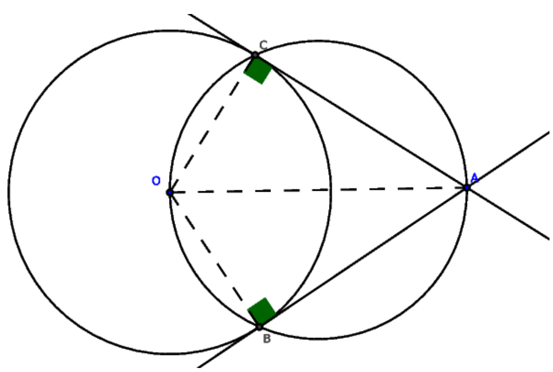
c.v.d.

Il corollario appena fatto dà un'altra dimostrazione di un teorema che avevamo fatto precedentemente, riguardo ai triangoli rettangoli ovvero: tutti i triangoli inscritti in una semicirconferenza sono triangoli rettangoli.

1. Tangenti

Consideriamo un punto esterno alla circonferenza e tracciamo le due tangenti alla circonferenza data. Ci sono dei fatti notevoli riguardanti i segmenti che si determinano dal punto dato fino ai punti di tangenza; tali segmenti si chiamano anche "segmenti di tangenza". Questi fatti seguono immediatamente dal seguente teorema.

TEOREMA 33. *Sia* A *un punto esterno alla circonferenza e consideriamo la circonferenza di diametro* $\overline{OA}$. *Se indichiamo con* B *e* C *i punti d'intersezione tra le due circonferenze, allora le rette* AB *e* AC *sono tangenti alla circonferenza data.*



Dim.: Consideriamo dapprima gli angoli alla circonferenza $A\hat{B}O$ e $A\hat{C}O$: essi sono retti, poiché insistono entrambi su mezza circonferenza. D'altra parte $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ sono raggi della circonferenza data, per cui i segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, risultando ad essi perpendicolari, devono toccare la circonferenza tangenzialmente.

c.v.d.

COROLLARIO 24. *I segmenti di tangenza sono congruenti tra loro e l'angolo formato dalle due tangenti tracciate da un punto comune è bisecato dalla retta passante per il centro della circonferenza ed il punto dato.*

Dim.: Basta considerare della dimostrazione del teorema la parte riguardante i triangoli $\overline{AOB}$ e $\overline{AOC}$, che sono rettangoli e congruenti [10] e quindi hanno i cateti omologhi $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ congruenti, così come gli angoli $O\hat{A}B \cong O\hat{A}C$.

c.v.d.

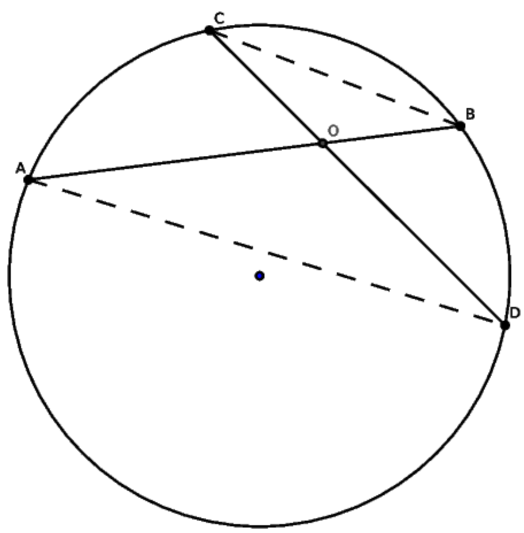
[10] Lo studente dica perché sono uguali.

2. Tre importanti teoremi di invarianza

I tre teoremi che presentiamo in questa sezione si possono esprime tutt'e tre in un unico teorema di invazianza di un rapporto tra segmenti presi in modo opportuno.

2.1. Teorema delle Corde. In questo capitolo studieremo tre tra i teoremi più importanti riguardanti le circonferenze: teorema delle corde, teorema delle secanti e teorema della tangente e della secante. Iniziamo la sezione con il teorema delle corde.

TEOREMA 34 (Teorema delle Corde). *Se due corde di una circonferenza si intersecano in un punto, allora il prodotto tra le misure dei segmenti, che si formano su una stessa corda, è costante.*



In altre parole, riferendosi al disegno di cui sopra, se la corda $\overline{AB}$ interseca la corda $\overline{CD}$ nel punto O, allora

$$\mu(\overline{AO}) \cdot \mu(\overline{OB}) = \mu(\overline{OC}) \cdot \mu(\overline{OD}).$$

Questo fatto [11] si può anche esprimere sotto forma di *proporzione* come segue:

$$\overline{OA} : \overline{OC} = \overline{OD} : \overline{OB},$$

che è, effettivamente, quanto dimostreremo.

Dim.: Osserviamo la similitudine dei triangoli $\overline{OAD}$ e $\overline{OBC}$ giustificata dal primo criterio di similitudine, dato che hanno gli angoli $A\hat{O}D \cong B\hat{O}C$, essendo opposti al vertice ed $A\hat{D}O \cong O\hat{B}C$ essendo

[11] Che si potrebbe esprimere anche come equivalenza tra due rettangoli!

angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\widehat{AC}$. Dalla proporzionalità dei lati omologhi di due triangoli simili si ottiene proprio la proporzione cercata.

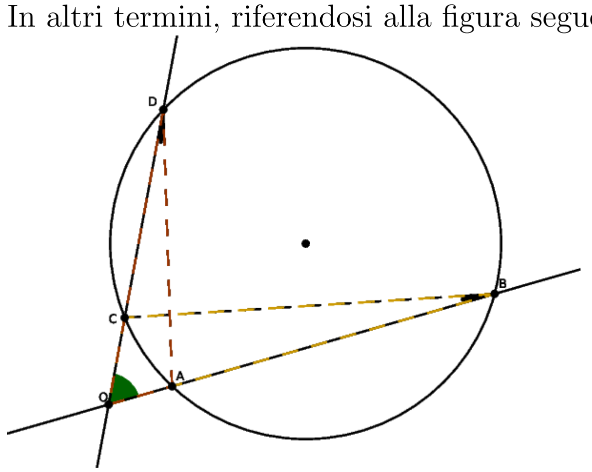
c.v.d.

Osservazione: Nel caso in cui una delle corde sia un diametro e l'altra corda risulti perpendicolare ad esso, allora il teorema delle corde coincide con il *secondo teorema di Euclide,* come è facile convincersi una volta che si sia considerato che ogni triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo ed il diametro ne è l'ipotenusa; osservando altresì che nel caso considerato la corda perpendicolare al diametro risulta divisa a metà dal diametro stesso.

2.2. Teorema delle secanti. Anche a proposito di due secanti non parallele si può dire qualcosa di molto preciso riguardo ai segmenti che si formano con la circonferenza e con il loro punto d'intersezione.

Teorema 35 (Teorema delle Secanti). *Se due secanti si intersecano in un punto P esterno alla circonferenza, allora il prodotto delle misure dei segmenti che si formano su una stessa secante, da P fino ai punti d'intersezione della secante con la circonferenza, è costante.*

In altri termini, riferendosi alla figura seguente,



si ha

$$\mu(\overline{OA}) \cdot \mu(\overline{OB}) = \mu(\overline{OC}) \cdot \mu(\overline{OD})$$

[12] o, espresso sotto forma di proporzione:

$$\overline{OA} : \overline{OC} = \overline{OD} : \overline{OB},$$

cosa che ora dimostreremo.

[12]Anche questa affermazione si potrebbe ancora esprimere come equivalenza tra due rettangoli!

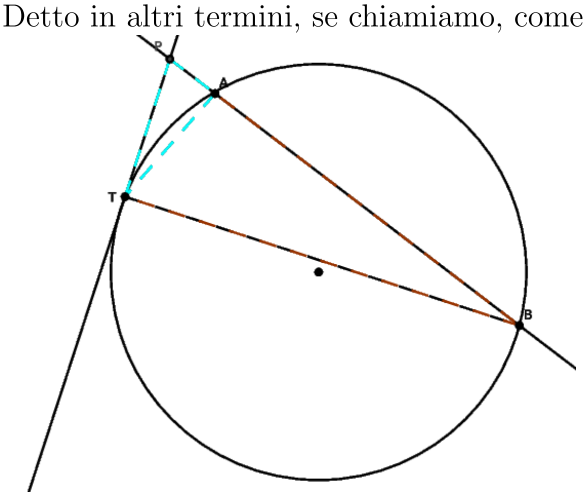
Dim.: Considerando i triangoli $\overline{OAD}$ e $\overline{OBC}$ notiamo che sono simili per il primo criterio, in quanto hanno l'angolo $\hat{O}$ in comune e gli angoli $O\hat{A}D \cong O\hat{C}B$ essendo alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\widehat{BD}$. La proporzionalità tra i lati omologhi dei triangoli simili ci porta alla tesi del teorema.

c.v.d.

2.3. Teorema della Tangente e della Secante. In ultimo dimostriamo il seguente fatto:

Teorema 36 (Teorema della Tangente e della Secante). *Se una tangente ed una secante ad una circonferenza si intersecano in un punto P* [13]*, allora il quadrato del segmento di tangente equivale al rettangolo formato dai segmenti sulla secante che hanno estremi in P e nei punti d'intersezione della secante con la circonferenza.*

Detto in altri termini, se chiamiamo, come in figura,



A e B i punti d'intersezione tra la secante e la circonferenza e T il punto di tangenza, allora

$$\mu(\overline{PT})^2 = \mu(\overline{PA}) \cdot \mu(\overline{PB}),$$

oppure, sotto forma di proporzione:

$$\overline{OA} : \overline{OT} = \overline{OT} : \overline{OB}.$$

Dim.: Consideriamo i triangoli $\overline{PAT}$ e $\overline{PBT}$; essi sono simili per il primo criterio, infatti hanno $\hat{P}$ in comune e $P\hat{A}T \cong P\hat{T}B$, essendo angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\widehat{BT}$. Dalla proporzionalità dei lati omologhi si ottiene la tesi richiesta.

c.v.d.

[13]Esternamente alla circonferenza

Osserviamo che tutt'e tre i teoremi dimostrati in questo capitolo affermano **l'invarianza del rettangolo formato con segmenti considerati su una stessa "linea" che "attraversa" la circonferenza.** Più specificatamente possiamo affermare che ogni punto interno ad una corda suddivide la corda in modo tale che ruotandola rispetto a tale punto, il rettangolo formato con i segmenti che si sono individuati sulla corda stessa, resta sempre con la stessa area [14]. Nel caso si abbia una secante condotta da un punto esterno P alla circonferenza, ruotando tale secante attorno al punto P, il rettangolo formato con i segmenti individuati da P stesso e dai due punti di intersezione della retta con la circonferenza, rimane sempre con la stessa area [15] e ciò rimane vero perfino se la secante assume la posizione estrema di tangenza, in cui i due segmenti del rettangolo coincidono con l'unico segmento di tangente [16]. Possiamo, insomma, scrivere un unico teorema:

TEOREMA 37 (Teorema di invarianza). *sia P un punto preso nel piano ed r, s due rette passanti per P che intersecano una circonferenza, rispettivamente, nei punti A, B e C, D. Anche se A coincidesse con B [17] o C con D [18] e qualsiasi sia la posizione di P, rispetto alla circonferenza, si avrà sempre:*

$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}.$$

Dim.: Basta mettere assieme le tesi degli ultimi tre teoremi dimostrati e considerare, in aggiunta, i casi banali quando r ed s risultano entrambe tangenti, oppure quando P appartiene esso stesso alla circonferenza.

c.v.d.

Per concludere questo capitolo, riferiamo che sono veri anche i teoremi inversi, che affermano la cociclicità degli estremi dei segmenti che si determinano tra le corde, sulle secanti o sulla tangente e la secante, nel momento in cui si possono verificare le proporzioni scritte precedentemente: su tali teoremi non ci soffermeremo oltre, dato che non ci servono per il proseguo del libro.

[14] Questo è quanto afferma il teorema delle corde!

[15] Questo è quanto afferma il teorema delle secanti!

[16] E questo è quanto afferma il teorema della secante e della tangente!

[17] Nel qual caso r risulterebbe tangente alla circonferenza ed i due punti sovrapposti nel punto di tangenza

[18] In quest'altro caso sarebbe s tangente alla circonferenza ecc...

CAPITOLO 15

Quadratura del cerchio e rettificazione della circonferenza

1. Inscrivibilità e Circoscrivibilità

Un poligono in cui tutti i vertici sono cociclici, ovvero stanno tutti su una stessa circonferenza, si dice *inscritto* alla circonferenza, ovvero si dice anche che la circonferenza è *circoscritta* al poligono. D'altra parte, un poligono in cui tutti i lati sono tangenti ad una stessa circonferenza si dice *circoscritto* alla circonferenza, ovvero si dice anche che è la circonferenza ad essere *inscritta* nel poligono. Ora, avendo già trattato dei punti notevoli dei triangoli, sappiamo che per tutti i trilateri è possibile determinare il circocentro (punto d'intersezione degli assi dei tre lati) e l'incentro (punto d'intersezione delle bisettrici dei tre angoli), rispettivamente il centro della circonferenza circoscritta ed il centro della circonferenza inscritta al triangolo. Ci domandiamo quali siano le condizioni per le quali un quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza ovvero circoscrivibile ad essa. I prossimi teoremi forniscono dei criteri per l'inscrivibilità e la circoscrivibilità.

Teorema 38 (Condizione di inscrivibilità). *Un quadrilatero è inscrivibile se e solo se ha angoli opposti supplementari.*

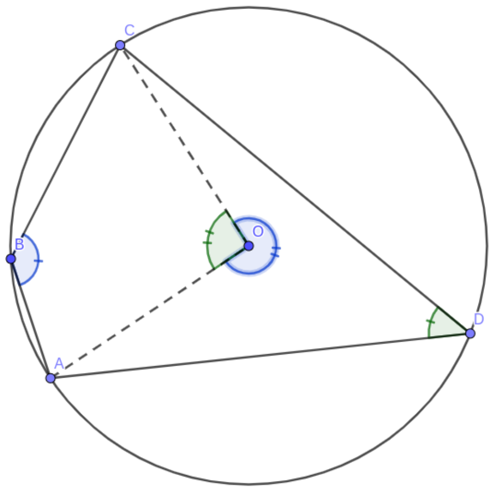
Dim.: Come per ogni criterio, che ricordiamo affermare una condizione necessaria e sufficiente, la dimostrazione prevede una doppia implicazione:

> 1^o) "Quadrilatero inscritto" $\Rightarrow$ "Angoli opposti supplementari"

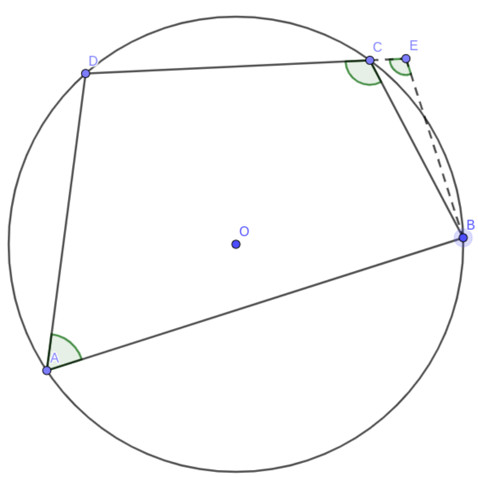
e

> 2^o) "Angoli opposti supplementari" $\Rightarrow$ "Quadrilatero inscrivibile".

Iniziamo con il primo punto: consideriamo un quadrilatero inscritto $\overline{ABCD}$ e tracciamo i due raggi $\overline{AO}$ e $\overline{CO}$.



L'angolo alla circonferenza $\hat{D}$ è metà dell'angolo al centro $A\hat{O}C$ mentre l'angolo alla circonferenza $\hat{B}$ è metà dell'angolo al centro $C\hat{O}A$, per cui la somma $\hat{B}+\hat{D}$ è metà dell'angolo al centro $A\hat{O}C + C\hat{O}A$. Quest'ultimo angolo è però un angolo giro, per cui $\hat{B}+\hat{D} =$ "angolo piatto". Analogamente si può dimostrare che $\hat{A}+\hat{C}$ è un angolo piatto. Per dimostrare il secondo punto, consideriamo che per tre punti qualsiasi non allineati passa sempre una circonferenza, per cui, supponendo d'aver tracciato la circonferenza passante per tre vertici di un quadrilatero avente gli angoli opposti supplementari, dovremmo solo dimostrare che il vertice rimanente è cociclico agli altri. Consideriamo la figura e procediamo con un ragionamento per assurdo.



Se C non fosse cociclico, allora la circonferenza passante dagli altri tre vertici incontrerà il lato $\overline{DC}$ in un punto E diverso da C. Allora il quadrilatero $\overline{ABED}$ risulta inscritto e questo implica che i suoi angoli opposti sono supplementari. In particolare $\hat{A} + \hat{E}$ è piatto; ma per ipotesi anche $\hat{A} + \hat{C}$ è piatto, ergo si ha

$$\cancel{\hat{A}} + \hat{E} \cong \cancel{\hat{A}} + \hat{C} \Rightarrow \hat{C} \cong \hat{E}$$

e questo è impossibile, dato che nel triangolo $\overline{BCE}$ l'angolo in C è esterno e quindi deve essere [1] maggiore dell'angolo interno non adiacente $\hat{E}$.

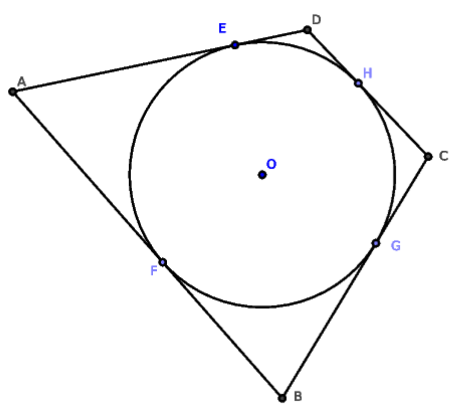
c.v.d.

COROLLARIO 25. *I rettangoli (e quindi anche i quadrati) ed i trapezi isosceli sono incrivibili, così come ogni quadrilatero che abbia due angoli opposti retti*

Dim.: Ovviamente rispettano appieno le richieste del criterio.

c.v.d.

TEOREMA 39 (Condizione di circoscrivibilità). *Un quadrilatero è circoscrivibile se e solo se la somma degli lati opposti è costante.*



Dim.: La prima parte è giusto un'osservazione: si ricordi che i segmenti di tangente condotti da uno stesso punto esterno alla circonferenza sono congruenti. Allora, considerando la figura, possiamo scrivere

$$\overline{AF} \cong \overline{AE}, \quad \overline{BF} \cong \overline{BG},$$

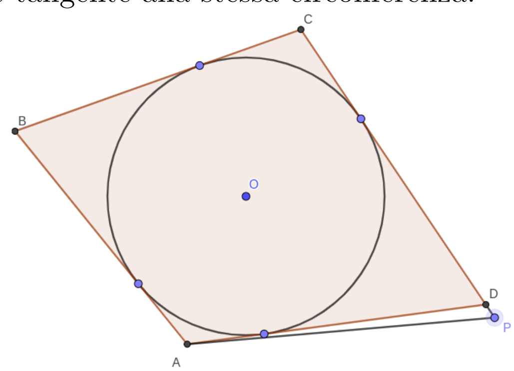
$$\overline{CG} \cong \overline{CH}, \quad \overline{DH} \cong \overline{DE},$$

[1]Per il Teorema dell'angolo esterno.

e sommando opportunamente

$$\begin{aligned}\overline{AB}+\overline{DC}=\overline{AF}+\overline{BF}+\overline{DH}+\overline{CH}\cong\\ \cong\overline{AE}+\overline{BG}+\overline{DE}+\overline{CG}=\overline{BC}+\overline{AD}.\end{aligned}$$

Viceversa, supponiamo di avere un quadrilatero con i lati opposti a somma costante [2] ed immaginiamo di aver determinato una circonferenza che sia tangente a tre dei suoi lati [3]; dimostriamo, con un ragionamento per assurdo, che anche il quarto lato del quadrilatero deve essere tangente alla stessa circonferenza.



Consideriamo la figura ed immaginiamo, per assurdo, che il lato $\overline{AD}$ non sia tangente alla circonferenza, mentre tutti gli altri lati lo siano. Allora ci sarà un altro punto P sul prolungamento del lato $\overline{CD}$, tale per cui il segmento $\overline{AP}$ sia tangente alla circonferenza. Ma allora il quadrilatero $\overline{ABCP}$ è circoscritto alla circonferenza e questo significa che i suoi lati opposti hanno somma costante, in particolare possiamo scrivere

$$\overline{AP}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{CP}.$$

Considerando ora che $\overline{CP}=\overline{CD}+\overline{DP}$ e che per ipotesi si ha $\overline{CD}+\overline{AB}=\overline{BC}+\overline{AD}$, perveniamo all'assurda uguaglianza

$$\overline{AP}+\cancel{\overline{BC}}=\cancel{\overline{BC}}+\overline{AD}+\overline{DP}$$

ovvero

$$\overline{AP}=\overline{AD}+\overline{DP},$$

in contraddizione alle note *disuguaglianze triangolari,* affermanti che in ogni triangolo un lato è sempre minore della somma degli altri due!

c.v.d.

[2] E quindi uguali tra loro.

[3] Perché siamo sicuri di poterla individuare?

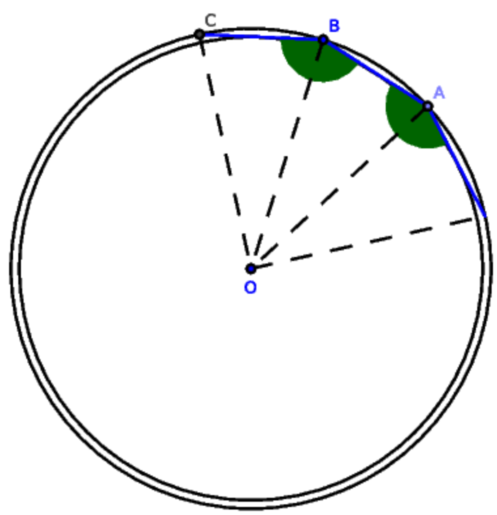
Corollario 26. *Tutti i quadrilateri equilateri, ovvero i rombi (e quindi anche i quadrati) sono circoscrivibili, così come i trapezi isosceli, a patto che il lato obliquo sia esattamente la semisomma delle basi.*

Dim.: Sono rispettate, evidentemente, le condizioni previste nel criterio testé dimostrato.

c.v.d.

Per i poligoni regolari non ci sono, invece, condizioni da rispettare, dato che con il prossimo teorema dimostreremo che essi sono tutti inscrivibili e circoscrivibili.

Teorema 40 (Circoscrittibilità ed inscrivibilità dei poligoni regolari). *Tutti poligoni regolari sono circoscrivibili e inscrivibili.*



Dim.: Consideriamo un poligono regolare $\overline{ABCD\ldots}$ con un certo numero di lati (uguali) [4]. Tracciamo le bisettrici degli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$; essi si incontrano in un punto O, formando un triangolo isoscele, dato che hanno i due angoli formati da tali bisettrici con il lato del poligono congruenti [5]. Per cui $\overline{AO} \cong \overline{BO}$; considerando inoltre che per ipotesi si ha anche $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ e che l'angolo in $\hat{B}$ è stato diviso a metà dalla bisettrice tracciata, allora -per il primo criterio di congruenza- si ha anche l'uguaglianza tra i triangoli $\overline{AOB}$ e $\overline{BOC}$. Ergo anche la distanza $\overline{CO}$ è congruente ai segmenti $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$. Avanzando in questo modo per tutti gli altri vertici, si dimostra che il punto O è il centro di una circonferenza passante da tutti i vertici del poligono, ovvero che il poligono è inscrivibile in tale circonferenza. Discutiamo

[4] E quindi anche angoli uguali.

[5] Essendo la metà di angoli uguali.

ora della circoscrivibilità. Osserviamo, pertanto, che le corde $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ecc... sono uguali, onde per cui esse sono tutte *equidistanti* da O, essendo questi il centro della circonferenza trovata prima. Ergo, tale centro O è anche il centro della circonferenza inscritta!

c.v.d.

DEFINIZIONE 54. *Il raggio della circonferenza inscritta nel poligono regolare si chiama* apotema *del poligono, mentre il raggio della circonferenza circoscritta dicesi semplicemente* raggio *del poligono.*

PROPOSIZIONE 41. *Se si divide una circonferenza in archi congruenti* [6]*, i punti della divisione sono i vertici di un poligono regolare inscritto; se da tali punti, poi, si tracciano le tangenti alla circonferenza, intersecandoli a due a due si ottiene anche un poligono regolare circoscritto alla circonferenza.*

Dim.: Essendo archi uguali, allora le corde sottese sono tutte uguali; inoltre, gli angoli alla circonferenza risultano tutti congruenti tra loro, per cui congiungendo i punti della divisione, si forma un poligono regolare. D'altra parte, considerando i triangoli i cui vertici sono due punti di tangenza ed il punto in cui tali due tangenti si incontrano, essi sono tutti triangoli isosceli congruenti [7], per cui anche tirando tutte le tangenti passanti per i punti della divisione si determina un poligono regolare (circoscritto alla circonferenza).

c.v.d.

1.1. Raggio della circonferenza inscritta o circoscritta.

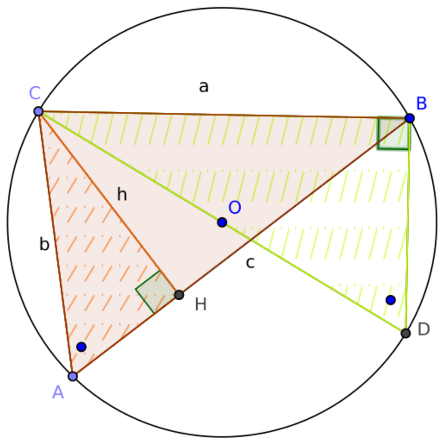
Avendo trattato delle condizioni di inscrivibilità e circoscrivibilità, ora parliamo di alcune notevoli proprietà, dalle quali ricaviamo utili formule algebriche, da applicare per risolvere problemi pratici. Procediamo dunque con la seguente affermazione:

TEOREMA 41. *Il raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo misura quanto il prodotto dei tre lati diviso il quadruplo dell'area del triangolo stesso.*

---

[6] Almeno tre.

[7] Lo studente ne dia una giustificazione dettagliata!



Dim.: In riferimento alla figura, tracciamo l'altezza $\overline{CH}$ relativa al lato $\overline{AB}$ ed indichiamo la misura del lato $\overline{AB}$ con c, quella di $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ rispettivamente con b ed a e, in ultimo, la misura dell'altezza $\overline{CH}$ con h. Tracciando il diametro $\overline{CD}$, osserviamo che i triangoli $\overline{AHC}$ e $\overline{CBD}$ sono simili, essendo entrambi retti [8] e con gli angoli $\hat{A} \cong \hat{D}$ [9], per cui

$$\overline{CB} : \overline{CH} = \overline{CD} : \overline{AC},$$

ovvero, passando alle misure ed indicando con r la misura del raggio,

$$a : h = 2r : b \Rightarrow r = \frac{a \cdot b}{2h}.$$

Ora moltiplichiamo entrambi i termini della frazione per la misura del terzo lato c e ricordiamo che $2h \cdot c$ rappresenta il quadruplo della misura della superficie S del triangolo, per cui si ottiene, infine

$$r = \frac{a\,b\,c}{4\,S}.$$

c.v.d.

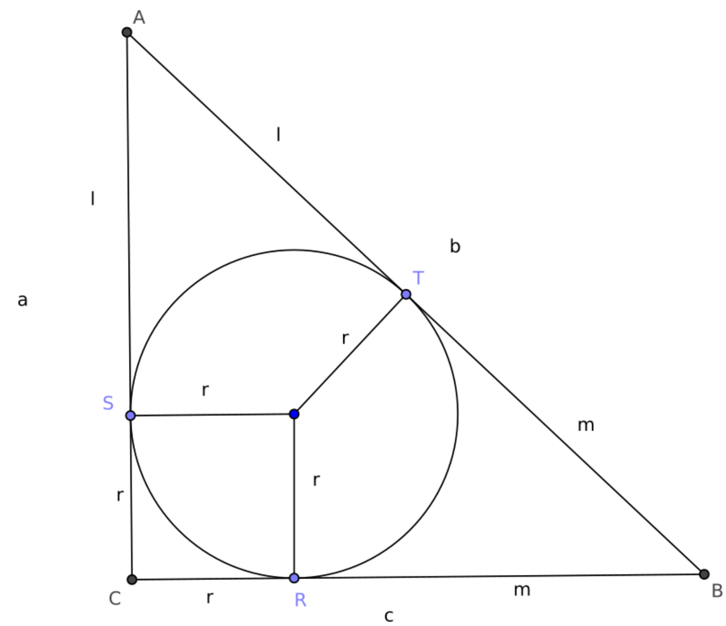
Per le circonferenze inscritte in un triangolo rettangolo si ha la seguente relazione:

TEOREMA 42. *Il diametro della circonferenza inscritta in un triangolo rettangolo misura quanto la metà tra la differenza della somma di un cateto con l'ipotenusa e l'altro cateto.*

---

[8] In H e B rispettivamente.

[9] Dica lo studente perché!



Dim.: Si ricordi che i segmenti di tangente condotti da uno stesso punto sono congruenti e si osservi la figura. Nel triangolo $\overline{ABC}$ si ha la decomposizione della figura in un quadrato $\overline{CRSO}$ di lato r ed altri due quadrilateri con coppie di lati (adiacenti) congruenti; in particolare, dette a, b e c rispettivamente le misure dei lati $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{CB}$, si ha:

$$a + b = 2r + l + m$$

ma $l + m = c$, per cui

$$2r = \frac{a + b - c}{2}.$$

c.v.d.

Con considerazioni analoghe a quelle fatte per la dimostrazione del precedente teorema, si può dimostrare la seguente importante relazione tra area, perimetro e raggio della circonferenza inscritta in un triangolo qualsiasi.

TEOREMA 43. *Sia S la misura della superficie di un triangolo di perimetro P. Detto r il raggio della circonferenza inscritta, si ha:*

$$S = \frac{P \cdot r}{2}.$$

Dim.: Basta congiungere i vertici del triangolo con il centro della circonferenza inscritta, ottenendo tre triangoli [10], considerando che i punti di tangenza sono i piedi delle altezze dei triangoli testé ottenuti,

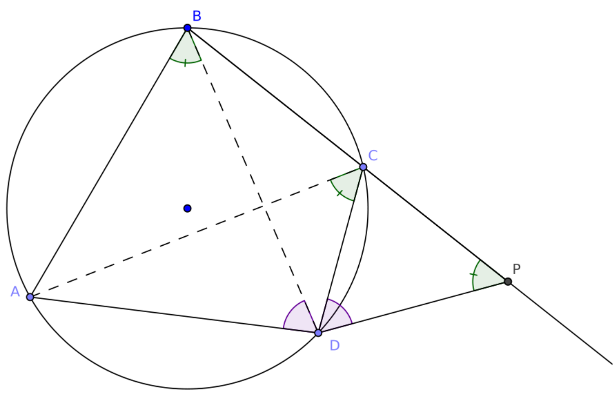
[10] Che decompongono il triangolo di partenza.

uno per ciascun lato. I dettagli della dimostrazione vengono lasciati come esercizio allo studente solerte.

c.v.d.

Ora dimostriamo un classico dei teorema di geometria euclidea.

TEOREMA 44 (Teorema di Tolomeo). *In ogni quadrilatero inscrivibile, il prodotto delle diagonali uguaglia la somma dei prodotti dei lati opposti.*



Dim.: Consideriamo la figura e si scelga un punto P su $\overline{BC}$ in modo tale che $C\hat{D}P \cong A\hat{D}B$. In tal modo si individuano due triangoli simili, $\overline{ABD}$ e $\overline{CDP}$ [11] quindi si ha

$$\overline{AB} : \overline{CP} = \overline{AD} : \overline{CD}$$

da cui

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AD} \cdot \overline{CP}.$$

Ora, è anche vero che i triangoli $\overline{ACD}$ e $\overline{BPD}$ sono simili [12] per cui si ha anche

$$\overline{AC} : \overline{BP} = \overline{AD} : \overline{BD}$$

ovvero

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AD} \cdot \overline{BP}$$

e poiché $\overline{BP} = \overline{BC} + \overline{CP}$ si ha proprio

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AD} \cdot \overline{CP} =$$

$$= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}.$$

c.v.d.

[11] Poiché tali triangoli hanno anche $A\hat{B}D \cong A\hat{C}D \cong C\hat{P}D$, quest'ultima congruenza dovuta al fatto che entrambi gli angoli sono supplementari di $C\hat{D}P + P\hat{C}D \cong B\hat{C}A + A\hat{C}D \cong A\hat{D}B + A\hat{C}D$.

[12] Lo studente dica esplicitamente perché.

2. Sezione aurea, decagono e pentagono regolare

L'argomento della presente sezione ha avuto notevole importanza nella storia della Matematica antica, precipuamente nella geometria greca, fino ad assumere un ruolo centrale anche nell'arte greca, rinascimentale e neoclassica: infatti la *sezione aurea* fu considerata la modalità perfetta di "tagliare" un segmento e, conseguentemente, il rapporto tra le parti del segmento che si ottenevano in tal modo, perfetto dal punto di vista dell'appagamento estetico. Scultori, architetti, pittori del calibro di Fidia, Ictino, Leonardo da Vinci furono molto attenti a rispettare "proporzioni auree" nelle proprie opere, proprio perché pensavano che un rapporto tra le parti che fosse secondo quanto codificato dal "rapporto aureo", fosse "dorato" nel senso più ampio del termine. D'altra parte, uno dei più grandi pensatori della Matematica antica, Pitagora, che considerava l'armonia -ovvero il rapporto tra le parti- come la cosa principale di tutto l'universo, si accorse che tale "rapporto aureo" è presente in varie figure "belle" e ne era così affascinato, che adottò come "logo" della propria scuola il celeberrimo *pentagramma,* in cui tutti i lati si "tagliano" generando sezioni auree con gli altri [13]. È giunta l'ora di dare la seguente definizione.

Definizione 55. *Si chiama sezione aurea di un segmento, il punto che ripartisce il segmento stesso in due parti, di cui una è media proporzionale tra l'intero segmento e l'altra parte. La* parte aurea *del segmento è proprio il "pezzo" che nella proporzione occupa i posti medi.*

Dal punto di vista algebrico c'è una semplice equazione la cui risoluzione porta alla determinazione della sezione aurea: chiamando x la parte aurea e supponendo il segmento come unità di misura, si ottiene

$$1 : x = x : (1 - x)$$

ovvero

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

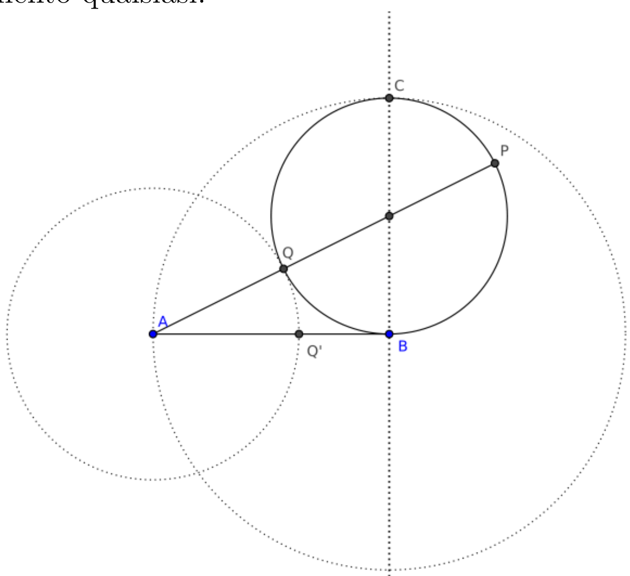
È facile risolvere tale equazione, scartando il risultato "illogico" [14] negativo, ottenendo come soluzione

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0.618$$

[13] Tale figura si ottiene tracciando tutte le diagonali di un pentagono regolare: è la stella a cinque punte, ottenuta con segmenti tutti uguali.

[14] Perché illogico?

[15]. Consideriamo ora che, ai tempi dei "Greci" l'algebra non era stata ancora importata nel mondo occidentale, per cui anche il buon Pitagora non avrebbe potuto conoscere il valore numerico, nemmeno approssimato, così per come l'abbiamo ricavato noi: eppure si era in grado di costruire la parte aurea in modo piuttosto semplice ed efficace. Il prossimo teorema fornisce il metodo per "costruire" il rapporto aureo su un segmento qualsiasi.



Proposizione 42. *In riferimento alla figura, Q' è la sezione aurea del segmento $\overline{AB}$.*

Dim.: La costruzione presente in figura è la seguente: si prende sulla perpendicolare in B un segmento $\overline{BC}$ congruente al segmento stesso $\overline{AB}$. Sia questo $\overline{BC}$ il diametro di una circonferenza tangente in B al segmento $\overline{AB}$ e si conduca la secante $\overline{AP}$. Si riporti la parte esterna di tale secante $\overline{AQ}$ su $\overline{AB}$ ottenendo il segmento $\overline{AQ'}$. Per come abbiamo eseguito la costruzione, si ha, dal teorema della secante e della tangente,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{AQ}.$$

Ovvero $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AQ}$, ma il primo segmento è una somma, per cui

$$(\overline{PQ} + \overline{AQ}) : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AQ'}$$

[15]Giusto solo per curiosità, dato che tale argomento va ben oltre lo scopo di questo volume, informiamo che la sezione aurea compare "magicamente" come *limite all'infinito* del rapporto tra due numeri consecutivi della *successione di Fibonacci,* altro argomento interessante che sarebbe -per lo meno- divertente da conoscere ed utile da saper applicare...

e scomponendo, sottraendo il segmento $\overline{PQ}$ dagli antecedenti, mettendo i segmenti congruenti al posto giusto,

$$\overline{AQ'} : \overline{AB} = \overline{Q'B} : \overline{AQ'}$$

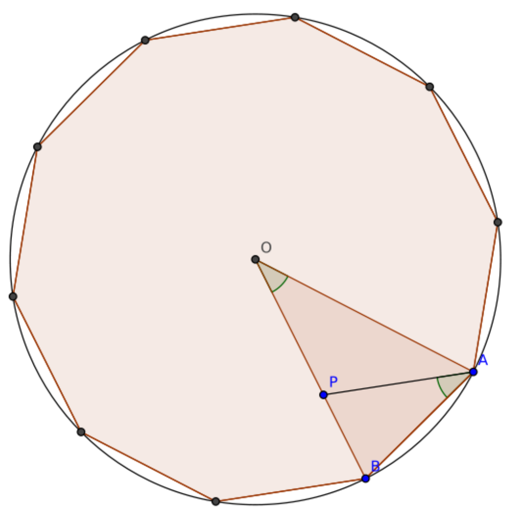
ed invertendo

$$\overline{AB} : \overline{AQ'} = \overline{AQ'} : \overline{Q'B},$$

come afferma la tesi.

c.v.d.

Teorema 45. *Il lato del decagono regolare inscritto è la parte aurea del raggio.*



Dim.: In verità questa affermazione discende da un *"lemma"* riguardante i triangoli isosceli con l'angolo al vertice di 36 gradi: infatti in ogni triangolo di questo tipo, **la base risulta la parte aurea del lato,** come dimostreremo a breve. Sia dunque, come in figura, il segmento $\overline{AB}$ lato del decagono regolare inscritto e consideriamo il triangolo isoscele $\overline{OAB}$ dove O è il centro della circonferenza circoscritta al poligono. L'angolo in O è di $\frac{360}{10} = 36$ gradi, per cui gli angoli in A ed in B sono entrambi di $\frac{180-36}{2} = 72$ gradi. Tracciamo la bisettrice dell'angolo $\hat{A}$, formando il triangolo $\overline{ABP}$, in cui $\overline{AP} \cong \overline{OP}$ [16] e [17] $A\hat{P}B$ è di 72 gradi, esattamente come l'angolo in B. Il triangolo $\overline{PAB}$ è quindi isoscele e simile al triangolo $\overline{OAB}$, ergo sussiste la

[16] Dato che il triangolo $\overline{OAP}$ è isoscele avendo due angoli entrambi di 36 gradi

[17] Ricordando ancora che in ogni triangolo, l'angolo esterno è pari alla somma degli angoli interni non adiacenti.

seguente proporzione:

$$\overline{OB} : \overline{AP} = \overline{AB} : \overline{PB},$$

ovvero, dato che $\overline{AP} \cong \overline{AB}$, anche

$$\overline{OB} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{PB}.$$

Quest'ultima proporzione è esattamente la tesi del teorema.

c.v.d.

TEOREMA 46. *Le diagonali del pentagono regolare si intersecano tutte generando sezioni auree l'una con l'altra.*

Dim.: la dimostrazione è immediata nel momento in cui si determinano i triangoli isosceli con l'angolo al vertice di 36 gradi: lasciamo allo studente il divertimento di trovare questi triangoli..

c.v.d.

3. La lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio

Il problema di determinare la lunghezza della circonferenza è conosciuto classicamente come **rettificazione della circonferenza,** mentre quello di determinare l'area del cerchio, come la **quadratura del cerchio.** Questi due problemi sono analoghi ed equivalenti, impossibili da risolvere, tanto che -per antonomasia- anche nel linguaggio corrente, quando si cerca di realizzare un'impresa impossibile si utilizza la locuzione *"cercare la quadratura del cerchio".* Inoltre questi due problemi fanno parte del gruppo dei problemi "impossibili" dell'antichità, che sono essenzialmente questi tre:

(1) Trisezione di un angolo,
(2) Duplicazione di un cubo,
(3) Quadratura del cerchio.

Il problema, in modo più formale, si esprime dicendo che *si cerca un segmento la cui lunghezza sia pari a quella della circonferenza* ovvero un quadrato la cui area sia pari a quella del cerchio. In effetti c'è molto da meravigliarsi che questi problemi siano così difficili da risolvere, anzi impossibili: se noi "chiudiamo" un laccio a forma di cerchio e poi lo "stiriamo" in modo uniforme su quattro estremi, spingendo giusto le dita in direzioni perpendicolari, dalla circonferenza passiamo senz'altro al quadrato. Possibile allora che, essendo il perimetro rimasto invariato [18] non si sappia trovare la misura del lato del quadrato ottenuto? L'impossibilità di determinare la lunghezza del lato di tale quadrato

[18] Dato che non abbiamo accorciato il laccio né allungato

lascia basiti esattamente come lasciava perplessi il fatto che se si misura il lato di un quadrato, la diagonale non sarà più misurabile con precisione. In effetti il discorso che faremo è molto simile a quello fatto per dimostrare l'irrazionalità del rapporto diagonale/lato del quadrato e, inoltre, l'esistenza di un segmento che possa rappresentare per intero la circonferenza, viene assicurata dal *postulato di continuità,* così come lo stesso postulato assicurava l'esistenza di un segmento corrispondente alla diagonale di un quadrato, una volta che si fosse fissato il lato del quadrato come unità di misura su di una retta.

3.1. L'idea giusta per rettificare la circonferenza. Cominceremo con il dimostrare che i perimetri dei poligoni regolari inscritti ed i perimetri dei poligoni regolari circoscritti formano due *classi separate* di grandezze [19]; poscia dimostreremo che esse sono anche *contigue* [20] onde per cui, richiamando il *postulato di continuità,* che afferma esistere sempre un elemento di separazione tra due classi di questo tipo [21], affermeremo l'esistenza della *circonferenza rettificata,* ovvero di una grandezza lineare (un segmento) "lungo" quanto tutta la circonferenza. Dimostreremo subito dopo che il rapporto tra una qualsiasi circonferenza rettificata ed il raggio (o il diametro) della circonferenza corrispondente è sempre costante e, successivamente, utilizzando un metodo già sfruttato dal grande Archimede [22], calcoleremo un valore approssimato per tale rapporto, meglio noto come *pi greco.*

LEMMA 4. *Poligoni regolari con lo stesso numero di lati sono simili tra loro ed i lati stanno tra loro come i perimetri, come i raggi e come gli apotemi.*

Dim.: Congiungendo i vertici del poligono con il centro della circonferenza (inscritta o circoscritta), si ottengono tanti triangoli isosceli tutti con gli stessi angoli alla base e lo stesso angolo al centro. Per cui tali triangoli sono tutti simili ai triangoli isosceli che si formerebbero,

[19] Ricordiamo che per "classi separate" si intende due insiemi di cui le grandezze appartenenti ad una di esse sono tutte minori delle grandezze appartenenti all'altra.

[20] Ancora una volta ricordiamo che per "classi contigue" intendiamo che la differenza tra due grandezze prese l'una in una classe e l'altra nell'altra, può essere resa piccola a piacere, ovvero che fissata una grandezza piccola a piacere, esistono sempre due grandezze, una in una classe e l'altra nell'altra, tale per cui la differenza tra queste ultime è minore di quella fissata a piacere. L'idea è che "appena terminano gli elementi di una classe, iniziano quelli dell'altra".

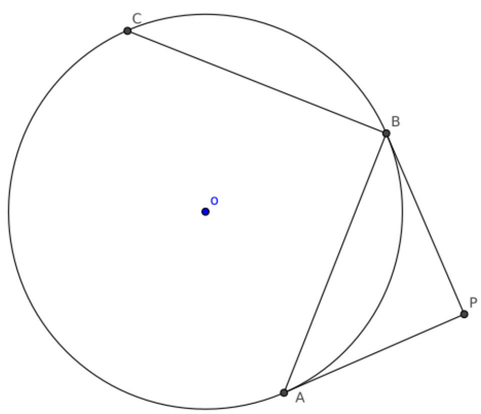
[21] Ricordiamo che un elemento di separazione è tale che sia maggiore di ogni grandezza della prima classe ma minore di ogni grandezza della seconda.

[22] Metodo di esaustione, introdotto da Eudosso ed ampiamente utilizzato da Archimede nei propri calcoli.

con lo stesso metodo, prendendo un altro poligono regolare di identico numero di lati. A questo punto, le tesi sono tutte ovvie, dato che le grandezze indicate sono tutte di tipo "lineare", ovvero sono segmenti che si ritrovano in tali triangoli o si ricavano da tali triangoli (nel caso del perimetro): è chiaro che se si ingrandisce/rimpiccolisce un lato del poligono di un certo fattore, tutti gli altri segmenti collegati alla figura subiranno lo stesso tipo di trasformazione.

c.v.d.

LEMMA 5 (I perimetri formano Classi di grandezze separate.). *Il perimetro di ogni poligono regolare inscritto è minore del perimetro di ogni poligono regolare circoscritto ad una data circonferenza.*

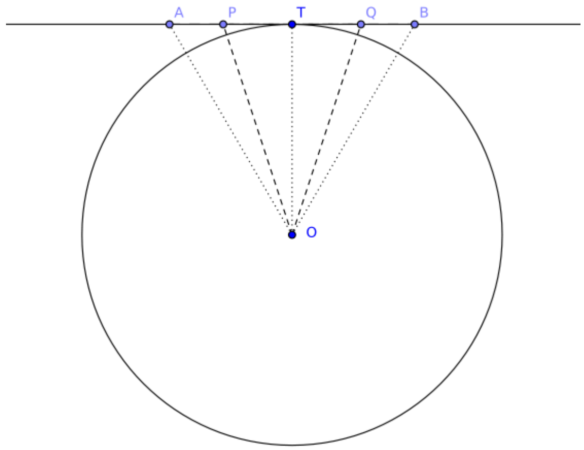


Dim.: La tesi segue direttamente dalla disuguaglianza triangolare e basta confrontare poligoni regolari con lo stesso numero di lati: i poligoni circoscritti hanno i lati tangenti nei vertici del poligono inscritto, per cui ogni due lati di esso formano con un lato del poligono inscritto un triangolo; la tesi segue dal fatto che, in ogni triangolo, la somma di due lati è sempre maggiore del terzo lato.

c.v.d.

LEMMA 6. *Dato un segmento piccolo a piacere di misura τ, esiste sempre un poligono regolare circoscritto con il lato lungo meno di τ.*

Dim.: Sia $\overline{AB}$ tangente alla circonferenza nel suo punto medio T e τ ne sia la sua misura; consideriamo l'angolo $A\hat{O}B$ ottenuto congiungendo gli estremi del segmento con il centro della circonferenza.



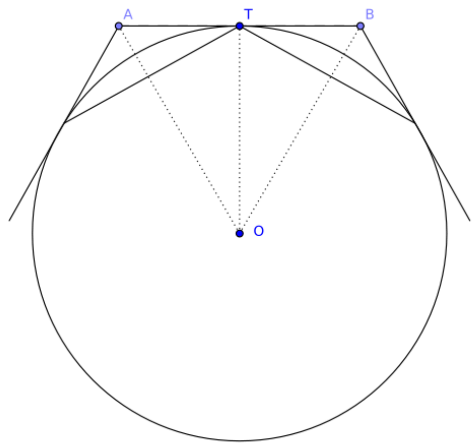
Per il *postulato di Eudosso-Archimede* esiste un multiplo dell'angolo $A\hat{O}B$ che superi l'angolo giro, immaginiamo che n indichi il multiplo in questione. Fissiamo l'angolo α, ennesima parte dell'angolo giro, come angolo interno ad $A\hat{O}B$, in modo tale che il raggio $\overline{OT}$ sia proprio la bisettrice di α. Indichiamo con P e Q l'intersezione dei lati di α con il segmento $\overline{AB}$. Affermiamo che $\overline{PQ}$ è il lato di un poligono regolare circoscritto di n lati, dato che prendendo n segmenti uguali a $\overline{PQ}$ uno appresso all'altro, tangenti alla circonferenza, si completa un giro attorno alla circonferenza stessa e, inoltre, dato che $\overline{PQ}$ è incluso in $\overline{AB}$, tale poligono ha il lato lungo meno di τ, come affermato nella tesi.

c.v.d.

TEOREMA 47 (I perimetri formano Classi di grandezze contigue). *Dato un segmento ϵ piccolo a piacere, esistono sempre due poligoni regolari, uno circoscritto e l'altro inscritto, tali che la differenza dei loro perimetri sia minore di ϵ.*

Dim.: Consideriamo $\overline{OT}$ e p raggio e perimetro di un poligono regolare inscritto di n lati e $\overline{OA}$ e P raggio e perimetro di un poligono regolare circoscritto con lo stesso numero di lati [23].

[23] Facciamo notare che in tal caso T risulta essere il punto di tangenza di un lato del poligono regolare circoscritto, precipuamente del lato $\overline{AB}$ come in figura.



Dato che i poligoni hanno lo stesso numero di lati, per il lemma 4, sussiste la seguente proporzione:

$$P : p = \overline{OA} : \overline{OT}$$

e scomponendo la proporzione

$$(P - p) : p = (\overline{OA} - \overline{OT}) : \overline{OT}.$$

Osserviamo che $8 \cdot \overline{OT}$ risulta essere il perimetro del quadrato circoscritto e quindi introduciamo tale fattore nell'ultimo rapporto, ottenendo:

$$(P - p) : p = 8 \cdot (\overline{OA} - \overline{OT}) : 8 \cdot \overline{OT}.$$

A questo punto, per il lemma 5, il perimetro p deve essere minore del perimetro del quadrato circoscritto, ovvero $p < 8 \cdot \overline{AT}$ e questo implica

$$P - p < 8 \cdot (\overline{OA} - \overline{OT}) <^{24} \quad \overline{AT}.$$

Possiamo quindi dire che

$$P - p < 8\overline{AT} = 4 \cdot \overline{AB};$$

se fissiamo, quindi, un segmento di lunghezza $\frac{1}{4}\epsilon$ arbitraria, per il lemma 6, esiste un poligono regolare circoscritto con lato $\overline{AB}$ minore di $\frac{\epsilon}{4}$ e, in tal caso, risulta

$$P - p < \epsilon,$$

come afferma la tesi.

c.v.d.

Quindi i poligoni inscritti e quelli circoscritti formano due classi contigue di grandezze (i perimetri!) e per il postulato di continuità **esiste un unico elemento di separazione** tra di esse.

[24]Per la disuguaglianza triangolare

DEFINIZIONE 56. *Si chiama* circonferenza rettificata *l'elemento di separazione tra le due classi contigue di perimetri: essa è rappresentata da un segmento lungo meno dei perimetri di ciascun poligono regolare circoscritto e più di ogni perimetro di poligono regolare inscritto.*

3.2. Il rapporto π. Definita la circonferenza rettificata, come si fa determinarne un valore, per lo meno, approssimativo, noto il raggio della circonferenza? è chiaro che dato il raggio, la circonferenza è determinata, quindi la sua lunghezza deve potersi dare in funzione del raggio. Il prossimo teorema è fondamentale per poter rispondere alla domanda testé posta.

PROPOSIZIONE 43. *Due circonferenze rettificate stanno tra loro come i rispettivi raggi.*

Dim.: Date due circonferenze con i rispettivi raggi, C ed r, e C' ed r', supponiamo che sussista la proporzione

$$r : r' = C : X$$

e dimostriamo che $X = C'$. Siano p e p' perimetri di poligoni regolari con lo stesso numero di lati inscritti rispettivamente in C e C'; sappiamo allora che $p : p' = r : r'$, scegliendo ora P e P' perimetri di poligoni regolari circoscritti, rispettivamente, alle circonferenze C e C', con lo stesso numero di lati, sappiamo pure che $P : P' = r : r'$, per cui se

$$p : p' = C : X$$

e

$$P : P' = C : X,$$

sapendo che $p < C < P$ segue che $p' < X < P'$ ergo X deve coincidere con C', data l'arbitrarietà dei perimetri p e P.

c.v.d.

Abbiamo quindi stabilito l'importante proporzione

$$C : C' = r : r'$$

ovvero anche

$$C : C' = 2r : 2r'$$

e permutando

$$C : 2r = C' : 2r'$$

per cui **il rapporto tra una circonferenza rettificata ed il suo diametro è costante.** tale rapporto è indicato, classicamente, con una π, per cui scriveremo

$$\frac{C}{2r} = \pi.$$

Così abbiamo anche ottenuto che la misura "lineare" della circonferenza è

$$m(C) = 2\pi\, r.$$

3.3. Calcolare il valore di π. Prima di tutto osserviamo che il perimetro di un esagono regolare inscritto in una circonferenza è $p_6 = 6r$, dato che il lato dell'esagono è esattamente il raggio del cerchio. Inoltre il perimetro del quadrato circoscritto è pari a $P_4 = 8r$, per cui si ha l'ovvia limitazione

$$p_6 < C < P_4$$

ovvero

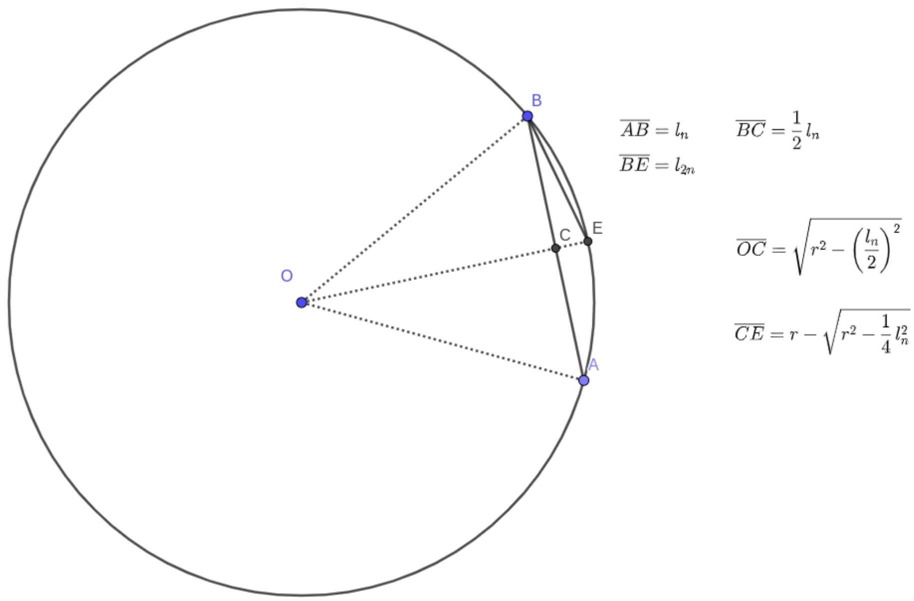
$$3 < \pi < 4.$$

Per determinare una approssimazione migliore di π procederemo ad inscrivere poligoni regolari con un numero sempre maggiore di lati e calcoleremo il loro perimetro: in tal modo potremo fornire una approssimazione per difetto del valore di π. Questo stesso metodo [25] fu usato da Archimede, il quale arrivò ad inscrivere un poligono regolare con 96 lati (ed a circoscriverne uno dello stesso tipo), pervenendo alla limitazione seguente di π :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}.$$

Ricaviamo, pertanto, una relazione tra il lato di un poligono regolare inscritto di n lati ed uno, dello stesso tipo, con $2n$ lati. Da questa relazione, ottenuta semplicemente applicando due volte il teorema di Pitagora, possiamo iniziare a fare approssimazioni (per difetto) viepiù migliori del valore di π. Consideriamo il raggio della circonferenza unitario e ricordiamo che per ottenere il poligono con il numero doppio dei lati, basta dimezzare ogni arco tra due vertici del poligono di n lati e considerare assieme ai vertici del poligono precedente, anche questi nuovi punti come vertici del poligono che andremo a costruire. Consideriamo, pertanto, la figura seguente,

[25] Di esaustione.



e chiamiamo C il punto medio del lato l_n e E l'estremo del raggio che dimezza tale lato, $m(\overline{OC}) = \sqrt{1 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}$, per cui la parte rimanente del raggio, $\overline{CE}$ avrà misura $1 - \sqrt{1 - \frac{l_n^2}{4}}$. Riapplicando il teorema di Pitagora si ottiene

$$l_{2n} = \sqrt{\frac{1}{4}l_n^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}l_n^2}\right)^2}$$

ovvero, dopo aver sviluppato il quadrato del binomio e semplificato:

$$l_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}.$$

Dato che il perimetro del poligono regolare è lungo $P_n = n \cdot l_n$ e quello con il doppio del numero di lati è $P_{2n} = 2n \cdot l_{2n}$ e ricordando che π è il rapporto costante tra la lunghezza della circonferenza e la misura del diametro [26], allora otteniamo l'approssimazione

$$\pi \approx \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}.$$

Nella pagina successiva si vede il risultato dell'implementazione del calcolo su di un foglio elettronico, scegliendo come poligono di partenza inscritto l'esagono regolare, il cui lato è, notoriamente, lungo quanto il raggio della circonferenza.

[26] Che, per come abbiamo scelto il raggio, è 2.

Numero lati	Lunghezza lato	Perimetro		Valore approssimato di π
6	1	6		3
12	0,51763809021	6,2116571		3,10582854123025
24	0,26105238444	6,2652572		3,13262861328124
48	0,13080625846	6,2787004		3,13935020304687
96	0,06543816564	6,2820639		3,14103195089053
192	0,03272346325	6,2829049		3,14145247228534
384	0,01636227921	6,2831152		3,14155760791162
768	0,00818120805	6,2831678		3,14158389214894
1536	0,00409061258	6,2831809		3,14159046323676
3072	0,00204530736	6,2831842		3,14159210604305
6144	0,00102265381	6,283185		3,14159251658815
12288	0,00051132692	6,2831852		3,14159261864079
24576	0,00025566346	6,2831853		3,14159264532122
49152	0,00012783173	6,2831853		3,14159264532122
98304	6,3915866E-05	6,2831853		3,14159264532122
196608	3,1957933E-05	6,2831853		3,14159264532122
393216	1,5978972E-05	6,2831873		3,14159366984943
786432	7,9894824E-06	6,2831846		3,14159230381174
1572864	3,994762E-06	6,2832174		3,1416086962248
3145728	1,9973671E-06	6,2831737		3,14158683965504

4. Quadratura del cerchio.

Per calcolare l'area del cerchio, si procede esattamente come per la rettificazione della circonferenza, con l'unica eccezione ora non considereremo più i perimetri dei poligoni regolari inscritti o circoscritti, bensì le aree. Si dimostrano pertanto i seguenti teoremi:

PROPOSIZIONE 44. *L'estensione dei poligoni regolari inscritti sono tutte minori delle estensioni dei poligoni regolari circoscritti*

Dim.: basta osservare che i primi sono inclusi nei secondi!

c.v.d.

PROPOSIZIONE 45. *Data una estensione piccola a piacere ϵ è sempre possibile determinare un poligono regolare inscritto ed uno circoscritto, con lo stesso numero di lati, la cui differenza tra le aree è minore dell'area di ϵ.*

Dim.: Siano $\overline{OT}$ e s il raggio e l'area del poligono regolare inscritto e, analogamente, $\overline{OA}$ ed S raggio ed area del poligono regolare circoscritto. Dalla proporzione [27]

$$S : s = \overline{OA}^2 : \overline{OT}^2,$$

si ottiene, scomponendo,

$$(S - s) : s = (\overline{OA}^2 - \overline{OT}^2) : \overline{OT}^2$$

ed utilizzando il Teorema di Pitagora

$$(S - s) : s = \overline{AT}^2 : \overline{OT}^2.$$

Usiamo il "trucchetto" di quadruplicare i termini del secondo rapporto ed osserviamo che $4 \cdot \overline{OT}^2$ è la superficie del quadrato circoscritto, per cui, essendo [28] $s < 4 \cdot \overline{OT}^2$, si ottiene

$$S - s < 4 \cdot \overline{AT}^2,$$

ovvero anche

$$S - s < \overline{AB}^2,$$

dato che $2 \cdot \overline{AT} = \overline{AB}$. Ora, se indichiamo con l il lato di un quadrato equivalente al poligono di estensione arbitraria ϵ, possiamo sempre determinare [29] un poligono regolare circoscritto il cui lato $\overline{AB}$ sia minore di l, e quindi $\overline{AB}^2 < l^2$. Questo vuol dire che la differenza tra le due superfici la si rende minore dell'estensione arbitrariamente scelta prima:

$$S - s < \epsilon.$$

c.v.d.

Avendo dimostrato con i teoremi precedenti che le aree dei poligoni regolari inscritti o circoscritti formano due classi contigue di grandezze, allora per il postulato di continuità esiste un unico elemento di separazione che noi chiamiamo *cerchio.*

Per calcolare l'area del cerchio, dimostriamo il prossimo teorema e "scarichiamo" la responsabilità del calcolo sulla determinazione, già effettuata, della lunghezza della circonferenza.

TEOREMA 48. *Un cerchio equivale ad un triangolo con base pari alla circonferenza rettificata e con altezza uguale al raggio.*

---

[27] Le aree di poligoni simili stanno tra loro come i quadrati delle misure lineari presenti nella figura, ovvero come i quadrati dei lati, delle altezze, dei raggi, degli apotemi e cose del genere... lo studente solerte cerchi di giustificare tale osservazione.

[28] Per il teorema precedente.

[29] È il teorema sulla contiguità delle Classi dei perimetri dei poligoni regolari inscritti e circoscritti!

Dim.: Sia C la circonferenza rettificata di raggio r. Indichiamo con p e a perimetro ed apotema di un qualsiasi poligono regolare inscritto nel cerchio. Ora, tale poligono è equivalente [30] ad un triangolo di base p ed altezza a. Possiamo considerare lati per quanti se ne vogliano, nel poligono inscritto, comunque si ha che C ed r sono maggiori di p ed a, per cui possiamo asserire che un triangolo che sia equivalente al cerchio dovrà essere con un'estensione maggiore dei triangoli equivalenti ai poligoni regolari inscritti nella circonferenza. D'altra parte, lo stesso discorso si potrebbe fare considerando i poligoni regolari circoscritti di perimetri P ed apotema r, deducendo, in tal caso, che il triangolo equivalente al cerchio dovrebbe comunque essere minore delle estensioni dei triangoli equivalenti ai poligoni regolari circoscritti. Ora, l'elemento di separazione tra due classi contigue di elementi è unico, per cui c'è un solo triangolo che ha estensione maggiore di tutti i triangoli equivalenti ai poligoni regolari inscritti e minore di tutti i triangoli equivalenti ai poligoni regolari circoscritti, ergo c'è un solo triangolo che ha base pari all'elemento di separazione dei perimetri dei poligoni testé menzionati ed altezza pari al raggio, che sia, pertanto, equivalente al cerchio, ma in tal caso la base non è altro che la circonferenza rettificata (per definizione).

c.v.d.

Quindi ora possiamo dedurre la seguente uguaglianza:

$$m(\text{Cerchio}) = \frac{m(\text{Circonferenza}) \cdot r}{2}$$

ovvero

$$m(\text{Cerchio}) = \pi \cdot r^2.$$

4.1. Lunghezza di un arco ed area del settore circolare. Per concludere il presente capitolo, tramite semplici proporzioni, ricaviamo le formule per calcolare le lunghezze di archi di circonferenza e le aree dei settori circolari. È chiaro che entrambi sono individuati dall'ampiezza di un angolo al centro che indichiamo con α. Dato che tutta la circonferenza corrisponde ad un angolo al centro di 360 gradi, allora si ha, detta l la lunghezza dell'arco di circonferenza,

$$\alpha_{\text{gradi}} : l = 360^o : 2\pi\, r.$$

[30] Lo studente può convincersi di quanto stiamo dicendo considerando che ogni poligono regolare si suddivide in tanti triangoli isosceli, per quanti sono i lati del poligono, di uguale base, pari al lato, aventi come altezza l'apotema, semplicemente conducendo tutti i raggi dal centro della circonferenza fino ai vertici del poligono stesso.

Da tale proporzione si ricava

$$l = \frac{2\pi\, r \cdot \alpha}{360}.$$

È uso indicare la lunghezza dell'arco corrispondente all'angolo α nella circonferenza di raggio unitario, detta per questo *circonferenza goniometrica*, la misura in **radianti** dell'angolo α. La proporzione allora fornisce il metodo per il "passaggio" dalla misura in gradi di un angolo alla misura in radianti dello stesso angolo. Si tenga presente che la misura in radianti indica la lunghezza di un arco di circonferenza [31] laddove la misura corrispondente in gradi indica l'ampiezza di un angolo [32]. In generale si definisce **l'arco radiante** come il pezzo di circonferenza lungo quanto il raggio della circonferenza ed il corrispondente angolo al centro si chiamerà **angolo radiante.** In considerazione di ciò, possiamo ora stabilire l'area di un settore circolare $A:$ poniamo la semplice proporzione

$$A : \pi\, r^2 = \alpha_{\text{gradi}} : 360$$

ovvero

$$A = \frac{\pi\, r^2 \cdot \alpha_{\text{gradi}}}{360}.$$

Considerando che $l = \frac{\pi\, r\, \alpha}{180}$ possiamo riscrivere il risultato precedente sotto forma di

$$A = \frac{l \cdot r}{2}$$

ottenendo il notevole risultato che

> **Un settore circolare equivale ad un triangolo che ha come base l'arco rettificato [33] e come altezza il raggio del cerchio.**

[31] È quindi una misura "lineare".

[32] Ovvero di una estensione superficiale.

[33] Ovvero la misura in radianti dell'angolo!

CAPITOLO 16

Geometria (metrica) solida

Intendiamo riferirci, in questo capitolo, ad una serie di problemi di geometria solida, risolvibili con le conoscenze di geometria euclidea, già imparate nei precedenti capitoli. In particolare, sarà richiesta la conoscenza dei teoremi di Pitagora, Euclide e Talente, soprattutto nelle loro forme algebriche, in quanto i problemi proposti saranno principalmente riconducibili alla risoluzione di un'equazione di secondo grado. Prima di procedere con degli esempi e di proporre gli esercizi di fine capitolo, è opportuno ricordare delle definizioni e delle proprietà che dovrebbero già essere patrimonio di base di ogni educazione elementare.

DEFINIZIONE 57. *Una* figura solida, *o semplicemente un* solido, *è una figura* [1] *nello spazio tridimensionale.*

Con questo vogliamo dire che tali punti "occupano" uno spazio e quindi, rispetto alle figure piane, non devono necessariamente essere insiemi di punti tutti complanari: questo vuol dire che si "aggiunge" una dimensione in più rispetto a quanto visto finora. Insomma, se nel piano ci si può muovere componendo i movimenti elementari "destra-sinistra" e "sopra-sotto", ora si aggiunge anche il movimento "avanti-indietro". Detto in altre parole, una figura solida possiede una altezza, una larghezza ed anche una profondità [2].

DEFINIZIONE 58. *Lo spazio occupato da un solido si definisce* Volume.

In effetti, con abuso di linguaggio, anche la *misura di un volume* viene detta volume. Tra i solidi hanno particolare importanza i **poliedri.**

DEFINIZIONE 59. *Un solido limitato da superfici piane poligonali si chiama* poliedro*; nei poliedri si distinguono le* facce*, che sono i poligoni che lo limitano; gli* spigoli *ed i* vertici*, determinati rispettivamente dai lati e dai vertici delle facce.*

[1] Ovvero un insieme di punti.

[2] Essendo proprio quest'ultima la dimensione che prima non veniva considerata nelle figure piane.

Inoltre, se le facce sono poligoni regolari tutti uguali e gli *angoloidi,* ovvero gli angoli tridimensionali, delimitati dai piani a cui appartengono almeno tre facce del poliedro, convergenti in uno stesso vertice, sono angoloidi uguali, allora il poliedro si chiamerà *regolare.* Già Platone, nel *Timeo* e nel *Fedone,* [3], distinse cinque solidi regolari, che furono successivamente chiamati **solidi platonici,** per rendergli omaggio, e sapeva bene che di poliedri regolari non ce ne potevano essere di altri. Questi solidi sono il tetraedro (ovvero la piramide con facce formate da triangoli equilateri), l'esaedro regolare (o cubo -con facce quadrate-), l'ottaedro (formato da due piramidi a base quadrata, incollati lungo la base stessa, con le altre facce date da triangoli equilateri), il dodecaedro (le cui facce sono pentagoni regolari) e l'icosaedro (formato con venti facce a triangolo equilatero).
La dimostrazione che esistono solo questi cinque poliedri regolari la dà Euclide facendo una considerazione sugli angoli delle facce e gli angoloidi dei solidi. Prima di tutto considera che solo il triangolo equilatero, il quadrato ed il pentagono regolare possono essere facce di poliedri regolari. Infatti in ogni vertice di un angoloide devono convergere almeno tre piani e la somma degli angoli formati dalle facce, che si incontrano in un dato angoloide, deve essere minore di un angolo giro [4]. Dato che, poi, le facce del poliedro regolare sono poligoni regolari [5], allora non si possono avere angoli di più di $360^o : 3 = 120^o$. Ora, gli angoli maggiori di 120^o ce li hanno tutti i poligoni regolari con più di sei lati, per cui solo triangoli, quadrati e pentagoni possono essere facce di poliedri regolari. D'altra parte, il triangolo equilatero ha gli angoli di 60^o, quindi in ogni vertice del solido potrebbero convergere o 3 o 4 oppure 5 triangoli: avremmo rispettivamente i solidi denominati tetraedro, ottaedro e icosaedro. Per le facce quadrate, avendo gli angoli di 90^o è possibile far arrivare nei vertici solo 3 facce, ottenendo il cubo. Anche per le facce pentagonali, avendo i pentagoni regolari angoli di 108^o, è possibile far incontrare in ogni vertice solo 3 facce, ottenendo l'ultimo solido platonico che manca all'appello, ovvero il dodecaedro regolare. Tra i poliedri, si distinguono, oltre ai solidi platonici, i *prismi,* le *piramidi* ed i *tronchi di piramide.*

Definizione 60. *Definiamo* prisma *un poliedro avente due facce parallele e congruenti. Come conseguenza si avrà che le altre facce sono tutte dei parallelogrammi. Chiamiamo le facce parallele* basi del

[3] Noti "dialoghi platonici".

[4] Altrimenti la figura si adagerebbe su di un piano e non si formerebbe alcun angoloide!

[5] Il "primo" dei quali è il triangolo equilatero ecc...

prisma. *Se i piani a cui appartengono le basi sono perpendicolari ai piani a cui appartengono le altre facce, il prisma di chiamerà* retto, *altrimenti si dirà* obliquo.

Un prisma retto, le cui basi sono poligoni regolari, si chiamerà *prisma regolare.* In tal caso, tolte le basi, tutte le altre facce saranno rettangoli congruenti!

Definizione 61. *Un prisma che abbia come basi dei parallelogrammi si chiamerà* parallelepipedo.

Definiamo *piramide* un qualsiasi poliedro formato da un angoloide tagliato tramite un piano non passante per il suo vertice. Il piano di taglio, con le facce dell'angoloide, determina un poligono, detto *poligono di base.* Se il poligono di base è circoscrivibile e l'altezza del vertice dell'angoloide ha il piede coincidente con il centro della circonferenza inscritta alla base, allora la piramide viene detta *retta,* altrimenti dicesi *obliqua.* Si noterà che le piramidi saranno costituite tutte da facce triangolari, che hanno tutte uno stesso vertice in comune, più un'altra faccia che si oppone al vertice testé menzionato. Nelle piramidi, l'altezza dei triangoli costituenti le facce convergenti nello stesso vertice, si chiamerà *apotema* della piramide e le facce triangolari considerate or ora si diranno costituire la *superficie laterale* della piramide; la faccia rimanente [6] dicesi *base* della piramide.

Definizione 62. *Tagliando una piramide tramite un piano parallelo al piano della base, si ottiene il* tronco di piramide [7].

Osserviamo solo che le facce, non parallele tra loro, di un tronco di piramide sono dei *trapezi,* e si dice che costituiscono la superficie laterale del tronco: le altezze di tali trapezi diconsi ancora *apoteme* del tronco di piramide.

A parte i poliedri, sono interessanti anche i solidi di rotazione, ottenuti facendo ruotare rispetto ad un asse o ad un punto, una qualche figura data. Ad esempio, il *cilidro* può essere visto come la rotazione di un segmento rispetto ad un asse ad esso parallelo; o ancora la *sfera*, che si ottiene tramite rotazione di una semicirconferenza rispetto al diametro e, per un altro esempio, basti pensare al familiare *cono,* che si può ottenere ruotando un segmento rispetto ad un asse, non ad esso perpendicolare, passante attraverso uno dei suoi estremi.

---

[6] Ovvero il poligono di base

[7] Ed anche un'altra piramide più piccola "simile a quella iniziale"

1. La misura dei volumi

Come unità di misura dei volumi, scegliamo un cubo di lato unitario. Dovrebbe essere abbastanza chiaro che la teoria della misura di Euclide, esposta nella prima parte di questo testo, in via del tutto generica e più specificatamente, poi, per le superfici piane, può essere estesa al caso tridimensionale con poche modifiche ovvero, dal punto di vista generale, con nessuna modifica. Piuttosto è molto utile introdurre il seguente teorema, che diamo per dimostrato e che fu enunciato, nella sua più chiara forma, nella prima metà del XVII secolo da Bonaventura Cavalieri.

TEOREMA 49 (Pincipio di Cavalieri). *Se due solidi possono essere disposti in modo tale che, sezionandoli con un fascio di piani paralleli, ciascun piano individua sui due solidi due sezioni equivalenti* [8]*, allora i due solidi sono equivalenti* [9]*.*

Ad esempio, se abbiamo una pila di cinque monete a formare un cilindro, spostando qualche moneta in modo che si scombini la forma cilindrica, ma le monete rimangono comunque l'una sopra all'altra, il solido che si forma rimane sempre con lo stesso volume della pila iniziale!

Una delle principali conseguenze di tale principio è che il volume di un prisma o di un cilindro può sempre essere ricavato come prodotto dell'area di base per l'altezza, ovvero

PROPOSIZIONE 46. *Dato un cilindro o un prisma, il volume è dato da*

$$V = S_{base} \cdot h,$$

dove S_{base} indichiamo l'area della base e con h indichiamo la misura dell'altezza relativa a quella base.

Si può, inoltre, dimostrare [10] che sia la piramide, sia il cono, equivalgono ad un terzo del prisma e, rispettivamente, del cilindro aventi stessa base e stessa altezza; per cui possiamo enunciare quanto segue:

PROPOSIZIONE 47. *Dato un cono o una piramide, il volume è dato da*

$$V = \frac{1}{3} S_{base} \cdot h,$$

[8] Ovvero aventi la stessa superficie.

[9] Ovvero hanno uguale volume.

[10] Per questi teoremi noi rinunciamo a dare le dimostrazioni, non perché esse siano difficili, ma perché il solo fine del presente capitolo è di compendiare le principali formule che ci serviranno, successivamente, a risolvere problemi di geometria solida.

dove S_{base} indichiamo l'area della base e con h indichiamo la misura dell'altezza relativa a quella base.

2. Misura delle superfici di un solido

Oltre al volume, un solido possiede anche una superficie propria: per i poliedri, poiché ogni faccia contribuisce con un'area (piana), per i cilindri, poiché se tagliati lungo una perpendicolare alle basi, essi si possono "sviluppare" in due cerchi più un rettangolo. Per i cilindri, in particolare, il rettangolo ottenuto sviluppando la "superficie laterale", ha una dimensione lunga quanto la circonferenza di base e l'altra quanto l'altezza del cilindro stesso. Per i coni, se sviluppati, una volta tagliati lungo una linea, così come era stato fatto per i cilindri, si ottiene un cerchio più un settore circolare- Tale settore circolare avrà il raggio pari all'apotema del cono, ovvero alla congiungente il vertice del cono con un punto della circonferenza di base e, come arco la stessa circonferenza di base. Detto questo, *caso per caso* possiamo calcolare le superfici laterali, quelle di base e quelle totali di qualsivoglia prisma, piramide, cilindro, cono o tronco che ci salti in mente.

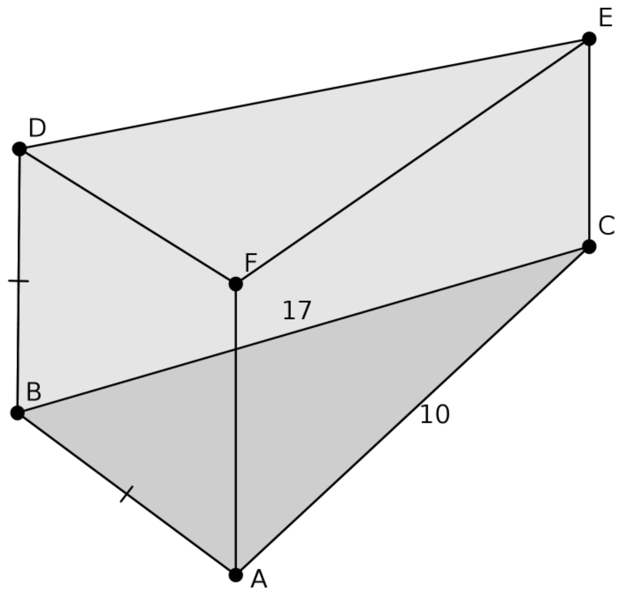
Noi siamo particolarmente attratti dai problemi di geometria solida, non solo perché sviluppano la visione tridimensionale, la capacità di astrazione e perché gli oggetti che ci circondano sono, in genere, solidi, ma, soprattutto, perché ci permette di applicare quasi tutti i teoremi e le proprietà delle figure studiate nei capitoli di geometria euclidea (piana). Per questo, ora passeremo in rassegna un po' di problemi "tipo" e presenteremo un congruo numero di esercizi da risolvere, per il piacere del lettore interessato.

3. Problemi vari

Prima di procedere, raccomandiamo di cercare una costruzione mentale delle figure descritte nei vari problemi proposti, ancor prima di osservare il disegno che sarà messo nella risoluzione del problema stesso: questo è il miglior allenamento possibile per sviluppare la visione tridimensionale ed avviare buone capacità di astrazione.

PROBLEMA 17. *Il triangolo $\overline{ABC}$ ha i lati $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ lunghi rispettivamente* 10 *e* 17 *unità. Sul triangolo $\overline{ABC}$ si costruisce un prisma retto, di altezza uguale ad $\overline{AB}$. Sia la superficie laterale del prisma equivalente alla superficie di un quadrato di lato uguale al doppio di $\overline{AB}$. Si determini il perimetro e l'area del triangolo ed il volume del prisma.*

Soluzione: Costruiamo il prisma secondo istruzioni e disegnamolo.



La superficie laterale è data dalla somma dei due rettangoli $\overline{AC} \times \overline{AF}$ e $\overline{BC} \times \overline{BD}$, più il quadrato di lato $\overline{AB}$. Assegniamo l'incognita x al lato $\overline{AB}$, allora possiamo calcolare la misura della superficie laterale, essendo essa

$$S_{\text{laterale}} = 10x + 17x + x^2 \; = \; x^2 + 27x.$$

Tale area, d'altra parte, è equivalente al quadrato di lato $2x$, per cui possiamo imporre l'equazione

$$x^2 + 27x = 4x^2.$$

A questo punto determiniamo x con semplici passaggi:

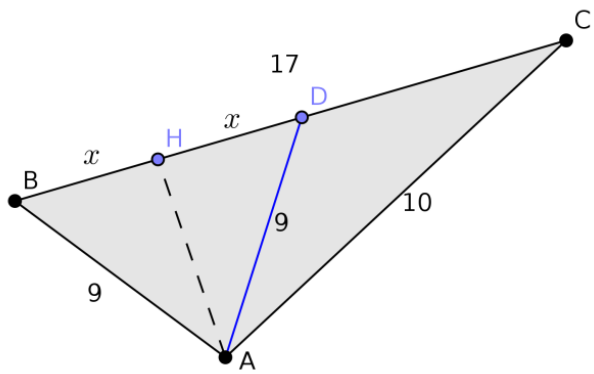
$$3x^2 - 27x = 0$$

e dato che x non può essere nullo [11] otteniamo la soluzione

$$x = 9.$$

Il perimetro del triangolo sarà allora $10 + 17 + 9 \; = \; 36$, unità. Per calcolare l'area, si potrebbe utilizzare la formula di Erone: non avendola spiegata in nessun punto del libro, preferiamo invece affrontare il problema direttamente partendo dal triangolo $\overline{ABC}$ che, per semplicità, riportiamo qui di seguito con tale costruzione in esso: tracciamo $\overline{AD}$ congruente ad $\overline{AB}$ e l'altezza $\overline{AH}$ relativa a $\overline{BC}$. Assegniamo l'incognita x, ai segmenti $\overline{BH}$ e $\overline{HD}$. Chiaramente questa incognita non ha nulla a che fare con l'incognita x utilizzata precedentemente nel prisma.

[11] Perché?



Per il teorema di Pitagora si ha

$$\overline{AH}^2 + \overline{HC}^2 = \overline{AC}^2,$$

ma anche

$$\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 = \overline{AB}^2;$$

sottraendo membro a membro le due uguaglianze e sostituendo con le lunghezze note si ottiene:

$$(17 - x)^2 - x^2 = 100 - 81$$

ovvero

$$289 - 34x + \cancel{x^2} - \cancel{x^2} = 19,$$

da cui

$$270 = 34x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{135}{17}.$$

L'altezza $\overline{AH}$ sarà allora lunga

$$\overline{AH} = \sqrt{81 - \left(\frac{135}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{5184}{17^2}} = \frac{72}{17}.$$

Per cui l'area del triangolo misura

$$S_{\text{triangolo}} = 17 \cdot \frac{72}{17} \cdot \frac{1}{2} = 36$$

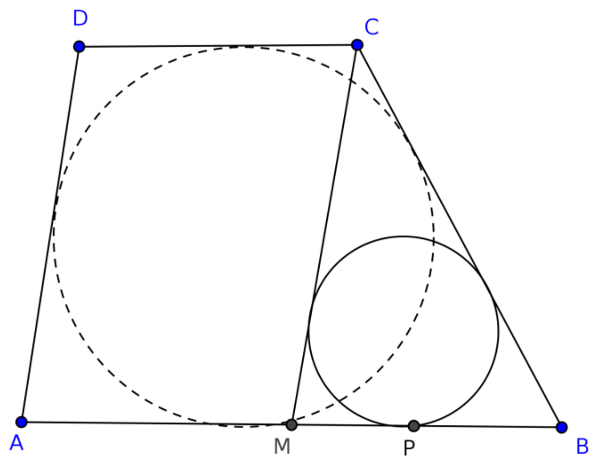
unità quadrate. Per il volume del prisma, basta moltiplicare l'area di base per l'altezza:

$$V = 36 \cdot 9 = 324 \quad \text{unità cubiche.}$$

□

Problema 18. *Nel trapezio* $\overline{ABCD}$ *circoscrivibile, la base maggiore* $\overline{AB}$ *è doppia della minore, il lato* $\overline{AD}$ *misura* 25 *unità e* $\overline{BC}$, 26 *unità. Sia* M *il punto medio di* $\overline{AB}$, *la circonferenza inscritta nel triangolo* $\overline{BCM}$ *tocca* $\overline{MB}$ *nel punto* P. *Si determini l'area della superficie laterale delle due piramidi rette aventi l'una per base il triangolo* $\overline{BCM}$ *ed altezza congruente a* $\overline{MP}$ *e l'altra per base il trapezio* $\overline{ABCD}$ *e per altezza un segmento congruente a* $\overline{PB}$.

Soluzione: Rappresentiamo in un disegno solo la parte di geometria, dell'esercizio, fatta nel piano, essendo quella nello spazio assolutamente superflua.



Assegniamo l'incognita x alla lunghezza della base minore, cosicché sappiamo che $\overline{AB} = 2x$. Inoltre, dato che il trapezio è circoscrivibile, allora $x+2x = 25+26$ da cui ricaviamo le lunghezze delle basi: $x = 17$ per la base minore e, per la maggiore, $2 \cdot 17 = 34$ unità. Ora, essendo M un punto medio, si ha che $\overline{AMCD}$ è un parallelogramma, per cui $\overline{MC} = 25$ unità e $\overline{MB} = 17$. Per poter rispondere alle richieste del problema, ci rimangono due grandezze da calcolare, una delle quali è la posizione del punto P, ad esempio determinando la distanza $\overline{MP}$ a cui assegniamo, nuovamente, l'incognita x e, la seconda, l'altezza del trapezio. Utilizzando la proprietà dei segmenti di tangenza essere congruenti, se condotti da uno stesso punto, arriviamo a definire [12] la seguente equazione per x :

$$25 - x = 26 - (17 - x)$$

da cui si ottiene

$$x = 8.$$

[12] Lasciamo come esercizio per lo studente l'impostazione dell'equazione.

Per l'altezza del trapezio, immaginiamo di tracciare le altezze sia dal vertice D, sia dal vertice C. La proiezione di D su $\overline{AB}$, ovvero il piede dell'altezza sia D', ed analogamente sia C' la proiezione di C. Per il teorema di Pitagora, applicato ai due triangoli $\overline{AD'D}$ e $\overline{CBC'}$, detta h la misura dell'altezza del trapezio, si ha

$$\overline{AD'}^2 + h^2 = 25^2 \quad \text{e} \quad \overline{C'B}^2 + h^2 = 26^2,$$

ma si ha anche [13], $\overline{AD'} + \overline{C'B} = 17$, per cui possiamo scrivere

$$(17 - \overline{C'B})^2 + h^2 = 25^2 \quad \text{e} \quad \overline{C'B}^2 + h^2 = 26^2.$$

Sottraendo membro a membro otteniamo un'equazione ove l'unica grandezza incognita risulta essere $\overline{C'B}$, che per semplicità di scrittura, chiamiamo -tanto per cambiare- x :

$$(17 - x)^2 - x^2 = 26^2 - 25^2$$

da cui

$$17^2 - 34x + \cancel{x^2} - \cancel{x^2} = 51,$$

quindi

$$x = \frac{238}{34} = 7.$$

A questo punto

$$h = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24.$$

L'altezza del trapezio coincide con il diametro della circonferenza inscritta, per cui quest'ultima ha raggio 12 ed il suo centro è il piede dell'altezza della piramide retta avente come base il trapezio. Per determinare la superficie laterale di questa piramide (la seconda richiesta del problema) dovremmo trovare gli apotemi dei triangoli costituenti la superficie laterale stessa. Ora, tutti questi apotemi sono ipotenuse di triangoli rettangoli in cui un cateto è l'altezza della piramide, ovvero $\overline{PB}$ e l'altro uguale al raggio della circonferenza testé trovato, ovvero $r = 12$. Per il teorema di Pitagora, si ha che le quattro altezze dei triangoli della superficie laterale sono uguali tutte a

$$\sqrt{9^2 + 12^2} = 15.$$

La superficie laterale della seconda piramide indicata nella traccia è quindi:

$$S_L = \frac{\text{Perimetro Trapezio} \times \text{Apotema}}{2} = \frac{(17 \cdot 3 + 25 + 26) \cdot 15}{2} =$$
$$= 765 \quad \text{unità quadrate.}$$

[13] Lo studente faccia tutte le considerazioni necessarie per pervenire a tale risultato!

Ragionamento analogo si può fare per la prima piramide: basta determinare il raggio della circonferenza inscritta. Ricordiamo che l'area del triangolo circoscritto può essere determinato dal raggio della circonferenza inscritta e dal perimetro del triangolo stesso, mediante la seguente uguaglianza:

$$S = \frac{P \cdot r}{2}$$

dove P sta per perimetro, S per area ed r è il raggio della circonferenza inscritta. Del triangolo $\overline{MBC}$ si conoscono i lati (lunghi rispettivamente 25, 26 e 17 unità) e l'altezza (lunga 24 unità), possiamo ricavare il raggio in questione raddoppiando l'area e dividendo per il perimetro:

$$\begin{aligned} r = \frac{2 \cdot S}{P} &= \frac{\text{base} \times \text{altezza}}{\text{somma lati}} = \\ &= \frac{17 \cdot 24}{17 + 25 + 26} = 6. \end{aligned}$$

L'apotema comune alle facce della piramide con base il triangolo $\overline{MBC}$ è quindi data dal teorema di Pitagora:

$$\sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$$

Analogamente a prima, la superficie laterale è data da

$$\begin{aligned} S_L &= \frac{\text{Perimetro Triangolo} \times \text{Apotema}}{2} = \\ &= \frac{(17 + 25 + 26) \cdot 10}{2} = 340 \quad \text{unità quadrate.} \end{aligned}$$

□

Questi erano solo due esempi: si raccomanda di applicarsi il più possibile nella risoluzione dei problemi proposti, dato che -come si è potuto ben notare- negli esercizi di "geometria solida" si riscontrano quasi tutte le più importanti proprietà delle figure e si utilizzano ampiamente tutti i principali teoremi studiati in "geometria piana".

Parte 4

La Matematica dell'incerto

(Probabilità e Statistica)

CAPITOLO 17

Il calcolo combinatorio

Parlando di *calcolo combinatorio* o di “combinatoria”, ci riferiamo sempre al **conteggio** di sistemazioni possibili tra vari oggetti o parti. Per essere più concreti, ad esempio, se abbiamo due mele e tre mele, in quanti modi le possiamo sistemare in fila l’una dopo l’altra? e se le mele devono stare tutte insieme come gruppetto? e se invece devono stare in fila, l’una successivamente all’altra, le pere? e cose del genere... Problemi di questo tipo sono, essenzialmente, la richiesta di un “conteggio” di sistemazioni (disposizioni o combinazioni [1]) dei vari oggetti. Tipico esempio di calcolo afferente alla combinatoria è anche determinare quante partite giocare in un torneo, ove ogni squadra incontra ogni altra, oppure nel caso di gironi ad eliminazione diretta ecc... Definiamo ora i concetti principali e sviluppiamo un po’ di idee.

1. Le dispozioni

Supponiamo di voler sistemare delle foto in un album, in ogni pagina del quale non possiamo mettere più di tre foto. Se abbiamo a disposizione dieci fotografie, quante scelte si possono effettuare per mettere le tre foto sulla prima pagina? Il ragionamento più semplice -quello migliore, quindi- è di pensare che sul primo posto della pagina si può scegliere una delle dieci foto; per il secondo posto una delle nove fotografie rimanenti e per il terzo posto una tra le otto rimaste ancora da sistemare. Visto che per ognuna delle foto scelte tra le prime dieci, ci sono nove possibili altre scelte tra le nove rimanenti e, quindi, per ogni coppia di fotografie già scelte, ce ne sono ancora otto di possibili scelte, possiamo affermare che abbiamo a disposizione

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

possibili modi di scegliere tre foto per la prima pagina.
Questo paradigma di ragionamento può essere utilizzato anche per la risoluzione del seguente problema: in quanti modi diversi cinque persone possono sedersi nei primi tre posti di una fila? È evidente che al primo posto si può sedere una tra le cinque persone, sul secondo

[1] Come distingueremo nei paragrafi seguenti.

una tra le quattro rimanenti e all'ultimo posto, una tra le tre persone rimaste ancora da far sedere. In totale:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

possibili modi.

DEFINIZIONE 63. *Si definiscono le* ***disposizioni*** *di n oggetti (diversi) su k posti, tutti i raggruppamenti che si possono effettuare utilizzando k tra gli n oggetti a disposizione e considerando* <u>*diversi*</u> *due raggruppamenti anche solo per l'ordine con cui vengono elencati gli oggetti.*

È importante capire le due sequenze "a, b, c" e " b, a, c" costituiscono due *disposizioni* differenti delle prime tre lettere dell'alfabeto, sebbene esse siano, dal punto di vista insiemistico, costituenti lo stesso insieme [2] $\{a, b, c\}$.
Indichiamo le disposizioni di n oggetti su k posti o, come solitamente si dice, a k a k, tramite la scrittura $D_{n,k}$. Dagli esempi portati prima e per una immediata generalizzazione per n e k qualsiasi, segue la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 48. *Le disposizioni si contano in numero di*

$$D_{n,k} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}_{k}.$$

Ovvero moltiplicando tutti i numeri a partire da n fino a k posti a scendere nella sequenza dei numeri naturali.

Dim.: Evidentemente per il primo posto si hanno n scelte, per il secondo $n-1$, per il terzo $n-2$, ecc... per il $k-$esimo $n-k+1$. Basta moltiplicare tutti questi numeri ed il risultato è ottenuto.

c.v.d.

Tra le disposizioni, hanno particolare importanza quelli per cui il numero dei posti coincide con il numero degli oggetti da sistemare: in tal caso è come se si chiedesse *in quanti modi diversi si possono* ***scambiare di posto*** n oggetti messi in fila l'uno appresso all'altro. Questo tipo di conteggio è così importante che gli diamo un nome proprio tramite la seguente definizione.

DEFINIZIONE 64. *Si chiamano* ***permutazioni*** *di n oggetti il numero degli scambi di posto di tali oggetti e si indica con P_n. In breve si ha*

$$P_n = D_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

[2]Quindi "raggruppamento".

ovvero il numero delle permutazioni è dato dal prodotto di tutti i numeri da 1 *ad* n*.*
Definiamo, altresì, il ***fattoriale*** *di* n *o, anche* n*-fattoriale, il numero*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

prodotto di tutti i numeri da 1 *ad* n*.*

È giusto una osservazione la seguente affermazione

$$P_n = n!$$

e, la conseguente

$$\boxed{D_{n,k} = \frac{P_n}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!}},$$

dovuta al fatto che, nella frazione, tutti i numeri al numeratore, a partire da $(n-k)$, si semplificano con il denominatore e quindi rimane proprio la formula già introdotta per $D_{n,k}$.
Per un'ulteriore giustificazione della formula nel riquadro, possiamo pensare che, anche se a disposizione ci fossero solo k posti, noi potremmo immaginare di aumentarli comunque fino ad n, aggiungendo $n-k$ posti immaginari; ora, scambiando tutti i posti si avrebbero P_n scambi possibili ma, di questi, ben P_{n-k} sono da raggruppare e contare come unico insieme, essendo ottenuti esclusivamente "scambiando" le posizioni "fittizie" [3].

Esempio: In quanti modi si possono mettere a sedere quattro amici ad un tavolo (rettangolare), sistemandosi due da un lato e due dall'altro?

Soluzione: Ci sono $4!$ modi diversi di sistemarsi, poiché sul primo posto si hanno 4 scelte, poi tre per il secondo posto e, dall'altro lato del tavolo, due possibili scelte sul terzo posto ed il quarto è rimasto forzatamente all'ultimo rimasto ancora in piedi.

□

Esempio: E se il tavolo fosse tondo?

Soluzione: In questo caso non si riuscirebbe ad identificare un "primo posto" per cui, messo a sedere una persona su un posto qualsiasi (da cui iniziamo a contare il "primo posto"), gli scambi di posto differenti sono da contare solo sugli altri tre amici da sistemare, ergo ci sono $3!$ scambi di posto effettivi [4].

[3] Che sono in numero di $n-k$. Si ricordi cosa significa "fare una divisione": se 50 arance le raggruppiamo a cinque alla volta, formiamo $50 : 5 = 10$ gruppi. Siamo in una situazione simile.

[4] Si sarebbe potuto ragionare anche considerando gli scambi di posto di prima e poi dividendo il risultato per 4, dato che uno "scambio di posto cicliclo", ovvero

□

Esempio: In quanti modi diversi si possono sistemare, in uno scompartο di un vagone ferroviario, quattro persone se i posti a sedere sono sei?

Soluzione: Qualcuno potrebbe "storcere il naso" poiché noi, finora, abbiamo considerato sempre il numero degli oggetti (ovvero delle persone, in questo caso) maggiore o al più uguale al numero dei posti. In effetti, però, non c'è altra "teoria" da sviluppare, ma occorre solo ragionare un po' di più per utilizzare i concetti già espressi in questa sezione. Per rispondere al quesito, possiamo rivederlo sotto un'altra prospettiva: potremmo chiederci in quanti modi diversi si possono sistemare sei posti a due a due [5]. Per ciascuna di tale sistemazione di posti liberi, poi, ci sono gli scambi di posto delle quattro persone! inoltre dobbiamo considerare che lo scambio di posto dei due "posti liberi" sono in numero di 2 e che, alla fine, essi debbono essere considerati come uno solo! Per cui arriviamo alla soluzione del quesito: ci sono

$$\frac{D_{6,2} \cdot P_4}{2} = \frac{6 \cdot 5 \ \cdot 4!}{2} = 30 \cdot 12 = 360$$

possibili modi diversi, in cui possono mettersi a sedere.

□

2. Combinazioni

Se l'ordine con cui le persone si siedono, ovvero il modo con cui sono elencati in una sequenza gli oggetti, non conta nulla, poiché siamo interessati unicamente al tipo di raggruppamento degli oggetti, allora il conteggio fatto prima è sovrabbondante. In effetti, tutti concorderanno che la sequenza a, b, c e b, a, c è costituita dagli stessi elementi e quindi, come gruppo, è sempre lo stesso. Ma quante di queste sequenze, per esempio delle prime tre lettere dell'alfabeto, possiamo formare? la risposta, ovviamente, è data dal numero di "scambi di posto" dei tre oggetti: quindi dovremmo contare come "uno" le permutazioni degli oggetti uguali! Introduciamo quindi la seguente utilissima e fondamentale definizione.

Definizione 65. *Chiamiamo **combinazione** di n oggetti (diversi) su k posti il numero dei raggruppamenti che si possono fare con k*

---

facendo "slittare in avanti" di un posto quelli che si sono già seduti, lo si può fare in 4 modi, facendo risultare sempre le stesse posizioni l'uno appresso all'altro.

[5] Sono i due posti che devono rimanere liberi, una volta che le quattro persone si sono messe a sedere!

di tali oggetti e considerando diversi due gruppi che abbiano almeno un elemento diverso. Indichiamo le combinazioni con il simbolo $C_{n,k}$.

Dalle considerazioni fatte prima, ovvero che si debbano considerare uguali gli scambi di posto di k oggetti uguali, si ricava la seguente formula:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1} = \frac{P_n}{P_{n-k} \cdot P_k}$$

od ancora

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!},$$

essendo quest'ultimo noto anche come ***coefficiente binomiale*** [6], solitamente indicato con il simbolo $\binom{n}{k}$, da leggere "enne su cappa".

Esempio: In quanti modi si possono scegliere due rappresentanti in una Classe di 25 alunni?

Soluzione: È chiaro che l'ordine con cui vengono scelti "Tizio" o "Caio" non conta, dato che sono sempre loro due che sarebbero i rappresentanti scelti, per cui stiamo cercando le combinazioni a due a due di 25 alunni; ora,

$$C_{25,2} = \frac{25 \cdot 24}{2 \cdot 1} = 300.$$

Per cui ci sono trecento possibili abbinamenti di allievi che possano rappresentare la Classe.

□

Esempio: Quante partite nel girone di andata si devono giocare in un campionato a venti squadre, considerando che ogni squadra deve incontrare ogni altra esattamente una volta? Quante giornate si giocano?

Soluzione: Stiamo cercando tutti i possibili abbinamenti tra dodici squadre: essi sono in numero di

$$C_{20,2} = \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} = 190$$

partite. Considerando che poi, essendo venti squadre, si possono giocare 10 partite in contemporanea tra squadre diverse, allora ci saranno 19 giornate per il girone di andata e 19 per il ritorno.

□

[6] Come presto vedremo ha attinenza con gli sviluppi delle potenze di binomio. Fu una delle scoperte che facevano di più inorgoglire sir Isaac Newton; vedremo che tale coefficiente ha anche a che vedere con il triangolo di Tartaglia-Pascal.

Esempio: Otto amici si incontrano e per salutarsi, impiegano circa 3 secondi per ogni stretta di mano. Ammesso che arrivino tutti contemporaneamente al punto di ritrovo e si vogliono salutare tutti, ma non simultaneamente, quanto tempo impiegheranno per farlo?

Soluzione: Ancora una volta stiamo cercando tutti gli abbinamenti di otto persone, questi sono in numero di

$$C_{8,2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28.$$

Quindi bisogna scambiarsi 28 strette di mano e per fare questo ci vogliono circa $28 \cdot 3 = 84$ secondi, ovvero poco meno di un minuto e mezzo.

□

Esempio: Una discoteca deve assumere nove ballerini, quattro di sesso maschile e cinque di sesso femminile. Se in seguito all'annuncio su un quotidiano si presentano dieci ragazzi e otto ragazze, in quanti modi può essere composto il corpo di ballo?

Soluzione: Bisogna selezionare quattro ballerini tra dieci ragazzi e cinque tra le otto ragazze: è chiaro che non conta l'ordine con cui essi vengono selezionati e che per ogni scelta possibile di ballerini c'è una scelta possibile per le ballerine. Per cui possiamo dire che il numero di possili corpi di ballo è

$$C_{10,4} \cdot C_{8,5} = \frac{10 \cdot \cancel{9}^{\,3} \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 11760.$$

□

Esempio: Quattordici amici si mettono in viaggio. Hanno a disposizione una automobile a 7 posti, una a 5 e una moto. Considerando che i proprietari dei 3 mezzi vogliono guidarli, in quanti modi diversi si possono comporre gli equipaggi?

Soluzione: Di questi quattordici amici, tre li dobbiamo eliminare, in quanto proprietari dei relativi mezzi di trasporto. A questo punto bisogna fare un gruppetto di 6 persone, scelte tra gli 11 possibili passeggeri, per l'auto da 7 posti; un altro di 4 persone, tra le rimanenti $11 - 6 = 5$ persone, per l'automobile da 5 persone ed il rimanente si sistema sulla moto. Quindi, in totale contiamo

$$C_{11,6} \cdot C_{5,4} \cdot C_{1,1} = \frac{11!}{(11-6)! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{(5-4)! \cdot 4!} \cdot 1 =$$

$$= \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cancel{8}^{\,2} \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 13860$$

possibili sistemazioni sui mezzi di trasporto.

□

Concludiamo con quest'ultimo quesito, importante per quanto si dirà nel prossimo paragrafo.

Esempio: in quanti modi diversi si possono separare 10 elementi, messi in fila, utilizzando tre separatori?

Soluzione: Si tratta di "intercalare" i separatori tra gli elementi stessi, ovvero all'inizio od alla fine delle sequenza. Ad esempio, potrebbe essere una cosa del genere

$$* * / * * * * / * * / * *$$

oppure

$$/ * * * * * * / * / * * *$$

La domanda è allora equivalente a quest'altra: in quanti modi si possono selezionare tre tra dieci + uno [7] posti? La risposta è data dal numero delle combinazioni a tre a tre di undici posti, ovvero

$$C_{11,3} = \frac{11!}{8! \cdot 3!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 5 \cdot 3 = 165.$$

□

3. Possibili ripetizioni di elementi

Avendo in mente la differenza sostanziale tra "disposizione" e "combinazione", ora consideriamo la possibilità che qualche elemento tra gli n che si debbono sistemare, possa essere ripetuto nella sequenza, ovvero nel gruppo da considerare. Ad esempio, dati tre elementi a, b, c, ci potremmo domandare quante disposizione a due a due si possono ottenere considerando che gli elementi stessi possano ripetersi sui due posti. Oppure potremmo chiederci, permettendo la ripetizione dello stesso elemento, quanti gruppi diversi, non solo per elementi diversi, ma anche per numerosità di elementi ripetuti, si possano ottenere. Nel caso specifico si avrebbero le seguenti nove disposizioni:

$$aa,\ ab,\ ac;\ bb,\ bc,\ ba;\ ca, cb,\ cc.$$

Si avrebbero, invece, solo sei combinazioni

$$aa,\ ab,\ ac,\ bb,\ bc,\ cc.$$

Come arrivare ad una formula come nei casi precedenti [8]? Intanto, per chiarezza, introduciamo i seguenti due simboli:

$$D^r_{n,k} \quad \text{per le } \textit{disposizione con ripertizione}$$

[7] I separatori possono essere messi anche prima o dopo tutti gli elementi, quindi sono 11 posizioni a disposizione.

[8] A cui, qualche autore, attribuisce l'appellativo di *semplici*.

e

$$C^r_{n,k} \quad \text{per le } \textit{combinazioni con ripertizione}$$

di n oggetti su k posti.

Proposizione 49. *Si hanno le seguenti due formule:*

$$D^r_{n,k} = n^k \quad e \quad C^r_{n,k} = C_{n+k-1,n}.$$

Dim.: Per quanto attiene la prima formula, il discorso è una semplice osservazione: sul primo posto da sistemare ci sono n scelte, ma anche sul secondo, dato che l'oggetto può essere ripetuto [9] e su tutti gli altri posti, sempre n possibilità di scelta; per cui si ha

$$D^r_{n,k} = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k-\text{volte}} = n^k.$$

Per la seconda formula, invece, ragioniamo in questo modo: supponiamo di voler contare quanti gruppi diversi si riescono ad ottenere utilizzando k_1 oggetti uguali al primo, k_2 oggetti uguali al secondo e così via fino a completare tutta la sequenza di k posti. Vale a dire, cerchiamo in quanti modi potremmo scomporre il numero k come somma di addendi, non tutti nulli, del tipo:

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k.$$

Usiamo un trucco: immaginiamo di mettere gli n oggetti l'uno appresso all'altro, come se occupassero una unica posizione e poi aggiungiamo $k-1$ altri posti fittizi, per ottenere un totale di k posizioni utili. I primi n posti li contrassegniamo con 1 e le successive posizioni con 0. Ora, la domanda chiave è: in quanti modi diversi possiamo raggruppare gli zeri, ovvero i simboli 1, su tutti i posti a disposizione? Ad esempio, potremmo passare da questa configurazione

$$\underbrace{1\,1\,1\,\cdots\,1}_{n};\ \underbrace{0;\ 0;\cdots;\ 0}_{k-1}$$

a quest'altra

$$1\,1\,1\ \underbrace{0\cdots 0}_{k-3};\ \underbrace{1;\cdots;\ 1}_{n-3};\ 0;\ 0.$$

Rispondendo a tale domanda, soddisfiamo anche alla richiesta riguardante la decomposizione di k in n addendi, infatti, spostare gli zeri, e far comparire il simbolo uno da qualche altra parte, significa annullare un certo numero di termini uguali nella somma richiesta, per aumentarne, di tanto quanto, altri. Ora, gli zeri li possiamo raggruppare in numero di $C_{n+k-1,k-1}$ modi diversi ovvero in $C_{n+k-1,n}$ modi, da cui la formula dell'enunciato.

[9] E quindi, non essendo scartato, non diminuisce il numero delle possibili scelte!

c.v.d.

Esempio: Da quante colonne è costituito un sistema del totocalcio di 4 triple? E uno di 6 doppie? E uno di 4 triple e 6 doppie?

Soluzione: Ogni tripla gioca tre colonne possibili, quindi in totale 4 triple contano per $3^4 = 81$ colonne. D'altra parte 6 doppie contano come $2^6 = 64$ colonne, per cui 4 triple e 6 doppie sviluppano un sistema con $81 \cdot 64 = 5184$ colonne.

□

Esempio: Quante targhe automobilistiche si possono immatricolare con il sistema

$$NN\,ABC\,NN$$

ovvero, due cifre, tre lettere (alfabeto a 26 caratteri) ed altre due cifre?

Soluzione: La prima coppia la si può comporre con $D^r_{10,2}$ la terna di caratteri con $D^r_{26,3}$ e l'ultima coppia ancora con $D^r_{10,2}$: in totale contiamo:

$$10^2 \cdot 26^3 \cdot 10^2 = 10^4 \cdot 26^3$$

targhe diverse, ovvero $175'760'000$ targhe diverse.

□

Esempio: In quanti modi diversi si possono dare cinque caramelle identiche a tre bambini?

Soluzione: Qui dobbiamo considerare [10] le combinazioni con ripetizione della distribuzione delle caramelle; esse sono in numero di

$$C_{7,2} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21 \quad = C_{7,5}.$$

Quindi ci sono 21 modi diversi di dare le cinque caramelle ai tre bambini, considerando anche casi limite ed altamente ingiusti, tipo ad uno di essi si danno tutte le caramelle ed agli altri niente.

□

Esempio: In quanti modi diversi posso distribuire 12 penne in 5 cassetti?

Soluzione: Possiamo mettere tutte le penne in un cassetto, oppure tre in uno e le altre in altri cassetti: in breve, stiamo cercando le combinazioni con ripetizione di 12 penne su cinque posti. Si ha dunque

$$C^r_{12,5} = C_{12+5-1,4} = \frac{16!}{4! \cdot 12!} = 1820$$

possibili sistemazioni.

□

[10] Per forza, dato che il numero dei bambini è inferiore a quello delle caramelle, dovrà essere che qualche bambino riceva più di una caramella!

4. Il coefficiente binomiale

Abbiamo definito il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$, in occasione delle combinazioni di n oggetti su k posti. È ora di approfondire un po' il discorso. Consideriamo lo sviluppo della potenza di binomio, per esempio di terzo grado. Abbiamo, come noto,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^3 + b^3$$

ottenuta considerando il prodotto

$$(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b).$$

Solo per una volta sarebbe però il caso di sviluppare *pedantemente e senza semplificazioni* quest'ultimo prodotto: abbiamo

$$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(aa+ab+ba+bb)$$

ovvero, ancora

$$(a+b)^3 = aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb.$$

In questo sviluppo osserviamo che c'è un unico prodotto di tipo aaa ovvero a^3 così come di $bbb = b^3$. Ma ci sono tre monomi a^2b e tre di tipo ab^2. Se noi contassimo quante combinazioni della lettera a ci sono su tre posti, dovremmo dire solo una: ovvero solo aaa. Idem per le combinazioni della lettera b su tre posti. Se ora ci domandassimo qual è il numero di combinazioni di due lettere a con una b su tre posti, dovremmo rispondere 3, ottenute, in pratica, "scalando la lettera b una volta su ciascuno dei posti a disposizione. Idem per le combinazioni di due lettere b ed una a. In definitiva possiamo scrivere lo sviluppo del cubo di binomio in questo modo: considerando il numero di "lettere" b da sistemare sulle tre posizioni, ed imponendo, per definizione $\binom{n}{0} = 1$,

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2\, b + \binom{3}{2} a\, b^2 + \binom{3}{3} b^3.$$

In generale si può vedere che la potenza $n-$esima di un binomio si può sviluppare nel seguente modo:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n\, b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 + \binom{n}{n} a^0\, b^n,$$

o, come si scrive in modo compatto:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k}$$

La formula nel riquadrato prende anche il nome di **formula di Newton** per lo sviluppo delle potenze di binomio. Se ricordiamo, come avevamo già sviluppato le potenze di binomio nella seconda parte della presente opera, i coefficienti dei monomi erano tratti dal *triangolo di Tartaglia-Pascal,* per cui possiamo affermare che i numeri presenti in quel triangolo non sono altro che i coefficienti binomiali presentati in questo paragrafo e, entrambi, rappresentano le combinazioni di un certo numero di lettere a ed un numero "complementare (ad n)" di lettere b, che vengano sistemati su n posizioni. L'osservazione sulla natura di carattere combinatorio dei coefficienti del triangolo di Tartaglia è stata sottolineata da Pascal, mentre Tartaglia utilizzava tali coefficienti per natura squisitamente algebrica, al fine di operare con potenze di binomio. Ora, il triangolo di Tartaglia si formava sommando due numeri consecutivi di una riga per ottenere quello che stava immediatamente sotto nella riga consecutiva. Questo vuol dire che sarà valida la seguente relazione:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}.$$

Inoltre, essendo il triangolo di Tartaglia simmetrico rispetto al termine centrale, si ha pure:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

In ultimo, se scegliamo nello sviluppo di Newton $a = b = 1$, si ottiene anche la seguente uguaglianza:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Vediamo una notevole applicazione di quanto esposto in questo paragrafo.

Esempio: In quanti modi diversi si possono sistemare 3 mele e 5 pere, in fila l'una appresso all'altra?

Soluzione: Se indicassimo con m una mela e con p una pera, allora stiamo cercando in numero delle combinazioni del tipo

$$m\,m\,m\,p\,p\,p\,p\,p$$

ovvero, formalmente, quanti monomi del tipo $m^3\,p^5$ possiamo scrivere in modo diverso. Questo numero è dato dal coefficiente relativo a quel monomio nello sviluppo del binomio $(m+p)^8$. La risposta, quindi, è

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56.$$

□

CAPITOLO 18

Introduzione al Calcolo delle Probabilità

Misurare qualcosa significa, come ben sappiamo, creare rapporti. Certamente è abbastanza naturale pensare di misurare una lunghezza od un'area: sono grandezze visibili e facilmente rappresentabili. Misurare qualcosa che, invece, non è visibile, o rappresentabile, sembra abbastanza difficile già solo da pensare. Eppure, c'è un modo, anche abbastanza naturale, per misurare il grado di incertezza: ovvero, l'uomo ha escogitato un sistema per associare un numero alla possibilità che qualcosa possa accadere oppure no. Anche in questo caso, si parla, correttamente, di "misurare" il grado di incertezza, sebbene gli approcci possano essere visti in modi molto diversi rispetto a quello di "creare rapporti". Le *teorie della probabilità* si occupano tutte di dare un modo per associare un numero alla possibilità che qualcosa accada: numero più vicino ad uno, se si crede che quel dato "evento" è facile che avvenga, vicino a zero se si crede che invece sia difficile che accada! Ci sono ben quattro approcci diversi al problema: l'importante, alla fine, è che i risultati coincidano allorquando si passi dal punto di vista più filosofico a quello pratico del *calcolo delle probabilità.* I quattro punti di vista possono essere distinti in

- approccio classico/insiemistico;
- approccio frequentista;
- approccio astratto (capitolo di teoria della misura);
- approccio soggettivista.

A seconda dei punti di vista entro cui inquadrare il discorso, cambiano le definizioni e, addirittura, alcuni teoremi potrebbero essere dei postulati o, viceversa, sotto certi approcci, alcuni postulati, di una teoria, potrebbero diventare teoremi. Il fatto meno ovvio è che certe volte un tipo di approccio non può essere utilizzato e quindi è necessario affrontare i problemi utilizzando altri punti di vista. Un esempio tipico è quello di calcolare la probabilità [1] che un pullman arrivi in orario: dal punto di vista classico, il fatto che in certe fasce orarie ci sia più traffico che in altre, non conta assolutamente nulla e quindi

[1] Qualsiasi cosa possa questo significare, non avendo ancora una definizione di cosa sia una "probabilità".

daremmo sempre una stessa risposta. Oppure, ancora, assegnare la probabilità che un aereo cada al suo primo volo, che dal punto di vista frequentista diverrebbe impraticabile da calcolare e dal punto di vista classico non avrebbe una risposta significativa, esattamente come per il pullman di prima, d'arrivare in orario. La cosa interessante, invece, è che una volta cambiato opportunamente l'approccio, le affermazioni da utilizzare (siano essi postulati o teoremi) sono esattamente le stesse: ovvero il *calcolo delle probabilità* è lo stesso nonostante siano differenti le *teorie della probabilità* utilizzate. Per una questione di semplicità, presenteremo l'approccio classico, principalmente sviluppato da Pascal, Fermat, Laplace, De Moivre [2], facendo presente lo stretto legame con quello frequentista (iniziatore Richard Von Mises), trascurando i due modelli più recenti e, oseremmo dire anche, più convincenti, ovvero quello astratto-matematico (scuola russa, iniziatori Kolmogorov, *Č*eby*šë*v, Markov, ecc...) e soggettivista (scuola italiana, Bruno de Finetti). Diamo, dunque, le prime definizioni e la terminologia adeguata.

0.1. La probabilità: definizione "classica" e "frequentista". Definiamo innanzitutto un ***evento*** qualsiasi cosa che possa verificarsi oppure no. Ad esempio, lanciando una moneta, l'uscita di "Testa" (o di "Croce") è un evento; così come estraendo una carta da un mazzo di carte napoletane, l'uscita del "Sette di denari" è un evento. Altri esempi meno ludici sono dati da: la nascita di un maschietto; una giornata piovosa; il crollo di un palazzo... In generale un evento lo indichiamo con una lettera maiuscola (ad esempio "E", "A", ecc...).

Definizione 66 (Definizione Classica). *La probabilità del verificarsi dell'evento "E" è il numero di casi favorevoli al verificarsi dell'evento rapportato al numero di casi possibili (se si suppone che tutti gli eventi hanno stessa possibilità di verificarsi [3]).*
In formula scriviamo:

$$Pr(E) = \frac{Numero\ casi\ favorevoli\ ad\,E}{Numero\ totale\ di\ casi\ possibili}.$$

Definizione 67 (Definizione Frequentista). *La probabilità del verificarsi dell'evento "E" è il numero di volte in cui si è verificato il dato evento rapportato al numero delle prove (esperimenti) effettuate:*

[2] Ci piace ricordare comunque, che già Galileo aveva affrontato problemi di calcolo delle probabilità sul gioco dei dadi.

[3] Questa è una brutta definizione, dato che per definire la probabilità si utilizza il concetto stesso di probabilità: è una delle maggiori critiche all'approccio "classico"... comunque facciamo finta di nulla!

questo rapporto si chiama anche ***frequenza relativa****.*
In formula scriviamo:

$$Pr(E) = \frac{\textit{Numero di volte che si è verificato}\, E}{\textit{Numero di prove effettuate}}.$$

Una prima osservazione da fare è la seguente: il punto di vista classico è -in un certo senso- un calcolo *a priori*; quello frequentista effettua un calcolo *a posteriori.* Nel senso che la probabilità viene assegnata, dal punto di vista classico, ancora prima di effettuare l'esperimento, mentre il frequentista assegnerà un valore di probabilità successivamente all'effettuazione di un "congruo" numero di prove.
Se il numero dei casi favorevoli al verificarsi dell'evento E è esattamente uguale al numero totale dei casi possibili, allora il rapporto trovato per la probabilità di E è uno, ovvero:

$$Pr(E) = 1.$$

In questo caso l'evento E è detto *evento certo.* Ad esempio, se si cerca la probabilità dell'evento E dato dall'estrarre una carta di valore compreso tra uno e dieci [4] da un mazzo di carte napoletane, chiaramente questo è un evento certo, per cui $Pr(E) = 1$. D'altra parte, se si cerca la probabilità dell'evento F dato dall'estrarre una carta di valore 12 dallo stesso mazzo di carte, dato che non esistono carte di quel valore, tale evento avrà probabilità nulla, ovvero $Pr(F) = 0$; in questo caso si dice che l'evento è *impossibile.* Tutti i valori di probabilità assegnabili dovranno essere compresi tra la probabilità dell'evento impossibile e quella dell'evento certo, per cui, in generale, possiamo scrivere che:

$$0 \leqslant Pr(E) \leqslant 1.$$

Notiamo che un evento impossibile non si verificherà mai in una successione di prove ripetute, mentre l'evento certo si verificherà sempre: il punto di vista frequentista arriva alle stesse conclusioni tratte dalla visione classica or ora adoperata. Per comodità, spesso si usa esprimere la probabilità in valori percentuali.

Esempio: Trovare la probabilità di ottenere "Testa" lanciando una moneta (non truccata) una volta.
Soluzione: Dal punto di vista classico: visto che i casi possibili sono due, mentre l'evento favorevole è solo uno, si ha che il rapporto cercato è di 1 a 2, ovvero, se indichiamo con E l'evento "uscita di una testa", si ha:

$$Pr(E) = \frac{1}{2} = 50\%.$$

[4] Valori estremi inclusi.

Dal punto di vista frequentista questa probabilità non può essere determinata, perchè si deve supporre di lanciare la moneta più volte!

□

Esempio: Trovare la probabilità di estrarre un 7 da un mazzo di carte napoletane.

Soluzione: Dal punto di vista classico: visto che si può estrarre una qualsiasi delle 40 carte, i casi possibili sono in tutto 40. I casi favorevoli sono in numero di $4:$ uno dei quattro sette presenti nel mazzo. Per cui il rapporto che assegna il valore di probabilità è di 4 a 40. Indichiamo ancora una volta il nostro evento con E, allora si ha:

$$Pr(E) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 10\%.$$

Dal punto di vista frequentista, nuovamente tale probabilità non si può assegnare, visto che dovremmo ripetere l'estrazione più volte.

□

A questo punto, qualcuno potrebbe pensare che il punto di vista frequentista non sia utile, visto che non riesce ad assegnare probabilità per singole prove. Comunque in altri casi essa riesce ad assegnare valori di probabilità, laddove il punto di vista classico fallisce.

Esempio: Vogliamo calcolare la probabilità che un pullman arrivi in orario. Supponiamo di considerare la linea Catanzaro-Crotone nell'orario della prima corsa.

Soluzione: Dopo un mese di osservazioni si è notato che il pullman è arrivato in orario solo 10 volte. Visto che il numero di prove effettuate è 26 (il numero di giorni lavorativi del mese), il rapporto tra numero delle volte che è arrivato in orario (verificarsi dell'evento $E:$ "essere in orario") ed il numero di prove effettuate è di 10 a 26 ovvero:

$$Pr(E) = \frac{10}{26} = \frac{5}{13} \approx 38,46\%. \quad \square$$

Dal punto di vista classico tale probabilità non si può calcolare, dato che non tiene conto dei vari fattori che possono influenzare il calcolo; un modo sbagliato di ragionare -in termini classici- è il seguente: i casi totali sono due (arrivare in orario od arrivare in ritardo), il caso favorevole è solo uno (arrivare in orario), per cui dovrebbe essere $Pr(E) = \frac{1}{2} = 50\%$. Ma se si osservasse che la "frequenza relativa" è sempre la stessa per un "gran numero" di giorni, la probabilità calcolata nella concezione frequentista è chiaramente "la più giusta": quindi il modo di ragionare del "classicista" non è del tutto lecito. D'altra

parte, basta pensare che la probabilità calcolata nel senso classico sarebbe sempre del 50% per tutte le fasce orarie del giorno: il ché è sbagliato, dato che il traffico non è sempre lo stesso nelle varie ore del giorno! per cui, è concettualmente sbagliato pensare di poter applicare la concezione classica per calcolare la probabilità
cercata..
Si potrebbe, allora, pensare che i risultati a cui portano le due concezioni della probabilità siano indipendenti tra di loro: non solo a volte non si può applicare una delle due definizioni, ma perfino quando si potrebbero -in linea di principio- applicare entrambe, i risultati sono differenti! In effetti c'è comunque una stretta relazione tra le due concezioni della probabilità, data dal seguente teorema:

TEOREMA 50 (Legge dei grandi numeri). *All'aumentare del numero delle prove, la frequenza relativa "tende" alla probabilità dell'evento quasi certamente.*

Questo teorema non dice, si badi bene!, che, ad esempio, essendo la probabilità di ottenere "testa", nel lancio di una monetina, uguale ad $\frac{1}{2}$ allora su -diciamo- 3000 lanci, sicuramente 1500 volte esce "testa".. quel quasi certamente ha un significato ben preciso in matematica: significa che la probabilità che la "testa"non esca circa la metà delle volte, per un gran numero di prove, è molto piccola, tanto che essa può essere trascurata.
Detto questo procediamo a dare dei concetti e dei teoremi appartenenti al *Calcolo delle probabilità* che, a prescindere dalla concezione probabilistica adottata, hanno validità universale.

1. Probabilità condizionata e primi Teoremi

Uno dei concetti più importanti delle teorie delle probabilità [5] è quello di *Probabilità condizionata* del verificarsi di un evento dato che se ne è verificato un altro. Per chiarire meglio le idee, consideriamo di voler calcolare la probabilità che esca il cinque di denari. Dato che il cinque di denari è unicamente rappresentato da una carta sola tra tutte le quaranta

$$Pr(E) = \frac{1}{40}.$$

Se però si sa che si è già verificato l'evento $F =$ "la carta estratta è un cinque" allora la probabilità che essa sia il cinque di denari è ben maggiore di quella appena calcolata: nei fatti, i cinque sono in numero

[5] Ci sono più teorie per quante concezioni diverse esistono!

di quattro ed uno solo di essi è di denari, per cui, se G indica l'evento "carta di denari"

$$Pr(G/F) = \frac{1}{4},$$

e si legge: "La probabilità che esca l'evento G condizionato dall'evento F è un quarto". Si noti anche che

$$Pr(F) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

e che

$$Pr(G/F) \cdot Pr(F) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{40} = Pr(E) = Pr(G \wedge F)$$

essendo quest'ultima proprio la probabilità che esca l'evento "cinque di denari". Non è difficile generalizzare questo fatto e dimostrare che vale sempre questa relazione: la probabilità del verificarsi simultaneo di due eventi è il prodotto della probabilità che si verifichi un evento per la probabilità che si verifichi l'altro condizionato al verificarsi del primo.. trascritto in formule:

$$Pr(F \wedge G) = Pr(F) \cdot Pr(G/F). \tag{1}$$

Volendo, possiamo utilizzare questa equazione anche come definizione di $Pr(G/F)$, basta dire che la probabilità condizionata è quella che soddisfa la (1). Facciamo qualche esempio di applicazione di questa formula.

Esempio: Quale è la probabilità che le prime due carte estratte da un mazzo di carte napoletane, senza rimettere la carta già estratta nel mazzo stesso, siano due assi?
Soluzione: devono verificarsi assieme i due eventi A = "esce asso come prima carta" e B = "esce asso come seconda carta". Ora, la prima probabilità è un decimo (la stessa di quella calcolata quando consideravamo di estrarre un cinque dal mazzo), mentre la seconda, condizionata al fatto che sia già uscito un asso è $Pr(B/A) = \frac{3}{39} = \frac{1}{13}$, per cui abbiamo:

$$Pr(A \wedge B) = Pr(A) \cdot Pr(B/A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{130}. \qquad \square$$

Facciamo notare che l'uscita del primo evento, *influisce* sulla probabilità di uscita del secondo evento... quando ciò non avviene, si dice che gli eventi sono *indipendenti.* Per esempio, se dopo aver estratto la prima carta, l'avessimo reintrodotta nel mazzo e rimischiato per benino, anche la seconda probabilità avrebbe dovuto essere di un decimo!, ergo, in questo caso, $Pr(A \wedge B) = \frac{1}{100}$, che, com'era logico immaginare, è superiore al caso di prima, essendoci un asso in più nel mazzo. In definitiva, affinchè un evento non influenzi l'esito di uscita di un altro evento, dovrà essere vera questa relazione:

$$Pr(B/A) = Pr(B)$$

ed in tal caso si ha, sostituendo nella relazione (1):

$$Pr(A \wedge B) = Pr(A) \cdot Pr(B). \tag{2}$$

Ora, se abbiamo due eventi E, F indipendenti per i quali è noto che un certo numero N_E di casi è favorevole al verificarsi di E, mentre un altro tot numero N_F di casi è favorevole al verificarsi di F si può subito trarre la conclusione seguente riguardo alla probabilità del verificarsi di uno dei due eventi (naturalmente assieme, essendo indipendenti, non possono avvenire!):

$$Pr(E \vee F) = \frac{N_E + N_F}{N} = \frac{N_E}{N} + \frac{N_F}{N} = Pr(E) + Pr(F). \tag{3}$$

Altra nozione fondamentale è quella di *eventi mutuamente escludentesi:* questi sono rappresentati da eventi che non possono, in alcun modo, verificarsi assieme. Per esempio, nel lancio di una moneta, se esce "testa", non può uscire "croce" e viceversa, pertanto, questi due eventi sono mutuamente escludentesi. Quando si considerano tutti gli eventi che possono verificarsi ed essi sono tutti mutuamente escludentesi, diremo pure che abbiamo dato una *partizione disgiunta esaustiva di eventi* per il dato esperimento. Si nota facilmente che se un esperimento presenta una partizione disgiunta esaustiva di soli due eventi, allora la probabilità che avvenga uno dei due è esattamente uno (essendo questo l'evento certo!), per cui, considerando che eventi mutuamente escludentesi sono per forza indipendenti, la probabilità del verificarsi dell'uno è esattamente uno meno la probabilità di verificarsi dell'altro (più elegantemente "è il complemento ad uno della probabilità dell'altro").. e più chiaramente: se A è un evento e B è l'altro che completa tutti i casi ed è mutuamente escludentesi con A, allora

$$Pr(A) = 1 - Pr(B).$$

Significa questo che, se si conosce la probabilità di A, si conosce pure quella di B e viceversa; d'altra parte, certe volte è più facile calcolare la probabilità di un evento mutuamente escludentesi con un altro, che direttamente la probabilità dell'evento in questione.

Esempio: Qual è la probabilità di dover lanciare più di una volta un dado prima che esca sei?
Soluzione: Posso ripartire disgiuntamente ed esaustivamente secondo

questi due eventi: $A =$ "il sei esce al primo lancio", $B =$ "il sei non esce al primo lancio" (per cui ci vuole più di un lancio per farlo uscire!). Ora, $Pr(A) = \frac{1}{6}$ per cui $Pr(B) = 1 - Pr(A) = \frac{5}{6}$.

□

In generale possiamo anche calcolare la probabilità del verificarsi di uno di due eventi non necessariamente indipendenti in questo modo: siano N_E il numero di casi favorevoli ad E e N_F il numero dei casi favorevoli ad F. Consideriamo inoltre il numero $N_{E\wedge F}$ di casi favorevoli al verificarsi contemporaneo dei due eventi in questione. Osservando che l'evento $E \vee F$ si può ripartire disgiuntamente in modo esaustivo in questi tre eventi: $(E \setminus F)$, $(F \setminus E)$ e $(E \wedge F)$ si ottiene, ricordando che per la (3) la probabilità del verificarsi di uno di questi eventi è proprio la somma delle probabilità del verificarsi dei singoli eventi:

$$\begin{aligned}
Pr(E \vee F) =& Pr(E \setminus F) + Pr(F \setminus E) + Pr(E \wedge F) = \\
=& \frac{N_E - N_{E\wedge F}}{N} + \frac{N_F - N_{E\wedge F}}{N} + \frac{N_{E\wedge F}}{N} = \\
=& \frac{N_E}{N} - \frac{N_{E\wedge F}}{N} + \frac{N_F}{N} - \frac{N_{E\wedge F}}{N} + \frac{N_{E\wedge F}}{N} = \\
=& Pr(E) + Pr(F) - Pr(E \wedge F).
\end{aligned}$$

Esempio: Qual è la probabilità che estraendo una carta da un mazzo di carte napoletane esca un tre o una carte di spade?
Soluzione: Siano questi i due eventi: $A =$ "esce un tre" e $B =$ "esce una carta di spade". Evidentemente la $Pr(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$, e $Pr(B) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$. La probabilità che esca un tre di spade è $Pr(A \wedge B) = \frac{1}{40}$, per cui la probabilità cercata, che esca un tre o una carta di spade è:

$$Pr(A \vee B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \wedge B) = \frac{1}{10} + \frac{1}{4} - \frac{1}{40} =$$

$$= \frac{4 + 10 - 1}{40} = \frac{13}{40}.$$

□

2. Il Teorema delle Probabilità totali ed il Teorema di Bayes

Consideriamo un evento E che abbia probabilità di verificarsi $Pr(E)$ e supponiamo che esso possa avvenire solo in concomitanza con uno degli eventi $\{A_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ formanti una partizione completa esaustiva. Allora possiamo scrivere la seguente uguaglianza di eventi indipendenti:

$$E = (A_1 \wedge E) \cup (A_2 \wedge E) \cup \cdots \cup (A_n \wedge E).$$

Per cui abbiamo

$$Pr(E) = Pr(A_1 \wedge E) + \cdots + Pr(A_n \wedge E) =$$
$$= Pr(A_1) \cdot Pr(E/A_1) + \cdots + Pr(A_n) \cdot Pr(E/A_n).$$

Tale uguaglianza esprime il seguente:

TEOREMA 51 (Teorema delle Probabilità Totali). *Nell'ipotesi in cui sia data una famiglia esaustiva di eventi* $\{A_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ *ed un evento* E *allora*

$$Pr(E) = \sum_{i=1}^{n} Pr(A_i) \cdot Pr(E/A_i).$$

◇

Considerando ora che gli eventi $E \wedge A$ e $A \wedge E$ (si verifica l'evento E assieme all'evento A ovvero si verifica l'evento A assieme all'evento E) sono equivalenti, applicando quanto la formula (1) dice, si ottiene:

$$Pr(E \wedge A) = Pr(A \wedge E) =$$
$$= Pr(E) \cdot Pr(A/E) = Pr(A) \cdot Pr(E/A)$$

per cui, esplicitando in modo opportuno, si ottiene il seguente:

TEOREMA 52 (Teorema di Bayes). [6]

$$Pr(A/E) = \frac{Pr(A) \cdot Pr(E/A)}{Pr(E)}$$

◇

Il risultato si può generalizzare considerando una famiglia esaustiva di eventi $\{A_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ con i quali l'evento E deve necessariamente accadere. Applicando il teorema delle probabilità totali per esprimere la $Pr(E)$ e considerando i due eventi equivalenti $E \wedge A_i$ e $A_i \wedge E$ si ottiene :

TEOREMA 53 (Teorema di Bayes). [7]

$$Pr(A_i/E) = \frac{Pr(A_i) \cdot Pr(E/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} Pr(A_i) \cdot Pr(E/A_i)} \quad \square$$

Il Teorema di Bayes ha notevoli applicazioni a seguito della seguente interpretazione: considerando che un certo evento E possa accadere con probabilità $Pr(E)$ e supposto che esso debba avvenire unitamente ad un certo evento A, conoscendo la probabilità di uscita dell'evento E condizionata al verificarsi di A e conoscendo le probabilità -a

[6]Forma semplificata ovvero **Teorema delle probabilità inverse.**

[7]Forma generale.

priori- di uscita dell'evento A stesso, il teorema in questione permette di trovare la probabilità -*a posteriori*- di esito positivo per l'evento A una volta che si è saputo che l'evento E si è già verificato. Proprio per questo, il teorema di Bayes è conosciuto anche col nome di *Teorema delle probabilità a posteriori.* Facciamo un esempio chiarificatore:

Esempio: Supponiamo che un giorno ci sia probabilità di pioggia
$$Pr(pioggia) = \frac{1}{4},$$
che il tempo sia nuvoloso
$$Pr(nuvoloso) = \frac{2}{5}$$
e che -come è nomale- la probabilità che sia nuvoloso quando piove sia
$$Pr(nuvoloso/piove) = 1.$$
Se si osserva una giornata nuvolosa, quale è la probabilità che piova?
Risposta: Per il Teorema di Bayes si ha:
$$Pr(piove/nuvoloso) = \frac{Pr(piove) \cdot Pr(nuvoloso/piove)}{Pr(nuvoloso)}$$
dopo semplici passaggi ricaviamo:
$$Pr(piove/nuvoloso) = \frac{\frac{1}{4} \cdot 1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{8} \quad \square$$

Esempio: Supponiamo che ci siano due urne contenenti rispettivamente 10 palline bianche, 20 nere e 15 palline bianche, 10 nere e che le due urne vengano scelte a caso senza alcuna preferenza per effettuare l'estrazione delle palline. Se si sa che è uscita una pallina nera, quale è la probabilità che essa venga dalla seconda urna?
Risposta: Innanzitutto si calcolano facilmente le seguenti probabilità:
$$Pr(nera/urna\,1) = \frac{20}{10+20} = \frac{2}{3},$$
$$Pr(nera/urna\,2) = \frac{10}{15+10} = \frac{2}{5},$$
essendo le due urne scelte a caso senza alcuna preferenza,
$$Pr(urna\,1) = Pr(urna\,2) = \frac{1}{2}.$$
Applicando il teorema delle probabilità totali,
$$Pr(nera) = Pr(nera/urna\,1) \cdot Pr(urna\,1) + Pr(nera/urna\,2) \cdot Pr(urna\,2) =$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{15}.$$

A questo punto, per il teorema di Bayes, si ha:

$$Pr(urna\,2/nera) = \frac{Pr(urna\,2) \cdot Pr(nera/urna\,2)}{Pr(nera)}$$

ovvero

$$Pr(urna\,2/nera) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{8}{15}} = \frac{3}{8} \quad \square$$

3. Il concetto di Speranza Matematica

Consideriamo il caso di un gioco in cui si lancia un dado e se esce un numero pari, il giocatore vince 3 euro, altrimenti ne perde 2. Evidentemente, dato che tutte le facce del dado hanno probabilità di uscita $\frac{1}{6}$ ed i numeri pari sono in egual numero di quelli dispari, alla lunga il gioco -possiamo immaginarcelo!- è favorevole al giocatore.. a questo punto, però, per rendere più giusto il gioco, si decide che per far partecipare il giocatore, egli debba versare un “piatto”. Quanto deve essere il piatto? ovvero, quanti euro deve il giocatore mettere per poter partecipare al gioco? Per rispondere a questa domanda, è opportuno fare queste semplici considerazioni: se si facessero sei lanci, supponendo che escano tutti i numeri scritti sul dado, egli vincerebbe in media

$$\frac{3 \times (3\,\text{euro}) - 3 \times (2\,\text{euro})}{6} = 0,50\,\text{euro}.$$

Visto che non c'è ragione di credere -a meno che il dado sia truccato- che esca una faccia piuttosto che un'altra, il piatto da esigere dovrebbe essere pari a questa cifra. Il valore appena trovato si chiama *speranza matematica* di vincita e, concettualmente, rappresenta quanto un giocatore dovrebbe “in media” vincere (o sperare di vincere) partecipando al gioco. Passiamo ad una definizione più formale.

Sia dato un esperimento (per esempio un gioco), i cui eventi siano $E_1,\ E_2, \ldots, E_n$. Supponiamo di poter associare dei valori numerici ad ogni evento, ovvero supponiamo di poter definire una funzione X che assegni dei valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a ciascuno di questi eventi: quindi $X(E_1) = x_1$, $X(E_2) = x_2$ ecc... Chiamiamo questa funzione X una **variabile aleatoria** associata all'esperimento. Siano $p_1, p_2, \ldots, p_n$, le probabilità di uscita degli eventi dati: quindi $p_1 = Pr(E_1)$, $p_2 = Pr(E_2)$ ecc... Definiamo la **speranza matematica** (od il *valore atteso* od ancora l'*aspettazione*) della variabile aleatoria X tramite la seguente uguaglianza:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i.$$

Per capire meglio questa definizione, consideriamo questo esempio: supponiamo di fare tre verifiche scritte di matematica. L'esito di ogni prova è una variabile aleatoria (specie se non si studia a dovere!). A seconda dell'esito, è -generalmente- assegnato un voto che rappresenti la "bontà" dell'elaborato stesso. Quindi, il voto assegnato può essere considerato una *variabile aleatoria.* Per rendere le cose più concrete, siano i voti assegnati pari a: 4, 6 e 8. Supponiamo ora di scegliere a caso uno dei tre compiti e chiediamoci quale è la speranza matematica associata a questo esperimento. Dato che non c'è ragione di credere che l'estrazione del primo, piuttosto che del secondo o terzo elaborato abbia qualche preferenza sugli altri, la probabilità associate agli eventi "estrarre" il primo compito (il secondo o il terzo) è sempre uguale ad $\frac{1}{3}$, per cui:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{3} x_i\, p_i = \\ &= 4 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{3} + 8 \cdot \frac{1}{3} = \\ &= \frac{4+6+8}{3} = 6,\end{aligned}$$

ovvero è proprio la *media aritmetica* dei voti.

CAPITOLO 19

Introduzione alla Statistica descrittiva

Premesso che con il termine *statistica* si intende un vastissimo campo di studi, in generale questa branca della Matematica si occupa dello *studio dei dati,* dove con "dato" si intende un'informazione, possibilmente esprimibile sotto forma numerica, anche se non necessariamente. A grandi linee, la statistica è costituita da due macro-aree: quella *descrittiva* [1], che considera i dati raccolti per "descrivere" una certa situazione della realtà [2], e quella *inferente* [3], la quale ha il compito di trarre delle conclusioni riguardo ad un insieme generale (**la popolazione**) partendo da un sottoinsieme di esso (un **campione** casuale [4]). Nell'ambito della statistica, poi, assume importanza di rilievo la *Teoria delle decisioni* che tenta, dato un insieme di alternative di scelte da assumere in situazione di incertezza, di individuare quale scelta è quella che riesce ad ottenere un risultato ottimale.

Nella statistica descrittiva, "studio dei fenomeni collettivi", si parla di ***popolazione,*** riferendosi sempre ad un *insieme di elementi che presentano tutti caratteristiche comuni.* Gli elementi di tale insieme si chiamano *individui* od anche *unità statistiche.* Ad esempio, gli abitanti della città di Catanzaro è una popolazione, così come l'insieme dei fiumi che sboccano nel mar Ionio. Se consideriamo la produzione di maglioni, allora una popolazione potrebbe essere quella dei maglioni prodotti da una certa ditta. Visto che tutti gli *individui* presentano delle caratteristiche comuni, queste vengono chiamate ***caratteri*** ed è nostro interesse individuare tali caratteri e classificare la popolazione in base ad essi: in pratica si cerca di capire come "si distribuisce" una popolazione in relazione ad uno o più caratteri! Senza soffermarci sulle caratteristiche con cui un carattere può presentarsi e sulle modalità, per quanto ci serve, basta capire che esso può essere rappresentato da un numero, che fornisce il cosiddetto ***dato statistico***. Per esempio:

[1] Detta anche "deduttiva".
[2] Attraverso dei numeri che abbiano capacità "sinottica"
[3] Ovvero "induttiva".
[4] Scelto "a caso" dalla popolazione.

se in una classe dell'Istituto "Scalfaro" ci sono dieci allivi con occhi azzurri, cinque con occhi verdi e sette con occhi marroni e si studia la popolazione in base ai colori degli occhi, chiaramente il "carattere colore degli occhi" fornisce i dati statistici 10, 5 e 7 rispettivamente per occhi "azzurri", "verdi" e marroni.

DEFINIZIONE 68. *Il numero delle volte con cui si presenta un dato carattere si chiama* ***frequenza*** *(assoluta).*

Nell'esempio di prima, gli occhi azzurri si presentano con una frequenza di 10 unità. A volte, se il carattere è rappresentato dalla misura di una grandezza, invece di parlare di "frequenza", si parla di ***intensità***.

Esempio: In una classe ci sono 9 alunni di Catanzaro, 5 di Taverna, 4 di Zagarise e 3 di Sersale, allora le frequenze, con ovvio significato di simboli, sono:

$$f_{\text{CZ}} = 9, \quad f_{\text{Tav}} = 5, \quad f_{\text{Zag}} = 4 \quad \text{e} \quad f_{\text{Ser}} = 3.$$

Si noti che la somma di tutte le frequenza dà la grandezza della popolazione, ovvero che, se N indica il numero di individui presenti nella popolazione (ovvero la "cardinalità" della popolazione), allora

$$f_{\text{CZ}} + f_{\text{Tav}} + f_{\text{Zag}} + f_{\text{Ser}} = N.$$

In genere, la "distribuzione della frequenza" di un carattere della popolazione è meglio rappresentata sotto forma di tabella, che rende immediatamente leggibile i dati... ad esempio, i dati di prima sono meglio leggibili se si formasse una tabella del genere:

Città di Provenienza	**Numero di Persone**
Catanzaro	9
Sersale	3
Zagarise	4
Taverna	5
Totale	**21**

Ora, se si considerano le frequenze assolute (di due o più distribuzioni di caratteri, anche dello stesso tipo!), esse **non sono confrontabili** in generale: infatti se le popolazioni sono di diversa numerosità, non ha senso dire che un carattere si presenta un certo numero di volte in una di esse ed un altro numero di volte nelle altre. L'ostacolo si aggira prendendo in considerazione **il rapporto** con cui il carattere si presenta rispetto al totale della popolazione: tale rapporto, che esprime una *proporzione* all'interno del gruppo/popolazione, si chiama ***frequenza relativa***. Nell'esempio che seguirà si capirà appieno perché è più opportuno considerare le frequenze relative piuttosto che quelle assolute, dapprima però, diamo una definizione formale del concetto appena introdotto.

Definizione 69. *Si chiama* ***frequenza relativa*** *di un dato carattere, il rapporto tra la frequenza (assoluta) ed il numero totale dei casi. In formule, utilizzando un simbolismo già noto dal calcolo delle probabilità:*

$$p_i = \frac{f_i}{N},$$

dove il pedice "i" sta ad indicare la caratteristica che si va a considerare.

Osservazioni: Si noti che la frequenza relativa è un numero sempre compreso tra zero ed uno (estremi inclusi!). Inoltre, se si sommano tutte le frequenze relative, si ottiene esattamente 1. La frequenza relativa è formalmente la probabilità di uscita dell'evento "la popolazione presenta la caratteristica i-esima", considerata dal punto di vista frequentista. Spesso conviene riportare la frequenza relativa in rapporto percentuale, per questo quasi sempre le statistiche vengono espresse in percentuali.

Esempio: Consideriamo l'esempio di prima ed "ampliamo" la tabella introducendo anche le frequenze relative.

Città di Provenienza	**Frequenza**	**Frequenza relativa**
Catanzaro	9	$\frac{3}{7} \approx 42,86\%$
Sersale	3	$\frac{1}{7} \approx 14,29\%$
Zagarise	4	$\frac{4}{21} \approx 19,05\%$
Taverna	5	$\frac{5}{21} \approx 23,80\%$
Totale	**21**	$1 = 100\%$

Ora consideriamo un'altra classe di 28 studenti con una tabella di distribuzione del tipo seguente:

Città di Provenienza	**Frequenza**	**Frequenza relativa**
Catanzaro	9	$\frac{9}{28} \approx 32,15\%$
Taverna	5	$\frac{5}{28} \approx 17,86\%$
Zagarise	4	$\frac{1}{7} \approx 14,27\%$
Sersale	10	$\frac{5}{14} \approx 35,72\%$
Totale	**28**	$1 = 100\%$

Chiaramente, sebbene la frequenza di provenienza da Catanzaro è sempre di 9 unità, nella seconda classe, in rapporto a tutti gli allievi, il numero degli studenti di Catanzaro è minore che nella prima classe: cosa che risulta chiara dalla frequenza relativa... nella prima classe si ha una frequenza relativa del $42,86\%$ mentre nella seconda classe più di dieci punti percentuali in meno, $32,15\%$, d'altra parte non aveva senso confrontare le frequenze assolute, dato che le classi hanno un numero diverso di allievi (la seconda classe ha sette studenti in più!).

1. Le fasi di una ricerca statistica

Per effettuare una *ricerca statistica* si procede per passi: il primo è dare una "impostazione corretta alla ricerca", ovvero capire cosa si vuole studiare e definire le unità statistiche ed i caratteri di tali unità. Poi si deve passare al "rilevamento, classificazione e tabulazione" dei dati: ovvero alla raccolta dei dati riguardanti la popolazione e che si riferiscono ad uno stesso carattere ed alla compilazione di opportune tabelle che possano rendere leggibili i dati riorganizzati per "classi omogenee". Questa è una fase delicata della ricerca, perché da come si riorganizzano e si prospettano i dati, la lettura della situazione reale può perfino essere resa impossibile. In genere, per la sistemazione dei dati si utilizzano tabelle ad una entrata (come quella utilizzata nell'esempio precedente) o a doppia entrata (quando si devono considerare due caratteri che possono essere tra loro"correlati"). L'ultima fase della ricerca statistica consiste nella rappresentazione dei dati e nell'analisi degli stessi. Per la rappresentazione dei dati, qualora non bastassero le tabelle già compilate alla fine del passo precedente, si possono utilizzare vari tipi di *diagrammi*: tra i più diffusi ci sono gli **istogrammi, torte** e, in generale **ideogrammi**. Negli *istogrammi* rappresentiamo i dati mediante rettangoli adiacenti. Tali rettangoli hanno lunghezza pari all'ampiezza della classe che rappresentano ed altezza uguale alla "densità di frequenza", ovvero al rapporto tra la frequenza associata alla classe e l'ampiezza stessa della classe. Questo fa sì che l'area di ogni rettangolo diventi uguale alla frequenza della classe, a cui si riferisce il rettangolo stesso e, la somma delle aree dei rettangoli, quindi, rappresenti la somma delle frequenze dei valori che si ritrovano nelle varie classi. Nelle rappresentazioni mediante torte, si utilizzano "torte" e negli "ideogrammi", immagini attinenti a quanto si vuole rappresentare: ad esempio, se parliamo di cavalli, si potrebbero utilizzare figure di questi animali, più o meno grandi. In generale, comunque, l'idea fondamentale, nella rappresentazione grafica dei dati, è che ogni figura prodotta ed associata ad una classe sia proporzionata alla grandezza stessa della classe. Ad esempio, se ho due classi che rappresentano l'una un terzo di tutta la popolazione e l'altra i rimanenti due terzi, in una "rappresentazione a torta" dovremo suddividere la torta in tre parti di cui una si assegna alla prima classe e le rimanenti due, assieme, si assegna alla seconda classe: sarebbe sbagliato rappresentare la torta divisa a metà, assegnando a ciascuna metà $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ rispettivamente.

2. Rappresentazione parametrica: la posizione

In molti casi i dati statistici devono essere rappresentati da un solo numero, specie se devono essere confrontati con altri dati provenienti da altre popolazioni o per avere un'idea di come si distribuiscono i vari caratteri all'interno di una stessa popolazione. Questo numero che rappresenterà un dato carattere dell'intera popolazione dovrà avere certe caratteristiche "buone" di universalità. Gli indici si suddividono in due grandi classi: quelli di posizioni e quelli di variabilità. In questa sezione tratteremo gli indici di posizione, nella prossima quelli di variabilità.

DEFINIZIONE 70. *Si chiama* ***valore medio*** *di un insieme di dati statistici, un valore che sta tra il minimo ed il massimo dei dati.*

Tra i valori medi, alcuni godono di "buone" caratteristiche per rappresentare l'intera popolazione: il primo valore medio di cui vogliamo parlare è anche il più usato (ed a volte anche abusato: non sempre è opportuno che venga utilizzato!).

DEFINIZIONE 71. *La* ***media aritmetica*** *(semplice), ovvero semplicemente la* ***media*** *di n numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è il numero M che si ottiene dividendo la loro somma per n. In simbolismo matematico:*

$$M = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Esempio: Se uno studente prende i seguenti voti a cinque compiti di matematica: 3, 5, 4, 6 e 7 ha di media:

$$\frac{3+5+4+6+7}{5} = 5.$$

Osservazione molto importante: **Il valore della media aritmentica è quel numero che dovrebbe essere sostituito a ciascuno dei numeri x_i affinché la somma complessiva dei valori rimanga la stessa.** Infatti, nel nostro esempio si ha: $3+5+4+6+7 = 25$ e $5+5+5+5+5 = 25$. In generale, se sostituiamo ad ogni x_i il valore M otteniamo:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} M}{n} = \frac{n \cdot M}{n} = M = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

il ché dimostra quanto testé affermato. È comunque più importante capire il seguente concetto di *media ponderata,* che ingloba, come suo caso particolare, anche la media aritmetica. Sia X l'insieme dei dati statistici provenienti dai caratteri x_1, x_2, $\ldots$, x_k che si presentano con le frequenze $f_1, f_2, \dots, f_k$ rispettivamente (per cui $f_1 + \cdots + f_k = n$) e calcoliamo la media aritmetica in tale caso:

$$M = \frac{\overbrace{x_1 + \cdots + x_1}^{f_1} + \cdots + \overbrace{x_k + \cdots + x_k}^{f_k}}{n} =$$

$$= \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \cdots + f_k \cdot x_k}{n} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{n}.$$

In tale caso la media si chiama ***media aritmetica ponderata*** dei valori x_i e le frequenza f_i diconsi ***pesi***. Chiaramente se la frequenza è 1 per ogni valore, allora la definizione di media ponderata coincide esattamente con la definizione di media aritmetica.

Osservazione: Se scriviamo la media ponderata distribuendo la somma rispetto al rapporto, otteniamo:

$$M = x_1 \cdot \frac{f_1}{n} + \cdots + x_k \cdot \frac{f_k}{n}.$$

Ora, considerando che il rapporto $\frac{f_i}{n}$ è -dal punto di vista di un probabilista frequentista- la probabilità di uscita di "x_i" [5] allora **la media ponderata coincide con speranza matematica di** X [6]:

$$M = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \Pr(x_i) = \mathbb{E}(X).$$

Esempio: Calcolare la statura media di un gruppo di giovani, essendo riportate le loro stature nella tabella seguente, avendo in essa organizzato i dati distribuendoli per fasce di altezze di $5\,cm$.

Altezza	**Frequenza**	**Valore centrale**
$[155, 160)$	0	$\frac{155+160}{2} = 157,5$
$[160, 165)$	20	$162,5$
$[165, 170)$	52	$167,5$
$[170, 175)$	30	$172,5$
$[175, 180)$	12	$177,5$
$[180, 185]$	1	$182,5$
Totale	**115**	-

[5] Più esattamente "la probabilità del valore del carattere x_i".

[6] Nota bene che una variabile statistica tratta di dati certi, mentre quella aleatoria no: abbiamo legato **il certo con l'incerto!**.

Supponendo che all'interno delle classi di omogeneità la distribuzione è uniforme (si pensa questo dato che l'intervallo è "piccolo" -solo di $5\,cm$-) possiamo attribuire ad ogni classe un'unica altezza: il valore centrale delle altezze per ogni intervallo. Dobbiamo quindi calcolare la *media ponderata* dei valori $x_1 = 157,5$; $x_2 = 162,5$; ecc... per cui otteniamo:

$$M = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot f_1}{n} = \frac{157,5 \cdot 0 + \cdots + 182,5 \cdot 1}{115} = \frac{19447,5}{115} = 169,11.$$

Esempio: Si è fatto un miscuglio di $100\,Kg$ di riso di qualità differente e prezzo (di conseguenza) differente. I due caratteri sono distribuiti nella tabella seguente; quanto viene a costare il miscuglio al Kg?

Prezzo (Euro)	**Peso (Kg)**
$1,30$	30
$0,90$	45
$1,90$	15
$2,10$	10

Chiaramente dobbiamo considerare come x_i il prezzo delle varietà di riso e f_i i pesi associati (ovvero le "frequenze"). Considerando la media ponderata otteniamo:

$$M = \frac{1,30 \cdot 30 + 0,90 \cdot 45 + 1,90 \cdot 15 + 2,10 \cdot 10}{30 + 45 + 15 + 10} = \frac{129}{100} = 1,29.$$

Ora facciamo un esempio importante di come sia fondamentale capire che tipo di media bisogna utilizzare in certe situazioni: come avevamo accennato precedentemente, a volte si abusa della media aritmetica anche se essa non potrebbe, in linea di principio, essere utilizzata...

Esempio: Un camion percorre $60\,Km$ di strada; $30\,Km$ sono in salita e viaggia a $10\,Km/h$, mentre gli altri 30 sono in pianura e viaggia a $30\,Km/h$. Quale è stata la velocità media sull'intero percorso?

Soluzione: Un modo frettoloso ed ***errato*** di procedere è calcolare proprio la media delle velocità: $\frac{10+30}{2} = 20\,Km/h$. Per vedere chiaramente che si è sbagliato nel calcolare la velocità media in tal modo, basti pensare che dividendo il percorso per la velocità media si dovrebbe ottenere il tempo necessario per effettuare l'intero percorso, ora: $60 : 20 = 3$ mentre effettivamente si sono impiegati $\frac{30}{10} + \frac{30}{30} = 4$ ore di viaggio! Consideriamo invece la media ponderata con i pesi dati dal tempo speso per percorrere ogni tratto [7]:

$$\bar{v} = \frac{\bar{v}_1 \cdot \frac{30}{10} + \bar{v}_2 \cdot \frac{30}{30}}{\frac{30}{10} + \frac{30}{30}} = \frac{10 \cdot 3 + 30 \cdot 1}{3+1} = \frac{30+30}{4} = \frac{60}{4} = 15\, Km/h.$$

Per vedere che questa è la soluzione giusta, possiamo anche fare questo ragionamento: la media -abbiamo detto- è tale che se sostituita ai singoli dati, deve lasciare inalterata la loro somma, per cui abbiamo (dal calcolo del tempo speso per effettuare il tragitto):

$$t = t_1 + t_2 = \frac{S_1}{\bar{v}_1} + \frac{S_2}{\bar{v}_2} = \frac{S_1}{\bar{v}} + \frac{S_2}{\bar{v}} = \frac{S_1 + S_2}{\bar{v}}.$$

Di tutte queste uguaglianze ci serve la seguente:

$$\frac{S_1}{\bar{v}_1} + \frac{S_2}{\bar{v}_2} = \frac{S_1 + S_2}{\bar{v}}.$$

Dopo semplici passaggi otteniamo:

$$\bar{v} = \frac{S_1 + S_2}{\frac{S_1}{\bar{v}_1} + \frac{S_2}{\bar{v}_2}} = \frac{30+30}{\frac{30}{10} + \frac{30}{30}} = \frac{60}{4} = 15\, Km/h.$$

Prima di vedere altri esempi, diamo altre definizioni di medie.

DEFINIZIONE 72. *Dati gli n valori $x_1, \dots, x_n$, si chiama* media geometrica *(semplice) la radice n-esima del loro prodotto, ovvero*

$$M_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}.$$

In generale, se i caratteri x_i appaiono con frequenza f_i, la ***media geometrica*** *(ponderata) è definita come*

$$\sqrt[n]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdots x_k^{f_k}}.$$

[8] *Considerati i valori di cui sopra, definiamo la* media armonica *(semplice) il reciproco della media aritmetica dei reciproci dei valori... in formule:*

$$M_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}.$$

Altresì si definisce in generale la ***media armonica*** *(ponderata) come:*

$$M_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{x_i}}.$$

[7] Nel seguito indichiamo con $\bar{v}_i$ le velocità medie mantenute sui tratti di strada S_i, durante i tempi t_i.

[8] Come nel caso della media aritmetica, che lascia inalterata la somma se essa viene sostituita ad ogni dato, la media geometrica ha la proprietà di **lasciare inalterato il prodotto** dei dati se essa viene sostituita ai singoli dati.

Si definisce la media quadratica *(semplice) come la radice quadrata della media aritmetica dei quadrati dei valori: ovvero:*

$$M_q = \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Anche in questo caso, più genericamente, si definisce la ***media quadratica*** *(ponderata) nel modo seguente:*

$$M_q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot f_i}{n}}.$$

Osservazione 1: Quando abbiamo calcolato la velocità media del camion, nell'esempio precedente, abbiamo, in effetti, calcolato la *media armonica* pesata con la lunghezza dei tratti di strada.

Osservazione 2: Tutte le medie hanno la proprietà che se sostituite ai singoli dati lasciano inalterato il risultato dell'operazione che si sta effettuando; questa osservazione ha spinto l'eminente matematico italiano Chisini a dare una definizione generale di media, la quale considera come caso particolare tutte quelle date fino ad ora.

DEFINIZIONE 73 (Media secondo Chisini). *Dati i valori del carattere $x_1, \ldots, x_n$, si chiama* **media** *degli n valori, rispetto alla funzione f di n variabili* [9] *quel valore M che, sostituito a tutti gli x_i, lascia invariato il valore della funzione. Ovvero deve verificarsi*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(M, M, \ldots, M).$$

Nota: Se la funzione f è la somma dei dati, allora si ottiene proprio la media aritmetica; se la funzione è il prodotto dei dati, allora otteniamo la media geometrica, ecc...

Premettiamo che un **regime di capitalizzazione composta** [10] si attua quando il montante, alla fine di ogni periodo di capitalizzazione, viene utilizzato per intero come capitale per il periodo di capitalizzazione successivo, procediamo con un esempio di utilizzo di una *media geometrica.*

Esempio: Un capitale C_0 viene impiegato per 3 anni, in regime di capitalizzazione composta, a tassi annui di interesse variabili. Nel primo anno si corrisponde un tasso d'interesse del 5% (ovvero $i_1 = 0,05$); nel secondo anno un tasso del 7% (quindi $i_2 = 0,07$) e nel

[9] Per noi, una funzione ad n variabili, è semplicemente una legge che associa ad ogni n-pla (ovvero ad ogni lista ordinata di n dati) uno ed un solo numero (reale).

[10] È il regime che generalmente si ritrova negli investimenti bancari.

terzo anno un tasso dell' 11% (ovvero $i_3 = 0,11$). Quale è stato il tasso medio i di capitalizzazione nei tre anni?

Soluzione: Alla fine del primo anno il capitale è divenuto

$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot i_1 = C_0(1 + i_1).$$

Il fattore dentro parentesi è il *fattore di capitalizzazione* per il primo anno... facendo un analogo discorso per l'anno successivo, alla fine del secondo anno il capitale diventa:

$$C_2 = C_1(i + i_2) = C_0(1 + i_1)(1 + i_2),$$

e per l'anno ancora successivo, il terzo anno, alla fine si ottiene:

$$C_3 = C_2(1 + i_3) = C_0(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3).$$

Applicando la definizione di Chisini, il tasso medio è quello che sostituito ai tre valori i_1, i_2, i_3 lascia inalterato il risultato, per cui:

$$C_3 = C_0(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) = C_0(1 + i)(1 + i)(1 + i) = C_0(1 + i)^3.$$

Considerando l'uguaglianza

$$C_0(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) = C_0(1 + i)^3,$$

dopo semplicissimi passaggi, si ottiene:

$$(1 + i) = \sqrt[3]{(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)}.$$

Questo fattore di capitalizzazione medio non è altro, come si nota agevolmente, la *media geometrica* dei tre fattori di capitalizzazione. Per cui

$$i = \sqrt[3]{(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)} - 1 = \sqrt[3]{(1,05)(1,07)(1,11)} - 1 =$$
$$= 0,076 = 7,6\%.$$

Una osservazione si può ancora fare: dall'uguaglianza $C_3 = C_0(1+i)^3$ si ricava anche

$$(1 + i) = \sqrt[3]{\frac{C_3}{C_0}} \quad \Rightarrow \quad i = \sqrt[3]{\frac{C_3}{C_0}} - 1.$$

In generale, non conoscendo i tassi d'interesse per gli anni passati, ma essendo noti il capitale iniziale ed il montante finale al termine di n anni, si può ricavare l'interesse di capitalizzazione medio tramite la formula:

$$i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1$$

e, quindi, concludiamo che, la definizione data da Chisini può anche portare ad individuare delle formule (per calcolare una media) che, in linea di principio, non possono essere riscontrate tra quelle "canoniche".

Oltre alle varie medie, ottenute tramite la definizione di Chisini o tramite le altre definizione date (che generalmente costituiscono casi particolari di quelle che, nella letteratura matematica, sono note come *medie potenziate*), altre importanti valori medi sono dati nel seguente gruppo di definizioni: sono le cosiddette **medie di posizione.**

DEFINIZIONE 74. *Dato un insieme di valori* $x_1, \ldots, x_n$ *con le rispettive frequenze* $f_1, \ldots, f_n$, *si chiama* ***moda*** *il valore del carattere che assume la* massima *frequenza. La* ***mediana*** *è il valore che lascia il* 50% *dei valori alla sua sinistra e l'altro* 50% *alla sua destra. Sulla scia della definizione della mediana, si definiscono i vari* ***quartili, decili, percentili*** *e, in generale, i* ***frattili:*** *essi rappresentanto quei valori che lasciano una percentuale di dati alla propria sinistra e la rimanente parte alla propria destra. Ad esempio,* "il primo quartile" *lascia un quarto dei valori alla propria sinistra ed i rimanenti tre quarti alla propria destra.*

Prima di procedere con un esempio, definiamo la **frequenza cumulata** come la somma delle frequenze assolute dei casi registrati fino al carattere preso in considerazione.

Esempio: Nel 2001 in Italia c'era la seguente distribuzione di stanze per appartamenti [11] costituiti da un edificio unicamente abitato:

N^o **Stanze negli appartamenti**	N^o **appartamenti che hanno quel** N^o **di stanze**	**Frequenze cumulate**
1	50.485	50.485
2	585.048	635.533
3	2.302.752	2.938.285
4	5.371.472	8.309.757
5	5.870.685	14.180.442
6 o più	9.023.540	23.203.982
Totale	23.203.982	-

La *moda* è di 6 stanze ad appartamento (corrisponde la frequenza più alta): questo significa anche che "normalmente" gli appartamenti di quella tipologia hanno 6 o più stanze... Per trovare la *mediana* dobbiamo trovare il valore che divide i dati a metà: ora, $23.203.982 : 2 = 11.601.991$ individua la metà degli appartamenti registrati; tale valore sta tra 4 e 5 stanze. Per sapere esattamente quale è

[11]Fonte ufficiale Istat, 14^0 censimento generale della popolazione e delle abitazioni -consultabile al sito internet *http://www.istat.it*-.

questo valore, dobbiamo sommare alle 4 stanze una porzione di stanza che renda la distribuzione divisa esattamente a metà. Per ottenere questa porzione possiamo ragionare in questo modo: la frequenza cumulata, che rappresenta il numero di "casi" registrati, corrispondente a 4 stanze è di $8.309.757$ unità statistiche (di abitazioni) e lo scarto dal valore mediano è:

$$11.601.991 - 8.309.757 = 3.292.234$$

unità immobiliari, mentre lo scarto tra il numero degli appartamenti con 5 stanze e quello con 4 stanze è di $14.180.442 - 8.309.757 = 5.870.685$. Imponendo la proporzione: "lo scarto nel numero di appartamenti è direttamente proporzionale all'incremento del numero delle stanze":

$$3.292.234 : 5.870.685 = x : (5 - 4)$$

ricaviamo la "parte x" da aggiungere alle 4 stanze per ottenere il valore mediano. Applicando le proprietà delle proporzioni otteniamo:

$$x = \frac{3.292.234 \cdot 1}{5.870.785} \approx 0,56.$$

Infine, il valore mediano è $4 + 0,56 = 4,56$ stanze.

Nota: il valore mediano appena calcolato **non è** la media aritmetica delle stanze [12] presenti negli appartamenti della tipologia considerata: significa che se consideriamo tutti gli appartamenti con un numero di stanze minori a $4,56$ e quelle con un numero di stanze superiori a tale valore, allora essi sono in egual numero (questo significa che *occupa la posizione centrale* nella distribuzione in esame!).

Non volendo approfondire in questa sede il discorso sulla statistica, accenniamo brevemente che spesso (per non dire sempre!) dare solo una "media" non è molto indicativo per descrivere la situazione reale: si deve anche dire di quanto i dati sono "diversi" dalla media presentata. All'uopo esistono degli *indici di dispersione o di varibilità* che servono, appunto, per stabilire quanto siano affidabili i valori calcolati per le medie ed anche per farsi un'idea della distribuzione dei caratteri in esame, una volta nota la media stessa. Un famoso esempio dell'opportunità di considerare anche tali indici è quello della banale statistica fatta tra due signori di cui uno guadagna $100.000,00$ euro e l'altro solo $10.000,00$. Mediamente guadagnano $\frac{100.000,00+10.000,00}{2} = 55.000,00$ euro l'uno! D'altra parte, anche se i due signori guadagnassero, rispettivamente, uno $56.000,00$ euro e l'altro $54.000,00$ euro, mediamente

[12] Tra l'altro non si può calcolare una "media aritmetica" per contare il numero medio delle stanze di un appartamento in Italia, poiché l'ultima classe di omogeneità presenta anche il valore indefinito "più di 6 stanze".

il guadagno sarebbe di 55.000 euro! ma, in quest'ultimo caso, la situazione appare "più equa" e quindi anche la media sembra "più significativa". Questo perché il campo di variabilità, nel primo caso è molto ampio, nel secondo caso è ridotto... non è giusto dire, in entrambi i casi, che ciascuno dei signori ha un guadagno di circa 55.000 euro! Chi fosse interessato a proseguire il discorso, troverà soddisfazione alla propria curiosità, approfondendo i vari concetti di **varianza, scarto, deviazione, ecc...**: noi accenneremo solo, in modo superficiale, agli indici di variabilità più utilizzati, nel prossimo paragrafo.

3. Rappresentazione parametrica: la variabilità

Dare un valore medio, senza dire quanto i dati siano "dispersi" attorno ad esso, non serve a granché. Come abbiamo visto alla fine del paragrafo precedente, un valore medio potrebbe anche rappresentare situazioni paradossali. Un altro classico esempio, per capire quanto la conoscenza del solo valore medio sia ingannevole, è dato dai due signori, uno ricco e l'altro povero, il primo dei quali mangia due polli e l'altro nessuno ma, mediamente, tutt'e due mangiano un pollo l'uno! Il vero problema è che non abbiamo, ancora, alcun mezzo per rappresentare come è distribuito questo valore medio all'interno dell'insieme entro cui è stato calcolato. Alcuni "faciloni" portano l'esempio di prima, "dei polli", per criticare la Statistica come scienza, affermando che con essa si può far dire tutto ed il contrario di tutto. In effetti non è così: solo le persone più superficiali possono condividere una tale posizione; chi conosce la materia, sa bene il problema essere spesso che non si fornisce l'informazione completa! ad esempio, ribadendolo ancora una volta, dare un valore medio senza fornire anche il "grado di dispersione" dei dati rispetto ad esso, non dovrebbe mai essere fatto. Preoccupiamoci, dunque, di capire come poter fornire questo indice di variabilità, che possa rendere più significativo il dato fornito attraverso gli indici di posizione.

Il primo indice di dispersione, anche -se vogliamo- il più semplice è dato dallo **scarto** (assoluto). Esso si definisce come la differenza tra il valore più alto è il valore più basso nella distribuzione dei valori. In effetti è un indice un po' rudimentale e grezzo, ma è già qualcosa. Ad esempio, lo scarto nel caso dei due signori che guadagnano rispettivamente $100.000,00$ e $10.000,00$ euro risulta essere di $100.000 - 10.000 = 90.000$ euro, mentre nel caso di quegli altri signori che guadagnano $56.000,00$ e $54.000,00$ euro lo scarto è di soli $56.000-54.000 = 2.000$ euro. Con la stessa media, il fatto che lo scarto sia inferiore, dimostra che la media è molto vicina ai dati distribuiti: in altre parole i dati sono poco dispersi attorno alla media, o meglio, non si allontanano molto da essa.Un altro indice di dispersione è dato dallo **scarto relativo** ottenuto rapportando lo scarto, definito prima, con il valore medio calcolato. In questo modo si ha un *vero e proprio indice,* infatti lo scarto relativo non ha alcuna unità di misura, essendo un rapporto tra due grandezze omogenee. Per l'esempio delle due coppie di signori, nel caso di dispersione massima, l'indice "scarto relativo" è pari a $\frac{90.000}{55.000} = 1.\overline{63}$ mentre per quelli che guadagnavo con una differenza di poco, lo scarto relativo è di solo $\frac{2.000}{55.000} = 0,0\overline{36}$. Potremmo concludere, quindi che, più è vicino a zero lo scarto relativo, meglio la media rappresenta i dati nel campione. Il vero problema, comunque, per gli scarti, è che tengono troppo in conto i valori estremi e non quello che succede sugli altri dati. Con il prossimo esempio si chiarirà meglio questa considerazione.

Esempio: Supponiamo di avere il seguente insieme di dati

$$D_1 = \{-10,\ 5,\ 9,\ 8,\ 11,\ -9,\ -3,\ -10,\ -15,\ 15\}$$

e quest'altro insieme di valori

$$D_2 = \{-1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 1,\ 0,\ 2,\ -1,\ -15,\ 15\}.$$

La media di questi valori per entrambi gli insiemi è $0,1$. Lo scarto (assoluto) è $15 - 15 = 0$, per entrambi gli insiemi. Dato che lo scarto è zero, anche lo scarto relativo è zero, ma è chiaro che il valore medio è abbastanza distanza da tutti i valori dell'insieme D_1 mentre è molto vicino per i valori di D_2. Quindi, l'indice utilizzato non rappresenta affatto bene la dispersione attorno alla media, che è abbastanza alta, nel primo caso, piuttosto bassa nel secondo.

□

In qualche caso (e qualche autore non solo lo ammette, ma anche lo consiglia), si potrebbe pensare di eliminare i dati troppo distanti dalla media e ricalcolare gli scarti: questo dovrebbe comunque essere fatto solo se considerazioni *ad hoc* permettano di giustificare la cancellazione di tali dati. Per fortuna esistono altri indici meno soggetti alla critica mossa per gli scarti [13] e molto più efficaci dal punto di vista statistico [14].

[13]Ovvero di essere troppo dipendenti dai valori estremi.

[14]Dato che possiedono buone caratteristiche e sono "invarianti" rispetto ad alcune operazioni spesso fatte in Statistica.

4. Devianze e Varianze

Per tenere conto di tutti i valori e non solo degli estremi, uno dei modi più facili da pensare, è di considerare la somma di tutti gli scarti dal valore medio e sommarli, oppure farne la media. Così facendo, però, il valore ottenuto sarà sempre nullo, dato che il valore medio dista in modo uguale dalla somma dei dati che lo eccedono e dalla somma dei dati che lo precedono. Questo, comunque, si risolve con poca fatica: basta considerare i valori assoluti di ogni scarto dalla media, ovvero si calcolano gli scarti e si sommano considerandoli tutti positivi. Questo indice esiste e si chiama **scarto medio assoluto:** in formule, indicati con x_i i valori (degli n dati) e con $\bar{x}$ il loro valore medio, allora lo scarto medio assoluto è:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n},$$

dove le barre verticali poste prima e dopo la differenza al numeratore indica che qualsiasi valore sia ottenuto, si utilizzerà il numero privo di segno [15]. Dal punto di vista matematico, comunque, il valore assoluto non gode di buone qualità [16] e, dato che l'unica sua proprietà, che utilizziamo per definire l'indice di dispersione, è di rendere positive le quantità negative [17], potremmo pensare di utilizzare il quadrato degli scarti piuttosto che il valore assoluto: quadrare una quantità produce lo stesso effetto ed ha migliori qualità dal punto di vista del calcolo. Segue, pertanto, la definizione.

Definizione 75. *Si chiama* ***devianza*** *la somma degli scarti quadratici, ovvero la somma delle differenze tra i valori ed il valor medio, ciascuno elevato al quadrato:*

$$\mathit{Devianza} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2.$$

Facendo la media sul numero dei dati del campione, della devianza, si ottiene lo ***scarto quadratico medio,*** *che si indica, generalmente, con* S_n^2 *:*

$$S_n^2 = \frac{\mathit{Devianza}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}.$$

Ora, dato che estraendo la radice quadrata di un quadrato, si ritorna ad unità di misure "lineari", spesso viene utilizzato, come indice di dispersione, la radice quadrata della varianza; quest'altro indice,

[15] Da qui il nome "valore assoluto".

[16] In particolare, non è differenziabile.

[17] E lasciare positive quelle che già lo sono

*generalmente designato con σ, viene chiamato **deviazione standard:***

$$\sigma = \sqrt{Varianza} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}.$$

Non volendo approfondire ulteriormente il discorso sulle caratteristiche degli indici di dispersione e sulla necessità, ad esempio, di "correggere" le formule testé scritte, non dividendo per n ma per $n-1$, noi ci limitiamo a dimostrare il seguente teorema, che ci permetterà di calcolare più facilmente le varianze, dopodiché porteremo qualche esempio di calcolo.

TEOREMA 54. *Dati n valori x_i ed indicato con $\bar{x}$ il loro valore medio, per la varianza sussiste la seguente uguaglianza:*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2,$$

ovvero anche

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \overline{x^2} - \bar{x}^2;$$

vale a dire che la varianza è la differenza tra la media dei valori al quadrato ed il quadrato della media.

Dim.: Sono semplici passaggi aritmetici:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}((x_i)^2 - 2x_i\,\bar{x} + (\bar{x})^2)}{n} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\,\bar{x}\,\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + (\bar{x})^2 \cdot \frac{n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\,(\bar{x})^2 + (\bar{x})^2 =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 = \overline{(x^2)} - (\overline{x})^2.$$

□

Esempio: Riconsideriamo l'insieme dei dati del precedente esempio, che riportiamo per comodità qui di seguito:

$$D_1 = \{-10,\ 5,\ 9,\ 8,\ 11,\ -9,\ -3,\ -10,\ -15,\ 15\}$$

e

$$D_2 = \{-1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 1,\ 0,\ 2,\ -1,\ -15,\ 15\}.$$

Ricordiamo che la media di questi valori per entrambi gli insiemi è $0,1$. Calcoliamo le devianze, le varianze e le deviazioni standard. Con ovvio significato di simboli ricaviamo i quadrati dei valori dei due insiemi:

$$D_1^2 = \{100,\ 25,\ 81,\ 64,\ 121,\ 81,\ 9,\ 100,\ 225,\ 225\}$$

e

$$D_2^2 = \{1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 4,\ 1,\ 225,\ 225\}.$$

Si ha:

$\text{Devianza}_{D_1} = 100+25+81+64+121+81+9+100+225+225 = 1031$

e

$$\text{Devianza}_{D_2} = 1+0+1+1+1+0+4+1+225+225 = 459.$$

In entrambi i casi i valori considerati sono dieci, quindi

$$S^2_{10,D_1} = \frac{1031}{10} = 103.1$$

e

$$S^2_{10,D_2} = \frac{459}{10} = 45.9.$$

Le deviazioni standard sono

$$\sigma_{D_1} = \sqrt{103.1} \approx 10.153 \quad \text{e} \quad \sigma_{D_2} = \sqrt{45.9} \approx 6.775.$$

Si indicherà, allora, che i valori sono dati -per la maggioranza di essi [18]- nell'intervallo

$$\bar{x} \pm \sigma,$$

nel primo caso tale intervallo è

$$0.1 \pm 10.153$$

e nel secondo caso

$$0.1 \pm 6.775.$$

Chiaramente in D_1 i valori risultano più dispersi attorno alla media, rispetto che in D_2, non fosse altro che l'intervallo entro cui si trova la maggior parte dei valori è più ampio!

□

Esempio: un signore mangia due polli ed un altro nessuno, in media mangiano un pollo l'uno! però si ha anche

$$S^2_2 = \frac{(2-1)^2 + (0-1)^2}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

La stessa deviazione standard risulta essere 1, per cui, in media, mangiano un pollo l'uno, ma con una differenza di più o meno un pollo:

$$\bar{x} \pm \sigma = 1 \pm 1;$$

ovvero risulta che uno mangia due polli e l'altro nessuno! Come è giusto che si indichi in questo caso, per non trarre conclusioni erronee dall'analisi dei dati riportati.

□

[18]Non per tutti: si badi bene!!!

Parte 5

Esercizi

In questa sezione elenchiamo un bel po' di esercizi con indicato il capitolo in cui si sono svolti gli argomenti utili alla loro risoluzione. Dopo aver studiato ciascun capitolo, prima di passare al successivo, bisognerebbe provare a risolvere tutti gli esercizi proposti che, pertanto, sono considerati parte integrante del testo e non solo utili svaghi da fare a tempo perso.

Relativi al Capitolo 2

Sui Criteri di Congruenza.

(1) Dimostra che una qualsiasi retta perpendicolare alla bisettrice di un angolo, incontra i lati dell'angolo in punti che, assieme al vertice dell'angolo, sono i vertici di un triangolo isoscele.

(2) Dimostra che le bisettrici degli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti tra di loro.

(3) In un triangolo isoscele le bisettrici degli angoli alla base incontrano i lati opposti in punti equidistanti dal vertice.

(4) Sulla bisettrice dell'angolo in A del triangolo $\overline{ABC}$, si considerino i segmenti $\overline{AD} \cong \overline{AB}$ e $\overline{AE} \cong \overline{AC}$. Dimostra che $\overline{BE} \cong \overline{CD}$.

(5) Dato un triangolo isoscele $\overline{ABC}$, di base $\overline{AB}$, congiungere il vertice C con due punti interni alla base ed equidistanti dagli estremi. Dimostra che i segmenti così ottenuti sono congruenti.

(6) Disegna un triangolo isoscele $\overline{ABC}$ in modo che la base $\overline{AB}$ sia minore del lato obliquo. Prolunga $\overline{CA}$ di un segmento $\overline{AE}$ congruente alla differenza fra il lato obliquo e la base. Prolunga poi la base $\overline{AB}$ di un segmento $\overline{BF} \cong \overline{AE}$. Dimostra che $\overline{CF} \cong \overline{EF}$.

(7) Disegna un triangolo $\overline{ABC}$ e la mediana $\overline{AM}$. Prolunga $\overline{AC}$ di un segmento $\overline{AE} \cong \overline{AC}$ e $\overline{AB}$ di un segmento $\overline{AD} \cong \overline{AB}$. Prolunga poi la mediana $\overline{AM}$ sino a incontrare in N il segmento $\overline{DE}$. Dimostra che $\overline{AN}$ è una mediana del triangolo $\overline{ADE}$.

(8) In un triangolo isoscele $\overline{ABC}$ di base $\overline{BC}$, sui lati $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, considera i punti D ed E tali che $\overline{AD} \cong \overline{AE}$. Prolunga i lati $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ di due segmenti $\overline{BF} \cong \overline{CG}$. Indica rispettivamente con P e Q i punti d'intersezione di $\overline{EF}$ e di $\overline{DG}$ con la base $\overline{BC}$ e con O il punto d'intersezione di $\overline{DG}$ e $\overline{FE}$. Dimostra che il triangolo $\overline{POQ}$ è isoscele.

(9) Si prolunghi la base $\overline{AB}$ di un triangolo isoscele da entrambe le parti di due segmenti congruenti $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$. Si dimostri che i triangoli $\overline{AEC}$ e $\overline{BDC}$ sono congruenti.

(10) Si prolunghino i lati di un triangolo equilatero, tutti da uno stesso verso, di tre segmenti congruenti tra loro. Dimostrare che gli estremi di tali segmenti sono i vertici di un ulteriore triangolo equilatero (oltre quello di partenza, costituito con i "primi estremi" di tali segmenti).

(11) Dato un triangolo equilatero $\overline{ABC}$, considera un punto D interno ad esso, in modo tale che $\overline{AD}$ sia congruente a $\overline{DC}$. Dimostra che $\overline{BD}$ è la bisettrice dell'angolo in B.

(12) Dati due triangoli isosceli aventi la base in comune ed i vertici da bande opposte rispetto alla retta passante per la loro base, dimostra che la congiungente i vertici è la bisettrice dei due angoli al vertice.

(13) Dato un triangolo $\overline{ABC}$ isoscele sulla base $\overline{BC}$, si prendano sopra $\overline{AB}$ ed $\overline{AC}$ due segmenti congruenti $\overline{AD}$ e $\overline{AP}$ e si dimostri che il punto medio M di $\overline{BC}$ è equidistante da P e da D.

(14) Dato un triangolo isoscele $\overline{ABC}$, sia D un punto della base $\overline{AB}$. Preso su $\overline{AC}$ il segmento $\overline{AE} \cong \overline{BD}$ e preso su $\overline{BC}$ il segmento $\overline{BF} \cong \overline{AD}$, si dimostri che anche il triangolo $\overline{DEF}$ è isoscele.

(15) Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti un lato, un angolo ad esso adiacente e la bisettrice relativa a tale angolo, allora i triangoli sono congruenti.

Relativi al Capitolo 3

Sui Criteri di Parallelismo.

(16) La bisettrice di un angolo esterno, adiacente all'angolo al vertice di un triangolo isoscele, è parallela alla base del triangolo.

(17) Se in un triangolo rettangolo uno degli angoli acuti è doppio dell'altro, allora l'ipotenusa è congruente al doppio del cateto minore.

(18) Dato un triangolo $\overline{ABC}$, sia D il punto in cui la parallela ad AC condotta per B interseca la parallela ad AB condotta per C. Dimostra che i triangoli $\overline{ABC}$ e $\overline{BCD}$ sono congruenti.

(19) Dimostra che gli estremi dei lati di un triangolo equidistano dalla retta su cui giace la mediana relativa allo stesso lato.

(20) Sia $\overline{CD}$ la bisettrice relativa all'angolo in C del triangolo $\overline{ABC}$. Detto P il punto in cui la parallela a $\overline{CD}$, condotta per A, interseca la retta BC, dimostra che il triangolo $\overline{ACP}$ è isoscele sulla base $\overline{AP}$.

(21) Nel triangolo $\overline{ABC}$, rettangolo in A, sia $\overline{AB}$ il cateto maggiore. Preso sull'ipotenusa $\overline{BC}$ il punto D in modo tale che $\overline{AC} \cong \overline{AD}$, si consideri la distanza $\overline{BP}$, del vertice B dalla retta AD. Dimostra che $\overline{BD}$ biseca l'angolo $A\hat{B}P$.

(22) Nel triangolo rettangolo $\overline{ABC}$ l'altezza relativa all'ipotenusa $\overline{AC}$ interseca in E la bisettrice $\overline{AD}$ dell'angolo in A. Dimostra che $\overline{BD} \cong \overline{BE}$.

(23) Considera sull'altezza relativa alla base $\overline{AB}$ di un triangolo isoscele un punto qualsiasi P. Traccia le parallele ai lati del triangolo, passanti per P e chiama le intersezioni con i lati (obliqui) del triangolo, una R e l'altra S. Dimostra che i triangoli $\overline{ARP}$ e $\overline{BPS}$ sono congruenti.

(24) Dimostra che l'altezza e la mediana relative all'ipotenusa di un triangolo rettangolo formano un angolo congruente alla differenza tra gli angoli acuti del triangolo stesso.

(25) In un triangolo isoscele di base $\overline{AB}$ traccia la bisettrice dell'angoli (interno) in A e la bisettrice di quello esterno in B. Chiama P il punto di intersezione tra queste due bisettrici e dimostra che la distanza di P dalla retta AB è uguale all'altezza del triangolo dato.

Relativi al Capitolo 4

Sulla famiglia dei parallelogrammi ed il Teorema di Talete.

(26) Dimostra che i punti medi dei lati obliqui di un trapezio isoscele, assieme al punto medio di una delle basi, uniti formano un triangolo isoscele.

(27) Dimostra che se uno dei lati di un trapezio, ad esempio $\overline{BC}$, è congruente alla base minore (diciamo $\overline{CD}$), allora la diagonale $\overline{BD}$ biseca l'angolo $\hat{B}$.

(28) Dato un quadrato $\overline{ABCD}$, considera sui quattro lati, ordinatamente, i punti P, Q, R ed S in modo tale che $\overline{AP} \cong \overline{BQ} \cong \overline{CR} \cong \overline{DS}$. Dimostra che $\overline{PQRS}$ è ancora un quadrato.

(29) Dimostra che le bisettrici degli angoli di un parallelogramma determinano un rettangolo.

(30) Dimostra che i vertici di un parallelogramma equidistano dalla diagonale di cui non sono estremi.

(31) Nel trapezio rettangolo $\overline{ABCD}$ la base minore $\overline{AB}$ è congruente al lato obliquo $\overline{BC}$. Preso su $\overline{CD}$ il punto P tale per cui $\overline{AP} \cong \overline{PC}$, dimostra che $\overline{ABCP}$ è un rombo.

(32) Dato un rettangolo $\overline{ABCD}$ considera il punto medio M del lato $\overline{CD}$. Chiama P il punto d'intersezione tra la retta AM e la retta BC. Dimostra che $\overline{ACPD}$ è un parallelogramma.
(33) Dimostra che i punti medi di un quadrilatero (convesso) qualsiasi sono i vertici di un parallelogramma.
(34) Si costruiscano, sui lati di un quadrato ed esternamente ad esso, quattro triangoli equilateri. Dimostra che i quattro vertici, che non stanno sul quadrato, di tali triangoli, sono vertici di un altro quadrato.
(35) Se la costruzione dell'esercizio precedente si effettuasse su un rettangolo, dimostra che, in questo caso, si otterrebbe un rombo.
(36) Nel triangolo $\overline{ABC}$, retto in $\hat{C}$, la bisettrice dell'angolo esterno in B interseca l'asse del segmento $\overline{AB}$ nel punto P. Dimostra che $A\hat{P}B \cong A\hat{B}C$.
(37) Dimostra che in ogni triangolo, la corda che unisce i punti medi di due lati e la mediana relativa al terzo lato, reciprocamente si dimezzano.
(38) Sia $\overline{ABCD}$ un trapezio in cui la base $\overline{AB}$ è doppia dell'altra. Detto M il punto medio della base maggiore, dimostra che la diagonale $\overline{AC}$ passa per il punto medio del segmento $\overline{MD}$.
(39) Nel triangolo rettangolo $\overline{ABC}$ la bisettrice dell'angolo acuto $\hat{A}$ interseca $\overline{BC}$ nel punto D e l'altezza, relativa all'ipotenusa $\overline{AC}$, interseca $\overline{AD}$ nel punto P. Detta H la proiezione di D su $\overline{AC}$, dimostra che $\overline{BDHP}$ è un rombo.
(40) Nel triangolo rettangolo $\overline{ABC}$, sia $\overline{BH}$ l'altezza relativa all'ipotenusa $\overline{AC}$. Sia D il punto d'intersezione tra la parallela alla bisettrice dell'angolo $\hat{A}$ passante per C e la retta BH. Dimostra che $\overline{BC} \cong \overline{BD}$.

Relativi al Capitolo 5

Sulle equivalenze delle figure piane.

(41) Dimostra che le diagonali di un parallelogramma dividono quest'ultimo in quattro triangoli equivalenti.
(42) Dimostra che le mediane di un triangolo dividono quest'ultimo in sei triangoli equivalenti.
(43) Dimostra che se si congiunge il baricentro di un triangolo con i vertici del triangolo stesso, si ottengono tre triangoli equivalenti.

(44) Se congiungi gli estremi di un lato (obliquo) di un trapezio con il punto medio dell'altro lato (obliquo), ottiene un triangolo che equivale a metà trapezio.
(45) Un trapezio ha la base maggiore doppia della minore. Unisci il punto medio della base maggiore con i punti medi dei tre lati e con gli estremi della base minore: ottieni sei triangoli equivalenti tra loro.

Relativi al Capitolo 6

Sulle Proporzioni di Grandezze, i Teoremi di Euclide, Pitagora e sul calcolo di aree di figure piane.

(46) Il rapporto tra la grandezza $\mathcal{A}$ e la grandezza $\mathcal{B}$ è di due quinti, mentre tra la grandezza $\mathcal{A}$ e la grandezza $\mathcal{C}$ è di un quarto. Determinare il rapporto tra le grandezze $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.
(47) Se $\mathcal{A} : \mathcal{B} = \frac{5}{2}$, qual è il rapporto tra una grandezza tripla di $\mathcal{A}$ ed i tre quinti di $\mathcal{B}$?
(48) Sapendo che $5\,\mathcal{A} = 2\,\mathcal{B}$, determina la misura di $\mathcal{A}$ rispetto ad $\mathcal{U} = \frac{2}{5}\,\mathcal{B}$.
(49) In un trapezio isoscele $\overline{ABCD}$ sul lato obliquo $\overline{AD}$ si fissi un punto E in modo tale che $\overline{DE} : \overline{EA} = 1 : 2$. Si tracci poi la diagonale $\overline{DB}$ e la parallela ad $\overline{AB}$ passante da E. Infine si indichi con P il punto d'intersezione tra $\overline{DB}$ e tale parallela. Sapendo che $m(\overline{AD}) = 60$ e $m(\overline{DB}) = 90$, si calcolino le misure di $\overline{DE}$ e $\overline{DP}$.
(50) Un triangolo isoscele ed un quadrato hanno lo stesso perimetro. La base del triangolo supera di 1 cm la terza parte del lato del quadrato, mentre il lato obliquo del triangolo è inferiore di 5 cm al doppio del lato del quadrato. Calcola i lati delle due figure.
(51) In un quadrilatero $\overline{ABCD}$ il lato $\overline{AB}$ supera $\overline{BC}$ di due centimetri, $\overline{AD}$ supera $\overline{BC}$ di un centimetro e $\overline{CD}$ è pari alla somma di $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Sapendo che sussiste la proporzione $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{CD} : \overline{DA}$, dimostra che $\overline{CD}$ è il doppio di $\overline{DA}$ e determina il perimetro del quadrilatero.
(52) Nel triangolo $\overline{ABC}$ il punto E di $\overline{AB}$ dista 5 unità da A, 6 unità da B e 7 unità da C. Determina la lunghezza dei lati $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ sapendo che i perimetri dei triangoli $\overline{AEC}$, $\overline{BEC}$ e $\overline{ABC}$ sono, ordinatamente, proporzionali ai segmenti $\overline{EA}$, $\overline{ED}$ ed $\overline{EC}$.

(53) Un rombo equivale ad un quadrato di lato 45 unità. Determina la misura della diagonale minore, sapendo che la maggiore è 75 unità.

(54) Un trapezio ha altezza di 24 unità e l'area di 588 unità quadre. Determinare la misura delle basi, sapendo che la loro differenza misura 7 unità.

(55) Due lati consecutivi di un parallelogramma misurano 32, e 24 unità. Determinare la misura delle (due) altezze, sapendo che l'area è di 480 unità quadre.

(56) In un trapezio la somma delle basi è pari a 54 unità. Determinare l'area sapendo che l'altezza è metà della base minore ed un quarto della maggiore.

(57) Determinare l'area di un trapezio isoscele sapendo che l'altezza misura 14 unità e che la proiezione della diagonale sulla base maggiore misura 25 unità.

(58) Determinale il perimetro di un triangolo isoscele la cui area misura 60 unità quadre e la base 10 unità lineari.

(59) Un triangolo rettangolo ha i lati che misura 45, 36 e 27 centimetri. Determina le misure delle lunghezze delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa e la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa.

(60) Se un triangolo ha il lato maggiore lungo 9 unità, un altro lato lungo 6 unità e la proiezione di questo sul primo lato lunga 4 unità, si può affermare che esso è un triangolo rettangolo? e perché?

(61) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 25 unità ed un cateto è nel rapporto di 5 a 3 con la propria proiezione sull'ipotenusa. Determina perimetro ed area del triangolo.

(62) In un triangolo rettangolo un cateto misura 8 unità e la sua proiezione sull'ipotenusa è un terzo della proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa stessa. Determina le misure del perimetro e dell'area del triangolo.

(63) Un cateto è tre quarti dell'altro e la somma dei due è 35 unità lineari. Trova le misure delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

(64) Le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa sono in rapporto con l'altezza relativa all'ipotenusa, rispettivamente, di 3 a 4 e di 4 a 3. Sapendo che l'area del triangolo è 150 unità quadre, trova il perimetro del triangolo.

(65) L'area di un rettangolo misura 27 unità quadre. Determina il perimetro del triangolo sapendo che la proiezione del vertice B sulla diagonale $\overline{AC}$ divide quest'ultima nel rapporto 9 a

16.

(66) Nel trapezio isoscele $\overline{ABCD}$ la diagonale $\overline{AC}$ è perpendicolare al lato $\overline{BC}$. Determina le misure dei lati del trapezio, sapendo che il perimetro è di 62 unità lineari e la somma delle basi è di 32 unità.

(67) In un trapezio rettangolo il lato obliquo misura 10 unità lineari, la base minore è i sei quinti di tale lato e la base maggiore una volta e mezza la minore. Determina le misure del perimetro e dell'area del trapezio.

(68) Dimostra (per via algebrica) il seguente teorema di Pappo.

Teorema 55 (Teorema di Pappo). *In ogni triangolo, la somma dei quadrati di due lati equivale al doppio della somma dei quadrati di metà del terzo lato e della mediana ad esso relativa.*

(69) In un rettangolo la base misura 28 cm ed è pari ai quattro quinti della diagonale. Trovare il perimetro di un rombo che è in rapporto con il rettangolo come 10 sta a 7, la cui diagonale maggiore è doppia dell'altezza del rettangolo dato.

(70) In un triangolo rettangolo un cateto è i quattro terzi dell'altro. Aumentando il cateto minore di 9 unità e diminuendo l'altro della stessa quantità, si ottengono due segmenti congruenti. Determina la misura del perimetro e dell'area del triangolo.

(71) In un triangolo isoscele la base misura 14 unità lineari ed il lato supera l'altezza (relativa alla base) di una sola unità. Quanto dista il baricentro dalla base del triangolo?

(72) Due triangolo rettangoli stanno tra loro nel rapporto di 7 a 4. La differenza tra le loro aree è di 90 unità quadre. Sapendo che il cateto minore del secondo triangolo misura 10 numità ed è la metà del cateto minore dell'altro triangolo, determina il rapporto tra i perimetri dei due triangoli.

(73) Nel rombo $\overline{ABCD}$ la diagonale $\overline{AC}$ è otto quinti del lato e la differenza tra perimetro e diagonale $\overline{AC}$ misura 72 unità. Determina le misure dei segmenti in cui l'altezza $\overline{DH}$ del rombo divide il lato $\overline{AB}$.

(74) Un quadrilatero ha le diagonali perpendicolari ma non bisecate. La diagonale maggiore è quindici quattordicesimi della minore e la supera di 2 unità. Sapendo che tali diagonali si intersecano in un punto che divide a metà la diagonale minore e la maggiore nel rapporto di 5 a 2, determina le misure del perimetro e dell'area del quadrilatero.

(75) Determina la misura dell'area di un triangolo rettangolo di perimetro 30 cm e con un cateto che misura 5 cm.

(76) In un triangolo rettangolo la differenza tra l'altezza relativa all'ipotenusa e la proiezione del cateto minore sull'ipotenusa misura 3 unità lineari, mentre la differenza tra la proiezione del cateto maggiore sull'ipotenusa e l'altezza relativa all'ipotenusa è pari a 4 unità lineari. Trova la misura del perimetro del triangolo.

(77) L'ipotenusa $\overline{AB}$ del triangolo $\overline{ABC}$ misura 25 unità e la differenza tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è di 7 unità. Dal piede H dell'altezza relativa all'ipotenusa, traccia le perpendicolari $\overline{HD}$ e $\overline{HE}$ ai cateti e calcola la misura del rettangolo $\overline{HDCE}$.

(78) In un triangolo rettangolo la proiezione di uno dei cateti sull'ipotenusa misura 27 unità; l'altezza relativa all'ipotenusa è tre quarti della proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa. Calcola la misura del triangolo.

(79) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa supera di 3 unità i quattro terzi di un cateto ed il rapporto tra questi elementi del triangolo è di cinque a tre. Calcola le misure dell'altezza relativa all'ipotenusa e delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

(80) Ripartisci un segmento lungo 28 unità in due parti, in modo tale che il quadrato costruito sulla prima parte ed il triangolo equilatero costruito sulla seconda, abbiano lo stesso perimetro. Infine calcola il rapporto tra le aree dei due poligoni.

(81) Esternamente ad un quadrato costruisci, su di un lato, un triangolo isoscele con altezza pari a due terzi del lato del quadrato. Sapendo che si forma, in tal modo, un pentagono di perimetro pari a 84 unità lineari, determina l'area del triangolo e del quadrato.

(82) Due triangoli isosceli hanno la base in comune ed i vertici posti da bande opposte rispetto alla retta passante per la base. I perimetri dei triangoli sono, rispettivamente, 108 e 128 unità lineari e si sa che il rapporto tra la base e la distanza tra i due vertici è di 8 a 5. Trova le misure dei lati dei triangoli e determina l'area del quadrilatero $\overline{ABCD}$, dopo aver verificato che esso ha due angoli retti.

(83) Nel trapezio $\overline{ABCD}$, rettangolo in A ed in D, la diagonale $\overline{AC}$ è perpendicolare al lato obliquo. Se quest'ultimo misura 51 unità lineari e la sua proiezione sulla base maggiore è nove venticinquesimi della base maggiore stessa, calcola la misura

del perimetro e dell'area del trapezio.

(84) In un trapezio isoscele il perimetro è di 102 unità, il lato obliquo è cinque quarti dell'altezza e la base maggiore è il triplo del lato obliquo. Trova la misura dell'area del trapezio.

(85) In riferimento all'esercizio precedente, determina le misure di un rettangolo equivalente al trapezio ed avente una dimensione tripla dell'altra.

(86) In un trapezio isoscele le diagonali sono perpendicolari ai lati obliqui, la somma delle basi misura 128 unità lineari e la minore è i sette venticinquesimi della maggiore. Determina la misura del perimetro e dell'area del trapezio.

(87) In un trapezio isoscele le diagonali sono perpendicolari ai lati obliqui; le proiezioni di una diagonale e di uno dei lati sulla base maggiore sono rispettivamente 32 e 18 unità lineari. Determina l'area ed il perimetro del trapezio.

(88) In un triangolo rettangolo, il punto medio M del cateto minore dista 24 unità dall'ipotenusa. La parallela, passante per M, all'altro cateto, interseca l'ipotenusa in un altro punto, la cui distanza dal punto M è di 40 unità. Determina perimetro ed area del triangolo.

Questi ultimi due esercizi presentano un tipo di complessità diversa: bisogna discutere sulle possibili soluzioni trovate, le quali dipendono da parametri variabili, messi al posto di quantità numeriche fisse. Esercizio "più complesso" non significa necessariamente "più difficile", sicuramente è "più ragionato", per cui si consiglia caldamente di affrontarli con più attenzione.

(89) In un triangolo rettangolo il cateto maggiore è k volte il minore e lo supera anche di n. Determina l'ipotenusa.

(90) In un rettangolo la base è nel rapporto di $\frac{m}{n}$ con l'altezza e la supera di s. Determina l'area e la diagonale del rettangolo.

Relativi al Capitolo 7

Sul Teorema di Talete in forma generale.

(91) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 30 unità ed il rapporto tra i cateti è di tre a quattro. Determina la misura della lunghezza dei due segmenti in cui il cateto maggiore rimane diviso dalla bisettrice dell'angolo opposto.

(92) Il perimetro di un triangolo è 20 cm ed uno dei lati viene diviso dalla bisettrice dell'angolo opposto in due segmenti che misurano 2 e 3 cm rispettivamente. Determina la misura dei tre lati.

(93) In un triangolo isoscele la base misura 4 cm e la bisettrice di uno degli angoli alla base interseca il lato opposto in un punto che dista 3 cm dall'altro estremo della base. Determina il perimetro del triangolo.

(94) Determina il perimetro del triangolo $\overline{ABC}$ in cui il lato $\overline{AB}$ misura 72 unità, la bisettrice dell'angolo $\hat{A}$ interseca $\overline{BC}$ in un punto distante 28 unità da B ed in cui la bisettrice dell'angolo in B interseca $\overline{AC}$ in un punnto che dista 48 unità da A.

(95) Nel triangolo $\overline{ABC}$, rettangolo in B, la retta parallela al lato $\overline{BC}$ e passante dall'incentro interseca $\overline{AB}$ nel punto T e $\overline{AC}$ nel punto D. Sapendo che $\overline{AT}$ e $\overline{AD}$ misurano 12 e 15 unità, rispettivamente, determina il perimetro dei triangoli $\overline{ATD}$ e $\overline{ABC}$.

(96) Nel triangolo $\overline{ABC}$, rettangolo in A, il punto $D \in \overline{AB}$ dista 16 unità da A e la parallela ad $\overline{AC}$, passante per D, interseca $\overline{BC}$ nel punto P che dista 15 unità da B e 20 da C. Determina i perimetri dei triangoli $\overline{ABC}$ e $\overline{BPD}$.

(97) In un triangolo rettangolo $\overline{ABC}$ il cateto $\overline{AB}$ è lungo 20 unità e la perpendicolare ad $\overline{AB}$, condotta per un punto $P \in \overline{AB}$, interseca l'ipotenusa $\overline{AC}$ nel punto F, che dista 10 unità da A. Sapendo che la misura di $\overline{EF}$ è 6 unità, determina il perimetro dei triangoli $\overline{AEF}$ ed $\overline{ABC}$, avendo dimostrato, preventivamente, che FB biseca l'angolo $E\hat{F}C$.

(98) Nel triangolo rettangolo $\overline{ABC}$, l'ipotenusa $\overline{AB}$ misura 70 unità e la parallela al lato $\overline{BC}$, condotta per un punto E dell'ipotenusa, interseca $\overline{AC}$ nel punto F, la cui distanza da E è di 30 unità. Sapendo che $\overline{AE} = \overline{EF} + \overline{EB}$, determina il perimetro del triangolo $\overline{ABC}$.

(99) Nel triangolo $\overline{ABC}$ il lato $\overline{AB}$ è il doppio del lato $\overline{BC}$, l'altezza relativa ad $\overline{AC}$ è interna al triangolo e l'asse di $\overline{AC}$ interseca $\overline{AB}$ nel punto P in modo tale che si abbia la proporzione $\overline{AP} : \overline{PB} = 5 : 3$. Dimostra che il triangolo è rettangolo in B.

(100) Nel triangolo rettangolo $\overline{ABC}$ il cateto $\overline{AC}$ misura 24 unità e l'ipotenusa $\overline{AB}$ supera l'altro cateto di 8 unità. La parallela a $\overline{BC}$ condotta per un punto E appartenente ad $\overline{AB}$ interseca $\overline{AC}$ nel punto F. Se $\overline{EA} \cong \overline{FC}$, quanto misurano perimetro ed area del triangolo $\overline{AEF}$?

Sulla Similitudine.

(101) Dimostra che la mediana relativa ad un lato di un qualsiasi triangolo, divide ogni corda parallela allo stesso lato in due parti congruenti tra loro.

(102) In un trapezio $\overline{ABCD}$ la parallela alle basi, incontra gli altri due lati nei punti E di $\overline{AD}$ ed F di $\overline{BC}$. Supponendo che $\overline{AF} \parallel \overline{EC}$, dimostra che $\overline{EF}$ è medio proporzionale tra le basi del trapezio.

(103) Nel triangolo $\overline{ABC}$, rettangolo in A, l'altezza $\overline{AH}$, relativa all'ipotenusa, interseca in Q la bisettrice $\overline{CP}$ dell'angolo $\hat{C}$. Dimostra che $\overline{AP}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{QH}$.

(104) In un triangolo acutangolo $\overline{ABC}$ sia $\overline{BB'}$ l'altezza relativa ad $\overline{AC}$ e $\overline{CC'}$ l'altezza relativa ad $\overline{AB}$. Chiama H la proiezione di B' su $\overline{AB}$ e K la proiezione di C' su $\overline{AC}$. Dimostra che $\overline{HK} \parallel \overline{BC}$.

(105) Sia $\overline{ABC}$ un triangolo isoscele sulla base $\overline{AB}$, Sia P il punto d'intersezione tra la bisettrice dell'angolo (interno) in A e dell'angolo esterno in B. Dimostra che la distanza $\overline{PQ}$ del punto P dalla retta AB è media proporzionale tra $\overline{AQ}$ e $\overline{BQ}$.

(106) Un triangolo isoscele ha la base lunga 30 unità ed il lato lungo 50 unità. Determina il perimetro di un triangolo isoscele simile, che abbia base lunga 6 unità.

(107) Un triangolo ha i lati che misurano, rispettivamente, 40, 48 e 56 unità. La corda $\overline{PQ}$, parallela al lato di 48 unità, misura 30 unità. Determina il perimetro del triangolo di cui un lato è $\overline{PQ}$.

(108) Nel triangolo rettangolo $\overline{ABC}$, il punto P del cateto $\overline{AB}$ dista 2 unità da A e 30 da B. Sapendo che la distanza $\overline{PQ}$ di P dall'ipotenusa $\overline{BC}$ è di 18 unità, determina l'area del quadrilatero $\overline{APQC}$.

(109) Nel trapezio , $\overline{ABCD}$ la base maggiore $\overline{AB}$ misura 63 unità e la diagonale $\overline{AC}$ interseca l'altezza $\overline{DH}$ nel punto E. La distanza $\overline{AE}$ misura 30 unità e quella $\overline{BE}$ misura 51 unità. Sapendo che $\overline{EH} = \overline{EC} - \overline{CD}$, determina il perimetro del triangolo $\overline{CDE}$.

(110) Nel triangolo rettangolo $\overline{ABC}$ il cateto $\overline{AB}$ supera l'altro di 8 unità. La parallela al cateto $\overline{BC}$ condotta per il punto P di $\overline{AB}$, tale per cui $\overline{AP} \cong \overline{BC}$, interseca $\overline{AC}$ nel punto Q. Sapendo che $\overline{AP}$ supera $\overline{PQ}$ di 6 unità, determina la misura del perimetro del trapezio $\overline{PBCQ}$.

(111) In un triangolo rettangolo i cateti $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ misura rispettivamente $\frac{3}{4}$ ed una unità. Determina la posizione di un punto P sull'ipotenusa, in modo tale che il perimetro del rettangolo che si ottiene tracciando le parallele ai cateti, con i cateti stessi, abbia perimetro $\frac{11}{6}$ dell'unità.

(112) Le basi di un trapezio sono lunghe 10 unità e 15 unità. Gli altri due lati misurano, rispettivamente, 7 unità e 9 unità. Trova le misure dei lati dei triangoli che si ottengono prolungando i lati non paralleli del trapezio.

(113) Due triangoli simili hanno un rapporto di similitudine pari a 2. Quanto è il rapporto tra le loro aree?

(114) Il perimetro di un trapezio misura 76 unità. Lati obliqui e base minore sono tutti congruenti tra loro. La proiezioni di un lato obliquo sulla base maggiore misura 8 unità. Trova il rapporto tra l'area del trapezio e l'area del triangolo che si ottiene prolungando i lati obliqui.

(115) In un triangolo rettangolo $\overline{ABC}$ i cateti $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ misurano rispettivamente 24 e 32 unità lineari. Si fissi, sull'ipotenusa, un punto P, in modo tale che il segmento $\overline{CP}$ misuri 15 unità. Quanto dista P dal cateto $\overline{AC}$? quanto misura il segmento $\overline{AP}$?

(116) Trova la misura della distanza del baricentro dal lato obliquo in un triangolo isoscele, di perimetro 72 unità lineari, nel quale il lato obliquo supera la base di 6 unità.

(117) Un triangolo rettangolo ha i cui cateti che misurano, rispettivamente, 48 e 36 unità. Trovare la misura del lato del quadrato inscritto con due lati sui cateti.

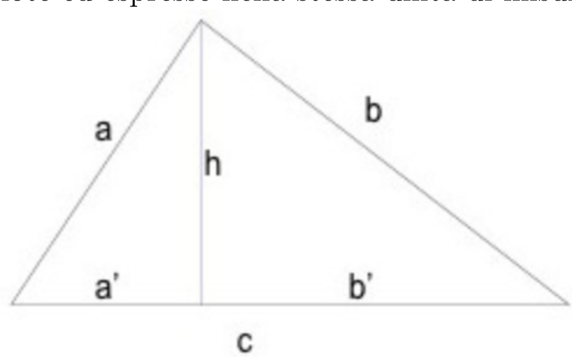
(118) In un triangolo isoscele con base unitaria ed altezza doppia della base, inscrivi un rettangolo, con la base sulla base del triangolo, la cui diagonale sia unitaria.

(119) In un triangolo isoscele, la base è i cinque terzi del lato del quadrato inscritto (con un lato sulla base del triangolo). Il quadrato costruito sull'altezza del triangolo, supera l'area del triangolo di 150 unità quadre. Trova la misura della base del triangolo e quella del lato del quadrato inscritto.

(120) Due triangoli simili hanno i lati che misurano rispettivamente a, b, c e a', b', c'; siano i perimetri p e p' ed il rapporto di similitudine k. Completa la tabella avendo i dati di partenza espressi nella stessa unità di misura.

$a = 22,5$ $a' = 30$	$b = 12$ $b' =$	$c = 36$ $c' =$	$p =$ $p' =$	$k =$
$a = 30$ $a' = 7,5$	$b = 36$ $b' =$	$c =$ $c' = 19,5$	$p =$ $p' =$	$k =$
$a = 37,5$ $a' =$	$b = 45$ $b' =$	$c =$ $c' = 31,5$	$p = 135$ $p' =$	$k =$
$a =$ $a' = 24$	$b =$ $b' = 36$	$c =$ $c' =$	$p =$ $p' = 99$	$k = 2$
$a = 18$ $a' =$	$b =$ $b' =$	$c = 14$ $c' =$	$p = 58,5$ $p' =$	$k = \frac{1}{3}$
$a =$ $a' = 72$	$b =$ $b' =$	$c =$ $c' = 90$	$p =$ $p' = 240$	$k = 4$

(121) Sia dato il triangolo rettangolo come nella figura. Completare la tabella calcolando le grandezze incognite partendo da quelle già note ed espresse nella stessa unità di misura.



c	**a**	**b**	**h**	**a′**	**b′**	**Area**
56, 25	45					
15				9, 6		
	90		72			
	15	20				
	13			5		
	12					90
				12	27	
			72	54		

Relativi al Capitolo 8

Sulla Teoria degli Insiemi.

(122) Si definisce *Insieme delle parti* di un insieme S, il raggruppamento di tutti i sottoinsiemi dell'inseme S; esso si denota

con

$$\mathcal{P}_S = \{A | A \subseteq S\}.$$

Determinare l'insieme delle parti dell'insieme $\{a, b, c\}$.

(123) Se $A = \{$casa, penna, cielo$\}$ e $B = \{$penna, matita, albero$\}$, determinare gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ ed i complementari di A in B e di B in A.

(124) Giustificare e dare un esempio di quando $A \cup B = A$ e di quando $A \cap B = B$.

(125) Sia $\mathcal{U}$ l'insieme universo definito dalle cinque vocali ed $A = \{a, e\}$, $B = \{o, u\}$. Verificare le leggi di de Morgan su tali insiemi.

(126) Dimostrare la legge distributiva dell'unione sull'intersezione, ovvero che

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(127) Dimostrare la legge distributiva dell'intersezione sull'unione, ovvero che

$$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(128) Siano dati gli insiemi $A = \{$casa, chiesa$\}$ e $B = \{$a,b,c$\}$. Scrivere il prodotto cartesiano $A \times B$.

(129) Dimostrare che $(A \smallsetminus B) \cup B = A \cup B$.

(130) Dimostra che $A \smallsetminus (A \smallsetminus B) = A \cap B$.

(131) Dimostra che $A \cap A^c = \emptyset$.

(132) Un gruppo di turisti viene a visitare Catanzaro: sono in 100 e si sa che 60 di essi vanno ad un mostra al "complesso San Giovanni" e 85 si recano al "parco della Biodiversità". Quanti turisti visitano entrambi i posti?

(133) In un gruppo di 50 ragazzi, a 16 piace sentire musica "rock", a 25 piace la "disco" e 12 ascoltano entrambi i tipi di musica. Gli altri, a cui piace la musica "classica", in quanti sono?

(134) Nell'insieme dei ragazzi presenti nella tua classe, studia le proprietà della relazione x "è cugino di" y.

(135) Nello stesso insieme dell'esercizio precedente, studia la relazione x "pratica lo stesso sport di" y.

(136) Studia la relazione "essere più ricco".

(137) Dare un esempio di relazione antisimmetrica.

(138) Verifica che la relazione definita tra gli abitanti di un condominio, "abitare allo stesso piano", è una relazione di equivalenza ed identifica le classi di equivalenza.

(139) Quali tra le seguenti relazioni sono di equivalenza? quali rappresentanti delle classi potrebbero essere scelti?

- Essere dello stesso sesso.
- Essere più giovani.
- Essere nati nella stessa città.
- Avere lo stesso cognome.
- Avere lo zio in comune.

(140) Tra i giocatori della serie A si consideri la relazione "giocare nella stessa squadra". È una relazione di equivalenza? eventualmente, quali sono le classi di equivalenza?

(141) Dato l'insieme $A = \{a, b, c, d\}$ e la relazione

$$\mathcal{R} = \{(a, a),\ (a, b),\ (b, b),\ (b, d),\ (c, c),\ (c, d),\ (d, d)\},$$

dire di quali proprietà essa gode.

Relativi al Capitolo 9

Sull'insieme dei Numeri Naturali.

(142) Dire se la funzione che associa ad ogni alunno la propria madre biologica è una corrispondenza biunivoca.

(143) Considerando la corrispondenza che associa ad ogni persona la propria data di nascita, considerando come dominio l'insieme degli alunni della tua Classe e come codominio i 365 giorni di un anno non bisestile, tale funzione è iniettiva? è suriettiva?

(144) Indica almeno altri due insiemi idempotenti a $\{a, b, c, d\}$.

(145) Dimostra che l'addizione tra numeri naturali è ben definita, ovvero che se si cambiano i rappresentanti della Classe di equivalenza, nella somma di due numeri naturali, il risultato non cambia: si può anche portare un esempio concreto.

(146) Spiega perché è impossibile effettuare l'operazione $7 - 8$.

(147) Determina il M.C.D. ed il m.c.m. tra i numeri 28 e 102 tramite definizione e verifica che moltiplicando queste quantità tra di loro, si ottiene proprio il prodotto tra i due numeri.

(148) Un algoritmo molto efficiente (e quindi veloce) per determinare il M.C.D. tra due numeri, indicato da Euclide nella sua grandiosa opera "Elementi", si basa sull'osservazione che

$$\text{M.C.D.}(a,\ b) = \text{M.C.D.}(r,\ b)$$

dove r è il resto della divisione tra a e b, per cui, procedendo ripetutamente fino ad ottenere un resto nullo, il penultimo resto è proprio il M.C.D. cercato.
Determinare con tale algoritmo il M.C.D($490,\ 126$).

(149) Indicare tutti i divisori di 105.

(150) Effettua il calcolo seguente, possibilmente con il minor numero di passaggi:

$$[2 + 5 - (3 + 4 - 5)] : [5 \cdot 12 - 5 \cdot 11].$$

(151) Utilizza le regole delle potenze per semplificare i calcoli nella seguente espressione:

$$10^{15} : [(10^2)^3]^2 10^4 : 10^7.$$

(152) Svolgi il calcolo con il minor numero di passaggi:

$$[(3^4 \cdot 4^4 \cdot 5^4) : (3^3 \cdot 4^3 \cdot 5^3)] : 4 - [(3^2)^2]^2 : 3^6.$$

(153) Esercitati con le regole delle potenze:

$$\{[(3^4)^2]^3 \cdot 2^{20} \cdot 4^2\} : 6^{22} - 7 \cdot \{[(5^2 \cdot 3^2) : 15] : 3\}.$$

(154) Come per l'esercizio precedente:

$$[(4^2 \cdot 3^4)^5 : (9^2 \cdot 2^4)^4] : 6^3 + 4.$$

(155) Utilizza le regole delle potenze per semplificare i calcoli:

$$[3^3 \cdot (27^4 : 9^4) : (3^2)^3]^5 \cdot [(30^3 : 10^3) : (3^3)^0 : 3]^5 : (3^3)^5.$$

(156) Svolgi i calcoli con il minor numero di passaggi (semplici):

$$\{[(12^2 : 3^2) - 5 \cdot 3]^5 + 25^0\}^2 - [4^2 - (7^2 - 36^2 : 6^2)]^3 : 9.$$

(157) Applica le regole delle potenze e semplifica i calcoli:

$$[(10 \cdot 10^2 : 8) \cdot 5^3] : (5^3)^2 + \{[(8^0 \cdot 4^3)^4 : (4^3 \cdot 4^2)^2 - 8] + 100^0\}.$$

(158) Semplifica la seguente potenza:

$$[(4^5)^4 : ((4^3)^2)^2 : (4^2)^3]^2.$$

(159) Semplifica le potenze ed effettua i calcoli:

$$\big[(21^4)^2 : \big((3^8 \cdot 2^{16} \cdot (7^2)^4) : 12^8\big)\big] \cdot 9^2 : 3^{12}.$$

(160) Svolgi i calcoli nel modo più semplice possibile:

$$[(35^2)^4 : (7^4 \cdot 25^2)^2] - [3 + 77 - (3^2 + 3^3) + (4^4)^4]^0.$$

(161) Ho un certo numero di caramelle: se le raggruppo a tre a tre, non me ne avanza nessuna, se le raggruppo a cinque a cinque, me ne manca una per completare un gruppo. Se ti dico che ne ho meno di 25, quante caramelle ho?

(162) Nello scaffale della mia libreria entrano al massimo 30 libri. Per velocizzare la conta, mi metto a contarli tre alla volta, ma me ne avanzano 2 e mi dimentico quanti gruppi ne avevo contati. Allora decido di contarli quattro alla volta ed anche questa volta mi dimentico quanto gruppi ho contato, ma me

ne avanzano sempre due. Posso risalire al numero di libri che ho messo su quello scaffale senza dovermi rimettere a contarli?

(163) Ci sono tre sacchi di farina che pesano rispettivamente 54, 45 e 63 Kg. Sa ogni sacco si vuol trarre tanti sacchetti tutti di ugual peso e tali che il loro peso sia anche il più grande possibile. Quanti sacchetti si riempiranno?

(164) Ho quattro pezzi filo di ferro lunghe rispettivamente 60, 72, 84 e 108 centimetri. Se li volessi dividere in parti uguali, quale sarà la lunghezza massima che posso ottenere e quanti pezzi da ciascun filo riesco a trarre?

(165) Un agricoltore ha raccolto 150 kg di mele, 110 di pere e 200 di arance. Vuole sistemare la frutta raccolta in cassette che abbiano tutte lo stesso peso e che contengano ciascuno lo stesso tipo di frutta. Quale sarà il peso di ogni cassetta? quante cassette potrà riempire?

(166) Un fioraio vuole sistemare 50 rose e 60 gigli nel maggior numero possibile di vasi e in modo tale che in ogni vaso vi siano lo stesso numero di rose e lo stesso numero di gigli. Quanti vasi potrà riempire? E quante rose e gigli conterrà ciascun vaso?

(167) In una palestra scolastica si trovano la squadra maschile, composta da 20 ragazzi e la squadra rappresentativa della scuola rivale, composta da 25 ragazzi. Se le due squadre devono sistemarsi in un ugual numero di file, con il massimo numero di ragazzi o ragazze, quante file si otterranno?

(168) Il rubinetto della vasca da bagno e quello del lavandino perdono acqua a gocce. Osservo che nella vasca da bagno cade un gocci ogni 28 secondi mentre nel lavabo ne cade una ogni 20 secondi. Se alle 10.00 del mattino ne vedo scendere due contemporaneamente, a che ora li vedrò cadere contemporaneamente la prima volta? ed in un'ora, quante volte vedrò cadere contemporaneamente le due gocce?

(169) Tre corridori si cimentano in una gara podistica: il primo percorre 100 metri in 12 secondi, il secondo in 15 ed il terzo in 20 secondi. In un percorso circolare di 600 metri, da percorrere dieci volte, quante volte si vedranno passare contemporaneamente dal via, oltre al momento della partenza fatta assieme? e la prima volta che si rivedono passare assieme dal via, quanti giri ha già completato ciascuno di loro?

(170) Un foglio di carta dello spessore di un millimetro, viene piegato 50 volte su se stesso. Che spessore raggiungerà a termine di tale operazione?

[Sbalorditivo, vero?]

(171) Si narra che l'inventore degli scacchi, per farsi ricompensare dal principe indiano, del passatempo fornito, si sarebbe accontentato di chicchi di grano, uno per la prima casella della scacchiera, due per la seconda, quattro per la terza e così via raddoppiando per ogni casella successiva. Sapendo che la scacchiera è costituita da sole 64 caselle, quanto grano avrebbe dovuto donare il principe all'inventore? [19].

(172) Dimostrare che la relazione sulle coppie di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ data da

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \text{se e solo se} \quad a + d = b + c$$

è una relazione di equivalenza.

(173) Applicando la definizione, sommare le seguenti quantità:

$$+3 - (-2) + (+5) - (+10).$$

(174) Tramite operazioni tra classi, effettuare il calcolo:

$$9 - 10 + 1 + (5 \cdot (3 - 4)) - 6.$$

(175) Tramite definizione di classi ed operazioni tra esse, effettuare il calcolo:

$$+4 + (-5) - (+2) + (+3) + (-2) + (+1).$$

(176) Operando nel modo standard, calcolare l'espressione:

$$(3 - 5)^3 - (5 - 7 + 3 - 4)^2 + 3 - 1.$$

(177) Calcolare l'espressione:

$$(-2)^4 + (4)^2 - 8 + 7 - 6 + 5 + [3 - 4 \cdot (4 - 5) - 6]^3 + 2.$$

(178) Dire quanto vale l'espressione:

$$1 - 3 \cdot (2 - 3)^3 + 4 \cdot (3 - 4)^4 - [3 + 2 \cdot (-2 + 4)]\,.$$

(179) Calcolare l'espressione:

$$+2^4 - 2^2 + (-2)^4 + (-2)^5.$$

(180) Dire quanto vale l'espressione:

$$\{[(-1)^3]^4\}^5 \cdot \{[(+1)^2]^3\}^4.$$

[19] Nella "Divina Commedia" Dante si riferisce a tale leggenda quando, per descrivere il numero degli angeli nel Paradiso, scrive:

L'incendio suo seguiva ogne scintilla
ed eran tante, che 'l numero loro
più che 'l doppiar de li scacchi s'inmilla.

[Paradiso, XXVIII, 91-93]

(181) Utilizzando opportune messe e in evidenza e le regole delle potenze, valutare l'espressione:

$$\{(3^4 \cdot 3^5 - 3^6 \cdot 3^4) : (-3^4)\} : (-3)^5 + 3.$$

(182) Semplifica l'espressione:

$$[4 \cdot (-4+3)^3] : (2^2) - (5^3 \cdot 2^4) : (-10)^3 - 6.$$

(183) Calcola l'espressione:

$$(5^3)^4 : (-5^4)^3 + \{3 \cdot [(3^2 \cdot 4^2)^3] : (144)^2\} : 36 + (-10)^1 + 55^0.$$

(184) Calcola l'espressione:

$$[(-7^3)^5 : (-7)^{12}] : 7 + 14 + 3 \cdot [-10 \cdot (-4^3)^4 : (-4^4)^3].$$

(185) Calcola l'espressione:

$$[-(+3^4)^2 + (-3^3)^2] : (-3^6) + 2 \cdot [4 + 3 - (-3)] - 3 \cdot [-(-3^2)].$$

(186) Calcola l'espressione:

$$-\{-[-(-3)^1]^2\}^3 : \{-[+(-3)^3]^2\}^1.$$

(187) Calcola l'espressione:

$$[2^3 \cdot (-2)^4 : 2^5]^3 : [(-2)^5 : (-2)^2]^2.$$

(188) Una lumaca si muove di otto centimetri in avanti, costeggiando un muro, dopodiché torna indietro di tre centimetri. Successivamente si muove in avanti di nove centimetri ed, infine, di dieci centimetri indietro. Di quanto si è mossa rispetto al punto di partenza?

(189) Il termometro, ieri sera, indicava 5 gradi; nella notte la temperatura è scesa di dieci gradi e, nella mattinata, c'è stato un aumento di otto gradi. Se andassi a rilevare la temperatura, cosa leggerei?

(190) Un sottomarino si trova a quota 10 metri sotto il livello del mare; successivamente scende di altri 15 metri; risale di 2 metri, scende ancora, prima di 5 metri e poi di 10 metri; se alla fine sale di 25 metri a che quota si troverà il sottomarino?

(191) Nel mio giorno libero, prima spendo 23 euro per un regalo a mia figlia, poi passo il libreria e spendo 14 euro per un libro. Prelevo al bancomat 50 euro e passo in pizzeria, comprando due pizze da asporto e spedendo 11 euro. Quanti euro avevo in tasca all'inizio della giornata, se alla fine mi rimangono 42 euro?

Sull'insieme dei Numeri Razionali.

(192) Determinare la somma dei seguenti numeri razionali, attraverso la definizione:
$$\frac{1}{4}+\frac{5}{6}-\frac{3}{8}.$$

(193) Effettuare le operazioni indicate, passando attraverso la definizione di classi di equivalenza:
$$3\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{7}{6}\right)-\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right).$$

(194) Dalla definizione di numero razionale, definito tramite classi di equivalenza, calcolare la seguente espressione:
$$\left(\frac{3}{2}:\frac{1}{4}+2\right):\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{-1}{6}+\frac{1}{4}\right)-1.$$

(195) Determinare la rappresentazione decimale delle seguenti frazioni:
$$\frac{4}{5},\quad \frac{3}{20},\quad \frac{5}{12},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{5}{9},\quad \frac{3}{7},\quad \frac{11}{6}.$$

(196) Determinare la frazione generatrice, mettendone in risalto il metodo, dei seguenti numeri decimali periodici
$$3,\overline{12},\quad 0,0\overline{34}\quad 2,0\overline{13},\quad 4,2\overline{4},\quad 2,21\overline{12}\quad 4,1\overline{2345}.$$

Operando nel modo più semplice ed elegante possibile, effettua i calcoli nelle seguenti espressioni in $\mathbb{Q}$.

(197)
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{3}{4}-\frac{7}{10}+1.$$

(198)
$$\frac{2}{3}\cdot\left[1+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)+2\cdot\left(2-\frac{1}{6}\right)\right]-\frac{5}{6}.$$

(199)
$$1:4+\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{3}{4}-3:8\right)\cdot 16+\frac{3}{4}.$$

(200)
$$\left[\frac{1}{2}+\left(1+\frac{1}{3}\right)^2-\left(2+\frac{2}{3}\right)^3:\frac{8^2}{3}\right]-\left(\frac{8}{9}-\frac{1}{2}\right).$$

(201)

$$2:\left[2:(2:\frac{1}{2}):2\right]:2.$$

(202)

$$\left[2+\frac{5}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{\frac{4}{5}-2}:\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{3}+1\right):\left(2+\frac{1}{2}\right)\right]:2.$$

(203)

$$\left[\frac{1}{2+\frac{1}{2}}-\frac{\frac{9}{4}-\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{5}{6}\right)}{\frac{1}{5}:\frac{3}{10}+\frac{13}{36}}\right]:\frac{-2}{3}.$$

(204)

$$(-2,\overline{3}):(0,\overline{9})-\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}+3.$$

(205)

$$(-0,\overline{3})^{-3}:\left(\frac{9}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{2}{3}-1\right)+\frac{7}{6}.$$

(206)

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{-1}\cdot\left[(0,3)^2:\left(\frac{4}{10}\right)^2\right]\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{0,75}-(3,\overline{3}).$$

(207)

$$\left[(0,6)^2:\frac{9}{14}+1:(1,\overline{6})^2:\frac{9}{10}\right]:\left[\frac{3^2}{25}+(1+1,6)^2:11,2\overline{6}\right].$$

(208)

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}-\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}+\left(\frac{7}{4}-\frac{3}{2}-1\right)^2:\left(\frac{3}{4}\right)^3.$$

(209)

$$\left[1-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)^{-3}:\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right]^{-1}+\frac{14}{3}+1.$$

(210)

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{4}{3}}-1}\cdot\left(\frac{3}{4+\frac{-18}{2}}+1\right)^{-1}.$$

(211)

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}+\frac{2}{7}-1.$$

(212)
$$\left\{\frac{\left(\frac{13}{14}-\frac{11}{10}+\frac{1}{10}\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{7}\right)}{\left(1-\frac{13}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{3}{8}}\right\}^5+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{3}.$$

(213)
$$\left[(-0,5)^{-3}:\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\right]\cdot 10^{-2}+[(-1)^{-1}-1^{-1}+(-1)^{-2}-1^{-2}].$$

(214)
$$(-3)^{-1}-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}+\frac{5}{3}\cdot(-3)^{-2}+\frac{4}{9}\cdot(-3)^{-1}-(-3)^{-3}.$$

(215)
$$\frac{\left[\frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3}}{\frac{4}{3}}\right]^{-2}}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^{-2}:\left(\frac{4}{3}\right)^3}\cdot\frac{4^3}{3^{-3}}.$$

(216)
$$\frac{\left(1-\frac{1}{3}\right)^{-2}+\left(2+\frac{1}{3}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{4}-1\right)^{-2}}:\frac{1}{\left(3-\frac{1}{3}\right)^{-2}}.$$

(217)
$$\left(0,\overline{3}+1\right)^{-3}:\left(\frac{2}{3}+1\right)^3+(-0,5)^3+\frac{7}{8}.$$

(218)
$$\left[\frac{\left(\frac{1}{3}+1\right)^3}{\left(\frac{2}{3}+1\right)^3}-(-0,5)^3\right]\cdot\left(\frac{13}{8}\right)^{-1}:\frac{1}{5}.$$

(219)
$$\frac{1}{3^{-3}}\cdot\left[\frac{\frac{1}{2}-(-1,\overline{3})^{-2}+1}{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)^3}\right]^{-1}:\left(\frac{1-\frac{2}{3}}{8}\right)^{-2}-1$$

(220)
$$\frac{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^6:(0,5)^4\right]^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}-\left[-\left(\frac{3}{9}\right)^4:(0,\overline{3})^2\right]^2:\frac{1}{9}}{5,\overline{9}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)^2+[25:(-5)^3]^2}.$$

(221)
$$\frac{(-2^3)^3:(4)^2}{(-8)^2:(-2)^3}\cdot\frac{(2^2\cdot 2^{-4})^3}{\left[\left(-0,25-\frac{7}{4}\right)\cdot(-0,5)^{-2}\right]^{-2}}.$$

Relativi al Capitolo 10

Sui Problemi di Primo Grado.

(222) Un numero, sommato al suo triplo ed alla sua metà, dà come somma 18; che numero è?

(223) Dividi un metro in due parti, in modo che il doppio di una delle due equivalga ai due terzi dell'altra. Quanti centimetri è ogni parte?

(224) Aumentando un numero di 20, si ottiene lo stesso che triplicandolo. Di che numero stiamo parlando?

(225) Trovare il numero che aumentato di 5 e diviso per 6 dà come quoziente 30,

(226) La somma di due numeri dispari consecutivi è 160 : trovare gli addendi.

(227) Trovare due numeri consecutivi tali che la somma del doppio del minore con la metà del maggiore sia 8.

(228) Trovare il numero, la cui somma dei suoi primi quattro multipli è 40.

(229) Una frazione equivale a $\frac{4}{5}$ e la differenza tra denominatore e numeratore è 5. Trovare la frazione.

(230) Trova due numeri la cui somma è 40 e tali che la somma dei tre quarti del maggiore con un ottavo del minore sia 20.

(231) Al "brico", nel reparto "elettricità", un giorno si vende, dapprima, un terzo del rotolo di cavo bipolare piatto, poi la metà di quanto ne era rimasto e, successivamente ancora, sei metri. Se rimangono ancora dodici metri di cavo, quanti metri conteneva il rotolo all'inizio della giornata?

(232) Il pilone di un ponte è piantato in terra per i tre quinti della sua lunghezza; due metri sono sommersi nell'acqua di un fiume e tre decimi stanno fuori dall'acqua. Quanto è lungo il pilone?

(233) Da una cisterna d'acqua si toglie un terzo del suo contenuto, poi un decimo di quanto ne rimane e, infine, i rimanenti 30 litri. Quanto acqua era contenuta nella cisterna?

(234) Si ha un cesto con mele e pere: in tutto ci sono 75 frutti. Se togliessimo la metà delle mele ed i due terzi delle pere, nel cesto rimarrebbero tante mele quante pere. Quanti frutti di ciascun tipo contiene il cesto?

(235) Durante un viaggio organizzate a tappe, l'autista di un camion, avendo fatto "il pieno", annota sul diario i consumi. Nella prima tappa consuma un settimo del carburante messo in partenza e, nella seconda tappa, l'equivalente dei due noni di tutto il serbatoio. Nell'ultima tappa consuma 17 litri ed alla

fine del viaggio annota che ha ancora metà serbatoio. Quanti litri contiene il serbatoio del camion?

(236) Un padre ha, oggi, il triplo degli anni del figlio, mentre tra tredici anni ne avrà il doppio. Quanti anni hanno ora padre e figlio?

(237) Durante una prova di esame, un candidato impiega metà del tempo a scrivere il tema, un quarto a riscriverlo in "bella copia" ed un ottavo a rileggerlo, per correggere eventuali sviste. Consegna con mezz'ora di anticipo rispetto allo scadere del tempo che gli era stato concesso. Quanto tempo avrebbe avuto a disposizione?

(238) Una frazione diventa equivalente a due terzi, se si aggiunge 1 ad entrambi i suoi termini, mentre diventa equivalente a quattro terzi, se si aggiunge 3 al numeratore e si toglie 2 al denominatore. Di quale frazione stiamo parlando?

(239) Due treni partono contemporaneamente da due città e viaggiano in direzioni opposte. Calcola quanto tempo impiegano ad incontrarsi, sapendo che la distanza tra le due città è 125 km e che i due treni viaggiano con velocità media costante, rispettivamente, di 40 km/h e 35 km/h.

(240) In un cortile ci sono oche e galline. Il numero delle prime è tre quinti di quello delle seconde. Un cane fa scappare due oche ed i tre settimi delle galline e così restano tante oche quante galline. Quante erano, inizialmente, le oche e quante le galline?

(241) Sulla tomba di Diofanto compare il seguente epitaffio: "Diofanto passò nella fanciullezza la sesta parte della sua vita, la dodicesima nell'adolescenza, poi si ammogliò e, dopo di esserne trascorsa la settima parte più cinque anni ebbe un figlio, che visse la metà degli anni del padre e, il genitore, superstite, fu obbligato a piangerlo per quattro anni". A che età morì Diofanto?

(242) Calcolare il numero delle uova possedute da una contadina che ne vende prima la metà più mezzo uovo (senza romperne alcuno!), poi la metà delle uova rimaste più mezzo uovo ed infine la metà delle uova rimanenti più mezzo uovo.

(243) Quanto pesa un mattone che pesa un chilo in più di mezzo mattone?

(244) Ho fatto gli otto tredicesimi di un viaggio in aereo, i sette undicesimi della parte rimanente in treno e gli ultimi duecento chilometri in automobile. Quanto è stato lungo il viaggio?

(245) Una cisterna contiene acqua per quattro tredicesimi della sua

capacità. Versando nella cisterna settanta ettolitri di acqua, essa risulta piena per i due terzi. Calcola la capacità della cisterna.

(246) Erone di Siracusa fece fare una corona d'oro pesante 7465 gr. Per scoprire se l'orefice avesse sostituito dell'oro con dell'argento, chiese ad Archimede un modo per scoprire quanto oro ci fosse nella corona. Archimede immerse la corona nell'acqua e trovò che perdeva 467 gr. Sapendo che l'oro perde nell'acqua ogni 1000 gr, 52 gr del suo peso e che l'argento -ogni 1000 gr- ne perde 95, quanto oro e quanto argento Archimede misurò nella corona di Erone?

(247) Un uomo entrò in un orto nel quale si trovavano tre guardiani e fece provvista di arance. Calcolare il numero di arance raccolte sapendo che per uscire dall'orto, l'uomo dovette dare al primo guardiano la metà delle arance più due, al secondo la metà di quelle che gli rimanevano più due ed al terzo ancora la metà di quelle che gli erano rimaste più due! e così facendo, rimanendo con una sola arancia per sè.

(248) In una scuola, mettendo 9 allievi per banco, ben tre rimarrebbero senza posto; invece, mettendone 10 per banco, cinque posti rimarrebbero liberi. Quanti sono gli allievi e quanti i banchi?

(249) Si racconta che Policrate, tiranno di Samos, chiedendo a Pitagora quanti fossero i suoi allievi, ebbe la seguente risposta: "Sono tanti e distribuiti in modo che la metà studia Matematica, un quarto le scienze della Natura, un settimo si esercita nel silenzio e nella meditazione e, in più, ci sono anche 3 donne". Quanti erano gli allievi di Pitagora?

(250) Un padre ha due figli, il maggiore dei quali ha tre anni in più del minore. L'anno scorso l'età del padre era doppia della somma delle età dei due figli, mentre tra quindici anni il padre avrà un anno in meno della somma delle età dei due figli. Trovare le età dei tre ora.

(251) [20] Una donna stava risciacquando i piatti in un ruscello, quando un sorvegliante delle acque le chiede: "Come mai avete tanti piatti?" - "Perché in casa vi fu un banchetto" rispose la donna. Il funzionario chiese allora il numero dei commensali. -"Non lo so" replicò la donna - "so però che a due a due usavano un piatto per il riso, a tre a tre uno per il pane, a quattro a quattro uno per le vivande e i piatti erano in tutto 65".

[20] Sun Tsu, VI sec. a.C.

(252) [21] Un quinto di uno sciame di api si posa su un fiore di Kadamba, un terzo su un fiore di Silindha. Tre volte la differenza tra i due numeri volò sui fiori di un Kutujan, e rimase solo un'ape che si librò qua e là per l'aria, ugualmente attirata dal grato profumo di un Gelsomino e di un Pandamus. Dimmi tu, ora, qual era il numero delle api?

(253) [22] A Paola piacciono le ciliegie sotto spirito delle quali è così golosa che non sa proprio trattenersi. Un giorno le viene regalato un vaso di ciliegie preparato secondo una ricetta antica e sono talmente buone che il primo giorno ne mangia un terzo del totale, il secondo giorno un quarto del totale iniziale, il terzo giorno un quinto del totale. Al quarto giorno il vaso è calato in modo preoccupante e rimangono solo 13 ciliegie. Quante ciliegie vi erano all'inizio nel vaso? Quante ne ha mangiato in tutto Paola?

I seguenti problemi [23] sono tratti da *Elementi di Algebra* del sacerdote "Alessandro Casano" -pubblico professore nella R.Università di Palermo- Opera adottata dalla *Commessione di pubblica Istruzione* per le scuole di Sicilia, pubblicata dalla "tipografia reale di guerra" a Palermo nel 1833.

(254) In tre differenti scosse di terremoto, caddero la metà, la quarta parte e la dodicesima parte delle case di un villaggio, non restandone che 158 in piedi. Quante case c'erano prima del terremoto?

(255) C'è un numero composto di due cifre che, prese singolarmente, danno somma 7; ora, se si aggiunge 27 a quel numero, si ottiene un numero composto delle stesse cifre, ma scritto in ordine inverso. Quale numero è?

(256) L'età di un padre è 60 anni ed è quintupla di quella di suo figlio. Si cerca dopo quanti anni l'età del padre diventerà tripla dell'età del figlio.

(257) Un padre, essendo interrogato sull'età del figlio risponde: "Se dal doppio della sua età attuale si sottrae il triplo di quella di sei anni addietro, si ottiene la sua età".

(258) Un orefice ha due statue di oro ed un solo piedistallo. Il peso della minore è di 100 kg e con il piedistallo fa il peso di 3 volte la statua maggiore. Quest'ultima, con il piedistallo fa il peso di 2 volte la statua minore. Quanto pesa il piedistallo?

[21] Bhaskara, XII sec.

[22] "Quark" n.41 di Giugno 2004 a pagina 154

[23] Riscritti in linguaggio più moderno.

(259) Sei anni fa l'età di Tizio era il triplo di quella di Caio; tra sei anni diventerà doppia. Quanti anni hanno Tizio e Caio?

(260) Si cerca un numero, di cui la metà e la quinta parte sommate a 135, costituiscono lo stesso numero.

(261) Un ragazzo aveva comprato dei fiori pagando per una metà un soldo ogni due fiori e per l'altra metà, un soldo ogni tre fiori. Poi, per recuperare il suo denaro, pensò di rivenderli a due soldi ogni cinque fiori e così vi perdette un soldo. Si cerca il numero dei fiori comprati dal ragazzo.

Questi ultimi esercizi sono invece tratti da riviste di enigmistica o da olimpiadi di Matematica.

(262) Ad una cena partecipano 16 persone. Il conto finale è di 400 euro e gli uomini, 9 in tutto, decidono di pagare una quota doppia di quella delle donne. Quanto verserà ogni uomo?

(263) In un salvadanaio ci sono 20 monete, alcune da un euro ed alcune da due euro; se ci fossero quattro monete da un euro in più, il valore delle monete da un euro sarebbe lo stesso di quello delle monete da due euro. Quante sono le monete da un euro e da due euro?

(264) Con una certa quantità di vino si possono riempire 4 recipienti uguali, oppure 6 recipienti anche essi uguali ma della capacità di 12 litri inferiore ai precedenti. Trovare la quantità di vino.

(265) Ho delle caramelle che voglio distribuire in parti uguali fra un certo numero di bambini: però mi accorgo che se do 4 caramelle ciascuno mi avanzano 3 caramelle, mentre se do 5 caramelle ciascuno mi mancano 6 caramelle. Quante sono le caramelle e quanti i bambini?

(266) Un gelataio prepara 20 kg di gelato e lo rivende nel corso della giornata in coni piccoli da euro 1,20 di due palline e coni grandi da euro 1,60 di tre palline. Da ogni kg di gelato ha ricavato 12 palline; alla fine della giornata, ha incassato in totale euro 137,60. Quanti coni grandi ha venduto?

(267) La nonna Lucia ha portato un cestino con 120 ciliege ai suoi tre nipoti, Jacopo di 4 anni, Martino di 7 anni e Duccio di 9 anni. La nonna distribuisce tutte le ciliegie ai nipoti secondo questo criterio: dà a ciascun nipote un numero di ciliege ottenuto moltiplicando l'età del nipote per un certo fattore, e questo fattore è lo stesso per tutti e tre i nipoti. Quante ciliege vengono date a Jacopo?

(268) L'anno scorso la famiglia Pristem ha inaugurato una nuova attività e si è messa ad allevare struzzi ed elefanti. La signora

Pristem dice: “Sono proprio contenta perché, con le nascite di quest’anno, nel nostro allevamento posso contare 35 teste e 116 zampe!”. Quanti sono gli struzzi e gli elefanti allevati dalla famiglia Pristem?

(269) Se il drago rosso avesse 6 teste in più del drago verde, essi avrebbero in totale 34 teste. Ma il drago rosso ha 6 teste meno del drago verde. Quante teste ha il drago rosso?

(270) Ieri Anna si è pesata con lo zainetto in spalla: la bilancia segnava 45 kg. Oggi pesa 53 kg, ma il suo zainetto è tre volte più pesante di quello del giorno prima. Quanti chilogrammi pesa Anna (sapendo che il suo peso tra ieri e oggi è rimasto lo stesso)?

(271) Aldo oggi compie gli anni e i parenti si riuniscono per festeggiarlo. Sua zia Bruna, che non lo vede da tempo, esclama “Ma come sei diventato alto!!”. Aldo risponde: “Lo sai, zia? La mia statura, in centimetri, è dodici volte la mia età, ma tre anni fa ero alto tredici volte la mia età. Eppure sono cresciuto di 24 centimetri”. Quanti anni ha compiuto Aldo?

Relativi al Capitolo 11

Sulle operazioni tra Polinomi e Fattorizzazione. Effettuare le operazioni tra polinomi:

(272)
$$(2ax + 3bx^2 + c) - (ax^2 + bx - c) + (1 - 3bx^2).$$

(273)
$$2a(b - a) + 2b(a - b) + 4ab.$$

(274)
$$(a + 1)^2 - (a - 1) \cdot (a + 1).$$

(275)
$$2(x + 2y)^2 - 8xy - (x - y) \cdot (x + y).$$

(276)
$$3a + 2b + c - 3(a + b + c) + (b - 2c) + 4c(1 + a).$$

(277)
$$(x + y)^2 - (x - y)^2 - 2xy.$$

(278)
$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) + 3xy(x + y) - (x + y)^3 + 2y^3.$$

(279)
$$(x^2y + 4ax)z - x^2yz - 4(ax + y)z + 2x(2a)(1 - z).$$

(280)

$$(x^3 - 4x^2 + x) : (2x) + 2x(2x + x^2 + 1) - \frac{1}{2}.$$

(281)

$$(1 + x^2)^2 - (x - 1)(x + 1) - x^2 + (x^2 + 1)(1 - x^2).$$

(282) Effettuare la divisione indicata qui di seguito:
(a) $(3x^4 + 2x^3 - x + 1) : (x^2 - x + 1)$.
(b) $(4x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 1) : (2x^3 - 3x + 2)$.
(c) $(x^3 + x^2 + x + 1) : (3 - 2x + 4x^2)$.
(d) $(3x^3 + 2x^2 - 5x^6 + x) : (2 - x + x^2)$.
(e) $(4x^5 - x^3 + 2x^2 + 4) : (x^3 - 3x + 1)$.

(283) Dire quanto vale il resto della divisione indicata qui di seguito, senza effettuare l'operazione stessa. Successivamente verificare, effettuando la divisione, il risultato ottenuto:
(a) $(x^3 - 3x + 1) : (x - 2)$.
(b) $(2x^4 - 3x^2 - x + 2) : (x - 1)$.
(c) $(x^3 + 4x^2 + 2) : (x + 3)$.
(d) $(2x^2 - x + 5) : (x + 1)$.
(e) $(4x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 1) : (x + 1)$.

(284) Si scomponga in fattori irriducibili il seguente polinomio:
(a) $2x^3 + x^2 - 13x + 6$
(b) $3x^3 + x^2 - 8x + 4$
(c) $3x^4 - 4x^3 - 29x^2 - 14x + 8$
(d) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4$
(e) $x^5 - x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 4$

(285) Si semplifichino le seguenti frazioni [24]:
(a)

$$\frac{3x^2 - 4x + 1}{2x^2 + 7x - 9}$$

(b)

$$\frac{x^2 - 22x - 23}{5x^2 + 9x + 4}$$

(c)

$$\frac{9x^2 - 1}{3x^2 - 4x + 1}$$

(d)

$$\frac{3 - 10x + 3x^2}{3 - 16x + 5x^2}$$

[24] Occorre fattorizzare i polinomi presenti al numeratore ed al denominatore ed eliminare i fattori uguali...

(e)
$$\frac{(x^2-x-6)(8x^2-26x+6)}{(x^2+x-2)(4x^2-13x+3)}$$

Relativi al Capitolo 12

Sulle Equazioni di Secondo Grado.

(286)
$$x(2x+1)-3=2(x-1)^2+x+1.$$
(287)
$$4(x-1)+2x+3=x(x-1)-(x-1)(x+2)-3.$$
(288)
$$(x-2)^2-(x+2)^2=2x-3.$$
(289)
$$\frac{1}{4}x+\frac{2x}{3}-1=\frac{1}{6}(x-1).$$
(290)
$$(x-3)^2+x-\frac{3}{4}=x(x-2)+\frac{x}{4}-\frac{1}{4}.$$
(291)
$$\frac{x-1}{3}+\frac{2x+3}{4}=x-5.$$
(292)
$$x(x-1)(x+1)+3=x(x^2-2)+5.$$
(293)
$$\frac{1}{8}x+1-\frac{2x+3}{4}=\frac{x}{4}+\frac{2-x}{2}.$$
(294)
$$(x-4)^2+3x-1=(x+2)^2-x+4.$$
(295)
$$(x-1)(x^2+x+1)-(x^2-1)(x+1)=(1-x)(1+x)+3.$$
(296)
$$(x-3)^3+(x-2)^2=x(x-4)^2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}.$$
(297)
$$\frac{x^2-4}{2}+\frac{x}{4}-1=\frac{1}{2}\cdot x\cdot(x-3)+(x-1)\cdot(x-2)-(x+1)^2.$$
(298)
$$(x-1)^4+2x-\frac{3}{2}=x^4+\frac{5}{2}-4x^3+2x(3x-2).$$

(299)
$$(x^2-3x)^2+(1+2x-x^2)^3-(x+1)\cdot(x^2+3x+4) \quad + \\ +(x-1)^6=7x^4-30x^2(x+1)+2-x^3+59x^2.$$

Risolvi le seguenti equazioni (letterali), considerando i parametri diversi dall'incognita x come numeri generici.

(300)
$$(x-a)^2+3ax+2=(2a-x)^2+1.$$

(301)
$$\frac{x+a}{3a}+\frac{x-a}{a}=2.$$

(302)
$$\frac{x-1}{1-c}-\frac{x-1}{1+c}=\frac{2x}{1-c^2}.$$

(303)
$$\frac{x}{a}-\frac{x-1}{b}=\frac{1-x}{1-a}+\frac{1-a}{b}.$$

(304)
$$ab\left[\frac{1}{a-b}\left(\frac{x}{b}-\frac{x}{a}\right)+\frac{x-a}{b}-\frac{x-b}{a}\right]=a+b.$$

(305)
$$\frac{a+x}{(a-2)^2}-\frac{1}{a-3}+\frac{3+x}{a^2-5a+6}=0.$$

[Hint: Si osservi che $a^2-5a+6=(a-2)\cdot(a-3)$.]

Risolvi le seguenti equazioni (fratte di primo grado), fruttando la definizione di equivalenza tra frazioni e verificando che le soluzioni siano accettabili.

(306)
$$\frac{x-1}{2x+3}=\frac{3}{2}.$$

(307)
$$\frac{x-1}{2x+3}=\frac{x+1}{1+2x}.$$

(308)
$$\frac{4}{3+x}=\frac{5}{x+1}.$$

(309)
$$2+\frac{1}{x-1}=\frac{4x}{2x+1}.$$

(310)
$$\frac{x}{3x-2}=\frac{4}{5}.$$
(311)
$$\frac{x+1}{2x+2}-\frac{x+3}{4-4x}=\frac{11}{4}.$$
(312)
$$1-\frac{4x}{2x+1}=\frac{x-1}{1-x}.$$
(313)
$$\frac{5}{n+1}=3n-\frac{3n^2-2n}{n+1}.$$
(314)
$$\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{t}\right)+\frac{3}{2}\left(1-\frac{3}{t}\right)-1=0.$$
(315)
$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{3}}:\frac{a^2+3a}{3a-9}-\frac{a}{3}+\frac{2a-3}{6}=2.$$
(316)
$$\frac{2s+1}{s+1}-\frac{5}{s-1}=\frac{2}{s^2-1}.$$
(317)
$$\frac{x}{2x+6}=\frac{1}{2}+\frac{x+1}{x+3}.$$
(318)
$$\frac{w-3}{w+1}+5\frac{2w-1}{w+1}=0.$$
(319)
$$1+\frac{x}{x+3}=3-\frac{3x}{x+3}.$$
(320)
$$\frac{x^3}{x+8}=(x-4)^2.$$
(321)
$$\frac{2x-1}{x-1}+\frac{3x+2}{x+1}=5.$$
(322)
$$x+\frac{2x}{x+1}=\frac{x^2-3}{x+1}.$$

(323)
$$\frac{2t^2-6}{t^2}-1-\frac{3}{t}=\frac{t+3}{t}.$$
(324)
$$\frac{3}{a+1}-\frac{10}{a-1}=\frac{27}{1-a^2}.$$
(325)
$$\frac{1}{2}-\frac{7}{z-1}=\frac{3}{2}-\frac{3}{z-1}.$$

(326) Si risolvano le seguente equazioni di secondo grado:
(a) $\frac{1}{3}(4x^2-1)-\frac{1}{5}(3x^2+8)-1=0$
(b) $3-2x^2+2x=2x+x^2$
(c) $\left(\frac{x+1}{2}+x\right)\cdot\left(\frac{x-1}{2}+x\right)=\left(\frac{3x+2}{2}+x\right)\cdot\left(\frac{3x-2}{2}+x\right)$
(d) $(x-2)(x-3)-3(x+2)=0$
(e) $(x-1)^2=(x+1)^2+x^2$
(f) $\frac{x-2}{6}x+\frac{x^2-2x}{3}=\frac{x^2+1}{2}+\frac{x^2-1}{2}.$
(g) $2+\left(\frac{4}{3}x-1\right)\left(\frac{5}{3}-x\right)=\frac{1}{3}(2x-1)^2-\frac{7x}{9}$
(h) $2(x^2+3x)-4(x+1)=3x^2-7$
(i) $(x-9)(x+8)+52=0$
(j) $\frac{1}{5}x^2-\frac{2}{3}x=\frac{x+5}{6}$
(k) $x+x^2-\frac{x-5}{3}-\frac{5-x}{4}=\frac{2x+1}{6}+\frac{4x-3}{3}+3\frac{x^2+x}{4}$
(l) $(x-1)(x+1)-\frac{1}{2}(x-1)(x+3)=\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}x^2$
(m) $\frac{1}{8}(3x^2+2x)+\frac{1}{6}(2x+1)=\frac{1}{4}(x^2+2x+2)$
(n) $8(2x^2+1)-3(x^2-2x+16)=24$
(o) $\frac{\frac{5}{6}x^2+9}{5}=\frac{3(x^2+1)}{10}+\frac{\frac{25}{2}-x}{15}$

(327) Nel prossimo gruppo di esercizi, si chiede di ragionare profondamente sulle relazioni tra le soluzioni dell'equazione di secondo grado ed i coefficienti del polinomio dato: si chiede di discutere sulle cosiddette **equazioni parametriche.**
(a) Data l'equazione $x^2-2(a+1)x-(a-1)=0$, per quale valore del parametro a l'equazione ha soluzioni coincidenti? e per quale valore una delle soluzioni prende valore 2?
(b) Data l'equazione $8kx^2-2(3k-2)x+k-1=0$ determinare il valore del parametro k in modo che si abbiano due soluzioni reali e coincidenti; oppure soluzioni opposte od, infine, soluzioni reciproche.
(c) Data l'equazione $x^2+(m-2)x+(m-1)=0$ determinare il valore del parametro m in modo che la somma delle soluzioni sia 3; oppure che il loro prodotto sia 8. Quando

si ha che la somma dei quadrati delle due soluzioni è pari ad uno?

(d) Data l'equazione $(2k-1)\,x^2 - 2k\,x + 1 = 0$, si determini per quale valore del parametro si ha una soluzione dell'equazione doppia dell'altra; oppure quando una di esse assume valore 2. Ci sono valori di k per i quali la somma delle soluzioni dell'equazione sia uno? Per quale valore del parametro una soluzione è reciproca dell'altra?

(e) Data l'equazione $(2m-1)x^2-(4m-3)x+2m-3=0$, si determini il valore del parametro m in modo che una soluzione dell'equazione valga $-\frac{1}{2}$. Quando si ha che la somma dei reciproci delle soluzioni dà 3? e che la somma delle soluzioni dia valore $\frac{2}{3}$? si hanno valori di m per i quali la somma dei quadrati delle due soluzioni dell'equazione dà valore 2?

(328) Si risolvano le seguenti equazioni di grado superiore al secondo:

(a) $12x^3 - 31x^2 - 17x + 6 = 0$
(b) $12x^4 + 5x^3 - 14x^2 - 5x + 2 = 0$
(c) $2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 9x - 6 = 0$
(d) $x^5 - 12x^3 - 2x^2 + 27x + 18 = 0$
(e) $x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 14x^2 - 3x + 18 = 0$
(f) $3x^4 - 9x^3 + 7x^2 - 3x + 2 = 0$
(g) $x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 18x - 27 = 0$
(h) $4x^4 + 12x^3 - x^2 - 27x - 18 = 0$
(i) $4x^5 - 29x^3 + 24x^2 + 7x - 6 = 0$
(j) $2x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 8x^2 + 12x = 0$

(329) Si risolvano le seguenti equazioni fratte:

(a)
$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x+3}{2x-1}$$

(b)
$$\frac{x+3}{x+7} = \frac{2x-1}{x+1}$$

(c)
$$\frac{x-2}{1-2x} + \frac{x}{x-2} = \frac{x-1}{2x^2-5x+2}.$$

(d)
$$\frac{x-2}{x+1} - \frac{x}{1-x} = \frac{x+11}{x^2-1}$$

(e)
$$\frac{x}{(x-3)(x+3)} - \frac{1}{x^2+3x} + \frac{3}{6x+2x^2} = 0$$
(f)
$$\frac{3}{x^2-9} - \frac{3}{2x^2+6x} = \frac{1}{x^2-6x+9}.$$
(g)
$$\frac{1-2x}{x^2-5x+6} = \frac{2+2x}{x^2-2x-3}$$
(h)
$$\frac{2(2-4x)}{x^2-2x-3} - \frac{2x-1}{x+1} = \frac{x-2}{x-3}.$$
(i)
$$\frac{3}{2(8x^2-2)} + \frac{1}{8x^2-8x+2} = \frac{2}{8x^2+8x+2}.$$
(j)
$$x + \frac{1}{x} - \frac{x-1}{x+3} = \frac{2x}{x+1}.$$

(330) Si risolvano, riconducendo a forme note, tramite opportune trasformazioni, le seguente equazioni:
(a) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$
(b) $(x+1)^4 - 2(x+1)^2 + 1 = 0$
(c) $3x^6 + 2x^3 - 5 = 0$
(d) $(x^4 + 4x^2)^2 + x^4 + 4x^2 - 3 = 0$
(e) $x^12 - 9x^6 + 20 = 0$

(331) Equazioni reciproche: In quest'ultimo gruppo di esercizi trattiamo alcuni tipi molto particolari di equazioni di grado superiore al secondo, dando indicazioni di come si perveniene alla soluzione delle stesse. Esse vengono denominate *equazioni reciproche,* poiché si sa, in anticipo, che ammettono almeno una coppia di soluzioni l'una reciproca dell'altra. Si risolvono tutte con la stessa tecnica, indicata negli esercizi appresso.
(a) Reciproca di terzo grado, prima specie, forma standard:
$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0.$$
Risolvere l'equazione $2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0.$

[Hint: Per il teorema di Ruffini si individua che $(x+1)$ è un fattore...]

(b) Reciproca di terzo grado, seconda specie, forma standard:

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0.$$

Risolvere l'equazione $5x^3 + x^2 - x - 5 = 0$.

[Hint: Per il teorema di Ruffini si individua che $(x - 1)$ è un fattore...]

(c) Reciproca di quarto grado, prima specie, forma standard:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + c = 0.$$

Risolvere l'equazione $3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$.

[Hint: Si divide tutto per x^2, mettendo in evidenza per coefficienti uguali. Poi si chiama $\left(x + \frac{1}{x}\right) = t$ ...]

(d) Reciproca di quarto grado, seconda specie, forma standard:

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0.$$

Risolvere l'equazione $5x^4 + 3x^3 - 3x - 5 = 0$.

[Hint: Per il teorema di Ruffini si individua sia $(x - 1)$ che $(x + 1)$ come fattore...]

(e) Reciproca di quinto grado, forma standard:

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Risolvere l'equazione

$$x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 3x + 1 = 0.$$

[Hint: Per il teorema di Ruffini si individua $(x \pm 1)$ come fattore, riconducendo ad uno dei casi precedenti...]

Sulle Espressioni con Radicali.

(332) Si semplifichino le seguenti espressioni:

(a) $\sqrt{8} \cdot (2\sqrt{6} - 3\sqrt{2}) + 5\sqrt{18} - 2\sqrt{2} - 7\sqrt{3}$.

(b) $\frac{3}{5} - \left[\frac{2}{3}(\sqrt{3} - \sqrt{7}) - \frac{8}{3} + \frac{1}{5}(\sqrt{3} - \sqrt{7})\right] + \sqrt{3} + \sqrt{7}$.

(c) $(\sqrt{a} + 1)(a + 1 - \sqrt{a}) + (a\sqrt{a} + 1)^2 - a^3 - 2a\sqrt{a}$.

(d) $\sqrt{50} + 2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{72} - 5\sqrt{2}) + \sqrt{24} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{3})$.

(e) $\sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[4]{27 \cdot \sqrt[5]{3^4}}}$.

(f) $(\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + 2\sqrt{6}$.

(g) $\sqrt{2^3 \cdot \sqrt{2\sqrt{2}} : 4\sqrt[4]{8}}$.

(h) $\sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x\sqrt{x}} \cdot \sqrt[4]{x^3 \cdot \sqrt{x}}}{\sqrt{\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[8]{x}}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{\sqrt{x}}}$.

(i) $\frac{\sqrt{27}}{10}(a+b)+2\sqrt{3(a+b)}-\left[\frac{3}{5}\sqrt{3a+3b}+\right.$
$$\left.-\frac{2}{3}(a+b)\sqrt{3}-\sqrt{3\cdot\sqrt{a+b}}\right]-\frac{3}{2}(a+b)\sqrt{3}.$$

(j) $xy\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{2x^2+1}{y^2}}-\sqrt{\frac{6x^2+3}{x^2y^2}}\right).$

(333) Razionalizza i denominatori e semplifica le espressioni:
- (a) $\frac{2\sqrt{3}-6}{\sqrt{6}}.$
- (b) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{21}}{\sqrt{3}}.$
- (c) $\frac{5+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}.$
- (d) $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}-\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}.$
- (e) $\frac{3}{\sqrt{3}-2}+\frac{4}{\sqrt{3}+2}.$
- (f) $\frac{15}{2\sqrt{3}+1}-\frac{5}{3-2\sqrt{3}}.$
- (g) $\frac{\sqrt{7}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}-\frac{2}{\sqrt{3}-1}.$
- (h) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}+1}.$
- (i) $\left[\frac{4}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}-\frac{2}{5+2\sqrt{6}}\right)}-\frac{1}{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}\right]^2-\frac{4}{3(5+2\sqrt{6})}.$
- (j) $\left(\frac{\sqrt{ab}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):\frac{a\sqrt{b}}{(a-b)\sqrt{a}}-\frac{1}{b\sqrt{a}}.$

(334) Determina il valore dei seguenti radicali doppi, come somma di due numeri reali.
- (a) $\sqrt{6+\sqrt{20}}.$
- (b) $\sqrt{3+\sqrt{5}}.$
- (c) $\sqrt{7+\sqrt{40}}.$
- (d) $\sqrt{8-\sqrt{15}}.$
- (e) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}.$
- (f) $\sqrt{9+2\sqrt{14}}.$
- (g) $\sqrt{15-10\sqrt{2}}.$
- (h) $\sqrt{\frac{9}{2}+\sqrt{8}}.$
- (i) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}.$
- (j) $\sqrt{7-\sqrt{24}}.$

(335) Si risolvano le seguenti equazioni (a coefficienti irrazionali):
- (a) $(1-\sqrt{3})^2\,x-\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})x.$
- (b) $3(x-\sqrt{3}+1)+x(2\sqrt{3}-1)=5-x\sqrt{3}.$
- (c) $2\sqrt{2}\,x-5=\sqrt{2}(\sqrt{2}+2\sqrt{5})-x\sqrt{5}-2.$

(d) $\frac{3}{4\sqrt{2}+2}+\frac{x}{2\sqrt{2}+1}=\frac{2x-1}{2\sqrt{2}-1}-\frac{8}{7}$.
(e) $\frac{\sqrt{6}+2}{x-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{3}-x}-\sqrt{2}$.
(f) $\frac{x+\sqrt{2}}{x}=1+\frac{\sqrt{2}+x}{x^2-x\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}-x}$.
(g) $\sqrt{3}\left(\frac{1}{x^2-x\sqrt{3}}+\frac{1}{x^2+x\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{x^2-3}$.
(h) $\frac{x-\sqrt{2}}{x-2\sqrt{2}+2}=\frac{4\sqrt{3}x}{x-2}+\frac{x+\sqrt{2}}{x-2\sqrt{2}+2}$.
(i) $\frac{x+2}{\sqrt{2}-1}-\frac{x\sqrt{3}-5}{4}=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}x$.
(j) $\frac{2x}{x+\sqrt{3}}-1=\frac{2-x}{\sqrt{3}+2}$.

(336) Si risolvano le seguenti equazioni irrazionali:
(a) $\sqrt{x-1}=4$.
(b) $\sqrt{2-x}-\sqrt{x}=0$.
(c) $\sqrt[3]{x^3-3x^2+7x-5}=x-1$.
(d) $\sqrt{x^2+8}-\sqrt{8-4x}=x$
(e) $\sqrt{4x+6}+\sqrt{6x+4}=\sqrt{6x}+\sqrt{4x+10}$.
(f) $\frac{\sqrt{x+5}}{4+\sqrt{x}}=\frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.
(g) $\frac{x+\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1}-\frac{5}{3}=0$.
(h) $\frac{1}{2+\sqrt{x}}+\sqrt{x}=2$.
(i) $\sqrt{\frac{x+4}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{x+4}}-\frac{3}{2}=0$.
(j) $\frac{1}{\sqrt{4x}}+\frac{1}{\sqrt{4x+9}}-\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4x^2+9x}}=0$.

Relativi al Capitolo 13

Sui Problemi di Secondo Grado.

(337) Una signora ha 24 anni quando nasce il suo primo figlio. Tra quanti anni, se si moltiplicano le età della madre e quella del figlio, il risultato è pari al triplo del quadrato dell'età del figlio?
(338) La somma dei quadrati di due numeri pari, naturali e consecutivi è 52. Quali sono questi numeri?
(339) Una comitiva di amici organizza una cena, accordandosi con il ristoratore, per un conto di $480,00$ euro. Saputa la notizia, si aggiungono alla comitiva altre cinque persone: la quota di partecipazione diminuisce così di $4,80$ euro (a partecipante). Quante persone erano previste, inizialmente, per la cena?
(340) Si raccolgono $200,00$ euro, facendo una colletta a cui ognuno partecipa versando una stessa quota. Dato che si aggiungono altre due persone, a ciascuno dei partecipanti si restituiscono $5,00$ euro. Quanti sono, alla fine, i partecipanti alla colletta?

(341) Un tizio dispone 180 vasetti su un tavolo, in file composte tutte dallo stesso numero di vasetti. Se avesse messo 40 vasetti in più su ciascuna fila, il numero totale delle file sarebbe diminuito di 6. Quante file ha utilizzato?

(342) La compagnia di distribuzione dell'energia elettrica posiziona dei pali lungo una strada. Aumentando di 10 mt la distanza tra due pali consecutivi, avrebbe risparmiato di mettere cinque pali per ogni Km di strada. Quanti pali sta piantando per Km di strada, alla distanza attuale?

(343) La radice quadrata dell'età che un bimbo avrà tra tre anni è uguale all'età che egli aveva tre anni fa. Quanti anni ha ora il bambino?

(344) Trova due numeri naturali la cui somma è 17 ed il cui prodotto è 60.

(345) Determina due numeri la cui somma dei quadrati è 180 e stanno tra loro come otto a quattro.

(346) La somma delle età di due fratelli è 15 e tra un anno il loro prodotto è 60. Che età hanno ora i fratelli?

(347) Determina due numeri positivi sapendo che il loro prodotto si ottiene indifferentemente sia dividendo per sei la loro somma, sia dividendo per due la loro differenza.

(348) L'età di Luca è oggi il quadrato dell'età di Vittorio e fra quattro anni sarà il quadruplo. Quanti anni hanno ora Luca e Vittorio?

(349) Mi reco in un negozio di golosità per comprare delle caramelle da regalare alle mie figlie. Con 12 euro prendo un certo numero caramelle al latte oppure 8 in meno di caramelle al miele, che costano 25 centesimi in più l'una. Quanto costa una singola caramella di ciascun tipo?

(350) Il costo di affitto d'un pullman, per effettuare una escursione di un giorno, è di 180 euro, da dividersi in parti uguali tra tutti gli escursionisti. Due partecipanti decidono, all'ultimo minuto, di non partecipare più, per cui la quota individuale dei rimanenti partecipanti aumenta di un euro, rispetto a quella che avrebbero versato se avessero partecipato tutti. Quanti sono gli escursionisti che hanno, alla fine, partecipato alla gita?

(351) Sedici pacchetti di mentine costano tanti euro quanti sono i pacchetti che si riescono a comprare con un euro. Quanto costa un pacchetto di mentine?

I seguenti cinque problemi vengono tratti dal libro "Elementi di Algebra" del sacerdote Alessandro Casano, 1833. già citato in altre parti *della presente opera.*

(352) Due operai lavorano in una fabbrica ed hanno salari diversi: il primo, essendo stato pagato per il lavoro di un certo numero di giorni, ha ricevuto 96 tarì [25]; il secondo, per sei giorni di meno, tarì 54. Se questi avesse travagliato tutti i giorni e l'altro sei giorni di meno, avrebbero tutt'e due ricevuto la medesima somma. Si domanda quanti giorni ciascuno ha lavorato ed il salario della rispettiva giornata.

(353) Un giocatore aveva tarì 160, di cui perdette una porzione nella prima partita, poi avendo guadagnato, nella seconda, tarì 6298, non solo recuperó i tarì perduti, ma di più ne guadagnò tanti ch'eguagliarono precisamente 'l prodotto dei tarì perduti con quelli rimastigli dopo la prima partita. Si cerca la perdita nella prima partita.

(354) L'esercito di un generale condotto all'assedio di una città formava un quadrato perfetto; ma per una improvvisa sortita fatta dagli assediati, essendo rimasti uccisi sul campo i soldati di sei file intere di un fianco, gli assedianti si ridussero a 13680 uomini. Di quanti uomini era composto l'esercito?

(355) Un generale vorrebbe disporre un corpo di truppe in battaglione quadrato, ma nella prima disposizione trova di più un numero a di soldati, ed aggiungendo un uomo a ciascuna fila, ne trova b di meno. Quanti soldati ha il generale? [Applicazione nel caso $a = 124$, $b = 129$]

(356) Si fece un convito che costò tarì a; un numero m di convitati ricusarono di pagare la loro porzione, ciò che produsse l'aumento di tarì b nella parte degli altri. Si cerca il numero de' convitati. [Applicazione nel caso $a = 342$, $m = 3$, $b = 19$]

Riprendiamo con problemi di natura geometrica.

(357) Prolunga i lati di un quadrato di lato 12 unità, tutti da uno stesso verso, di un segmento x. Congiungendo gli estremi di questi segmenti aggiunti si ottiene un altro quadrato di area 288 unità quadrate. Quanto era lungo ciascun prolungamento?

(358) In un cerchio di diametro AB condurre una corda AC in modo che la sua proiezione sul diametro sia AH pari a cinque

[25] Moneta in circolazione nel Regno delle due Sicilie nella prima metà dell'ottocento, introdotta addirittura dagli arabi in Sicilia verso il 913 d.c..

ottavi del raggio. Calcola l'area del triangolo ABC misurata tramite il quadrato del raggio della circonferenza.

(359) Determina la lunghezza dei lati di un triangolo rettangolo di area 18 unità quadrate e perimetro $12\sqrt{3}$ unità lineari.

(360) In un trapezio rettangolo la base maggiore supera la minore di quindici unità; la somma della base maggiore e del lato obliquo è 42 unità. Sapendo che l'altezza, sommata ai tre mezzi della base minore misura 23 unità, determina il perimetro del trapezio.

(361) Determinare la lunghezza delle basi di un trapezio isoscele circoscritto ad un cerchio di raggio r, sapendo che la loro somma è $5\,r$.

(362) Un trapezio $ABCD$ è circoscrivibile; la base maggiore AB è lunga 48 unità. Calcola il raggio della circonferenza inscritta, sapendo che BC è il doppio di CD e che AD è il triplo di CD.

(363) Inscrivere in una semicirconferenza di raggio r un triangolo rettangolo, in modo che un suo cateto abbia la proiezione sull'ipotenusa pari a $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ di se stesso.

(364) Due corde di una circonferenza di raggio r, parallele tra loro, hanno l'una lunghezza pari al raggio e l'altra uguale ai due quinti del raggio stesso. Quanto distano tra loro?

(365) Si può inscrivere in un triangolo equilatero, di lato 3 unità, un rettangolo, con la diagonale lunga 2 unità, in ben due modi: dire quanto deve essere lunga la base di tali rettangoli.

(366) Se il perimetro di un triangolo rettangolo è 12 unità e l'altezza relativa all'ipotenusa misura $\frac{12}{5}$, dell'unità, quanto sono lunghi i lati del triangolo?

(367) La somma delle diagonali di un rombo misura 70 unità ed il raggio del cerchio inscritto 12 unità. Quanto sono lunghe le diagonali del rombo?

(368) Un trapezio ha basi di 15 e 9 unità, mentre la sua altezza è di 12 unità. A che distanza dalla base maggiore va condotta una parallela alle basi, in modo che il trapezio venga diviso in due figure equivalenti?

(369) Un rettangolo ha un lato di 20 e l'altro di 35 unità. Se si aumenta il lato corto di una certa quantità e si diminuisce di tre volte tanto il lato maggiore, l'area del rettangolo ottenuto è di 200 unità quadre minore dell'area del rettangolo di partenza. Di quanto è stato aumentato il lato corto?

(370) In un cerchio di raggio 20 unità è inscritto un rettangolo la

cui differenza tra i lati è di 8 unità. Trovare la misura dei lati del rettangolo.

(371) In un triangolo rettangolo la proiezione del cateto maggiore sull'ipotenusa è congruente al cateto minore; l'altezza relativa all'ipotenusa misura 5 unità. Quanto sono lunghi i lati del triangolo?

(372) Due circonferenze concentriche hanno raggi rispettivamente lunghi 17 e 25 unità. Si traccia una retta che interseca le due circonferenze staccando due corde, una per ciascuna circonferenza, che stanno tra loro nel rapporto di due a cinque. Quanto dista la retta dal centro delle circonferenze? Quanto sono lunghe le corde?

(373) Un triangolo isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio 48 unità ed ha area di 480 unità quadrate. Calcola la lunghezza della base e dell'altezza del triangolo.

(374) Un trapezio ha altezza pari a 18 unità ed è equivalente ad un rettangolo che abbia come dimensioni le basi del trapezio stesso. Sapendo che il triplo della base minore sommato alla base maggiore dà il quadruplo dell'altezza, trovare le misure delle basi del trapezio.

(375) Si fissi su una semicirconferenza di diametro $2r$ un punto M in modo tale che, detta P la proiezione di M sul diametro AB, si abbia $AP + PM = PB$.

(376) Un trapezio rettangolo ha le diagonali perpendicolari tra loro. Se l'altezza del trapezio è l'unità e la somma della basi è $\frac{5}{2}$, trova la lunghezza dei lati.

(377) In un triangolo isoscele circoscritto ad un cerchio di raggio r, il rapporto tra base ed altezza è $\frac{8}{3}$. Dire quanto è lunga la base.

(378) Un triangolo rettangolo ha area 24 unità quadrate e la mediana relativa all'ipotenusa misura 5 unità. Quanto sono lunghi i cateti?

(379) Trova l'altezza di un triangolo isoscele sapendo che i raggi dei cerchi, inscritto e circoscritto sono rispettivamente 100 e 18 unità.

(380) Ad una semicirconferenza di raggio unitario, si circoscriva un trapezio isoscele di perimetro 6 unità. Se ne determinino i lati.

(381) In un rettangolo il perimetro è 34 unità e le diagonali 13. Calcola le dimensioni del rettangolo.

(382) In un cerchio di raggio r si inscriva un triangolo rettangolo, la

cui somma dei cateti sia i $\frac{7}{3}$ del raggio. Determina le misure dei lati del triangolo.

(383) Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa lunga 185 unità; se si diminuiscono entrambi i cateti di 4 unità, la superficie diminuirebbe di 506 unità quadrate. Calcola la misura dei cateti.

(384) Determina i lati di un rettangolo $ABCD$ sapendo che il raggio della circonferenza passante per i vertici A e B, tangente al lato CD, è r e che il perimetro del rettangolo è $4r$.

(385) In un triangolo rettangolo la somma dei cateti misura 70 unità e la somma dell'ipotenusa con l'altezza ad essa relativa misura 74 unità. Determina i lati del triangolo.

(386) Una superficie rettangolare di dimensioni 1200 mt e 800 mt è ripartita in quattro rettangoli tramite due rette parallele ai lati: uno dei rettangoli così formati ha area 27 Km^2 mentre l'opposto (al vertice, intersezione tra le due rette) ha area 15 Km^2. Determinare le dimensioni dei rettangoli testé menzionati.

Sulle Disequazioni.

(387) Risolvere la disequazione:

$$2x - 1 > 3x + 5.$$

(388) Risolvere la disequazione

$$x^2 - 3x + 1 < 2x^2 + x - 3.$$

(389) Risolvere la disequazione

$$\frac{2x^2 + 3x}{x^2 + 5x + 6} \leqslant 0.$$

(390) Dire dover è positiva l'espressione

$$3x - 1 + \frac{1}{3x + 1}.$$

(391) Dire dove è negativa l'espressione:

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2(x^2 + 4x + 4)}.$$

(392) Risolvere la disequazione

$$\frac{2x - 3}{x^2 - 25} > \frac{1}{x - 5} + \frac{1}{x + 5}.$$

(393) Risolvere la disequazione

$$\frac{x^3+2x-3}{x+3} \geqslant x^2+3x-1.$$

(394) Dire dove risulta positiva l'espressione

$$\frac{3}{x+3} - \frac{x^2-1}{(x+3)^2}.$$

(395) Risolvere la disequazione:

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x+1}{x-1} < 3 - \frac{2}{x(x-1)}.$$

(396) Studiare il segno dell'espressione

$$(1+x^2-2x)(1-6x)(6x-x^2).$$

(397) Risolvere la disequazione

$$x-1 < \sqrt{x^3-4x+3}.$$

(398) Dire dove vale la disuguaglianza

$$\sqrt{2x+3} > \sqrt{4x^2-2x-6}.$$

(399) Risolvere la disequazione

$$\sqrt{x+2} < \sqrt{6-x} - \sqrt{5-x}.$$

(400) Studiare il segno dell'espressione:

$$x^3 - \left(\frac{x^2}{3x+9} + \frac{x^3+x^2}{3} + \frac{x^2}{x+3}\right).$$

(401) Studiare il segno dell'espressione

$$\sqrt{2x^2-5x+2} - 3x^2 + x + 1.$$

Sui Sistemi Lineari.

(402) Risolvere il seguente sistema di due equazioni con i tre metodi illustrati nelle pagine precedenti:

$$\begin{cases} x-y=4 \\ x+2y=1. \end{cases}$$

(403) Risolvi il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 3\,x-5\,y=1 \\ 2\,x+4\,y=5. \end{cases}$$

(404) Risolvi, tramite eliminazione, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - 3\,y - 3\,z = -2 \\ -2\,x + y + 2\,z = -2. \\ 3\,x - y + z = 0. \end{cases}$$

[Hint: si elimini una stessa incognita sottraendo multipli opportuni di una stessa equazione dalle altre due e poi si elimini anche una seconda incognita dalle due equazioni ottenute...]

(405) Risolvere, tramite eliminazione, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 3\,y + 2\,z = 3 \\ -2\,x + y + 3\,z = 1. \\ -3\,x - 2\,y + z = -2 \\ x + y + z = 2. \end{cases}$$

[Hint: Se il sistema ha soluzione, evidentemente, una equazione è superflua....]

(406) Impostando un sistema di equazioni a più incognite, risolvere i seguenti tre problemi:

(a) Due operai lavorano insieme. La paga giornaliera del secondo è tre quarti di quella del primo. Il secondo operaio ha lavorato cinque giorni in meno del primo e ha riscosso 120 euro, mentre il primo ne ha riscosse 200. Trovate la paga giornaliera dei due e il numero delle giornate di lavoro.

(b) In un tiro al bersaglio si acquistano 20 cartucce con la condizione di pagare due euro per ogni colpo fallito e di riceverne tre e mezzo per ogni colpo centrato. Si vincono così 26 euro. Quanti colpi sono stati centrati?

(c) Una botte contiene 10 litri in meno di un'altra. Dalla seconda botte si tolgono 80 litri e si mettono nella prima che viene così ad avere una quantità doppia dell'altra. Quanto contengono inizialmente le due botti?

Relativi al Capitolo 14

Sui Teoremi di Invarianza dei prodotti.

(407) Le corde AB e CD di una circonferenza, si intersecano nel punto P, in modo tale che esso dista 30 unità da B e 50 da C. Sapendo che AP supera PD di due unità, determina la lunghezza delle corde.

(408) In una circonferenza di centro O, e diametro AB, la corda PQ passa per il punto medio M del raggio OA. Sapendo che

M dista 27 unità da P e 64 da Q, si determini la lunghezza del segmento AM.

(409) In una circonferenza di centro O e raggio OA, la corda BC interseca OA nel punto P, che dista 16 unitá da B. Se AP è il doppio di PO e OA è uguale a CP, quanto è lungo il raggio della circonferenza?

(410) Da un punto O esterno ad una circonferenza si conduce la secante OA, la cui parte interna AP misura 36 unità e la secante OB, la cui parte interna al cerchio BQ misura 18 unità. Sapendo che il rapporto tra OP e OQ è di quattro a cinque, si determini la misura di OA e di OB.

(411) Data la circonferenza di centro O e raggio 15, da un punto P posto a 27 unità di distanza da O, si conduca una secante PA, la cui parte esterna è PB. Si determini la lunghezza della corda AB e della sua distanza dal centro O, sapendo che il raggio OB biseca l'angolo $A\hat{O}P$.

(412) Nella semicirconferenza di diametro AB lungo $18\sqrt{2}$ è inscritto un quadrilatero (convesso) $ABCD$, il cui lato BC misura $6\sqrt{2}$ e le cui diagonali si intersecano in un punto P distante tre unità da C. Si determini l'area del triangolo $\overline{ABC}$, del triangolo $\overline{ABD}$ ed il perimetro del quadrilatero.

(413) Nel triangolo rettangolo $\overline{ABC}$, retto in $\hat{A}$, il cateto minore è $\overline{AB}$. Una circonferenza passante per A e per C, passa anche per il punto D del cateto $\overline{AB}$, distante 8 unità da B e per il punto P di $\overline{BC}$, in modo tale che $\overline{AB} \cong \overline{PC}$. Se è dato sapere che AB è il triplo di BP, quanto valgono i perimetri del triangolo $\overline{ABC}$ e del quadrilatero $\overline{ADPC}$?

(414) Il lato del triangolo ABC, isoscele sulla base AC, misura $4\sqrt{6}$ unità. La circonferenza passante per i punti A, B e per il punto medio M del lato BC, passa anche per il punto P di AC, tale che AP sia il doppio di PC. Dopo aver dimostrato che i triangoli MCP, ABM e ABP sono tutti isosceli, si determinino i perimetri.

(415) In una circonferenza è inscritto il quadrilatero (convesso) $ABCD$, i cui lati AB e CD misurano rispettivamente 12 e $6\sqrt{2}$ unità. Le diagonali del quadrilatero si incontrano nel punto P in modo tale che AP risulti doppio di PC. Sapendo che la circonferenza APB è tangente ad AD, si determini il perimetro dei triangoli ABC e ABD.

(416) Data una circonferenza, da un punto A esterno si conduca la secante AB, la cui parte esterna AE misura $6\sqrt{3}$ unità e

la secante AC, la cui parte esterna AF misura $6\sqrt{5}$ unità. Le corde BF e EC si intersecano nel punto T. Sapendo che BT è tangente alla circonferenza AET e che FC misura $3\sqrt{5}$ unità, si determini il perimetro del triangolo ATF dopo aver dimostrato che esso è isoscele sulla base FT.

Relativi al Capitolo 16

Sui Problemi di Geometria Solida.

(417) Il lato di base di una piramide quadrangolare regolare è $\frac{5}{6}$ dell'altezza e l'area della superficie laterale misura 65 unità quadrate. Trava l'altezza, apotema e lato di base.

(418) Un solido è costituito da un cubo sormontato da una piramide: esso ha l'area della superficie totale di 32 metri quadrati. Trova l'altezza della piramide, la diagonale del cubo ed il volume del solido, sapendo che l'area totale del cubo è 24 metri quadrati.

(419) Trova lo spigolo di un tetraedro regolare, sapendo che il suo volume è di $18\sqrt{2}$ unità cubiche.

(420) L'area della superficie laterale di un cono retto è 21π unità quadrate e l'apotema è sette terzi del raggio di base. Trova il raggio di base, l'apotema ed il volume del cono.

(421) L'area della superficie laterale di un tronco di cono è 20π unità quadrate; i raggi delle basi e l'apotema sono proporzionali a 1 a 3 e a 5. Trova i raggi delle basi, l'altezza, l'apotema ed il volume del tronco di cono.

(422) Un cilindro viene segato con un piano parallelo al suo asse; la diagonale della sezione è lunga 17 cm, l'area della sezione misura 120 cm^2. La distanza del piano di taglio dall'asse del cilindro è di 3 cm. Calcola le dimensioni della sezione ed il raggio di base e l'altezza del cilindro.

(423) La somma delle tre dimensioni di un parallelepipedo rettangolo è 16 unità, mentre la somma della prima con metà della seconda ed un terzo della terza è 8 unità. Sapendo che la diagonale del solido misura $2\sqrt{26}$ unità, determinare le dimensioni del solido.

(424) Un cono ha raggio di base r ed altezza $3r$. Se si diminuisce l'altezza, aumentando il raggio di base di una stessa quantità, il volume rimane invariato: di quanto vanno modificati altezza e raggio di base?

(425) Calcolare i raggi delle basi di un tronco di cono circoscritto ad una sfera di raggio r sapendo che il volume del tronco di cono risulta essere il doppio di quello della sfera [26].

(426) Da un punto della base di un triangolo equilatero di lato l si conducano le parallele agli altri due lati. Determinare a che distanza x questo punto deve essere preso dal vertice più vicino del triangolo, in modo che il volume del solido generato dal parallelogramma sia i due terzi del volume del solido generato dal triangolo, allorché la figura fa un giro completo attorno alla base.

Relativi al Capitolo 17

Sui Problemi di Conteggio.

(427) In quanti modi diversi si possono disporre su una mano tre anelli?

(428) In una gara podistica partecipano quindici corridori. Quanti podi diversi si possono avere? [27].

(429) Quanti numeri diversi di otto cifre si possono formare? e se le cifre debbono essere tutte diverse tra loro?

(430) In una gara automobilistica di presentano nove concorrenti. In quanti modi diversi possono arrivare a fine gara?

(431) In quanti modi diversi cinque anelli possono essere disposti sulle cinque dita della mano, uno per ogni dito?

(432) Un gelataio prepara cinque gusti diversi. Quanti coni con due gusti diversi può confezionare?

(433) Con i novanta numeri del Lotto, quante cinquine si possono formare?

(434) In quanti modi si possono estrarre contemporaneamente, da un mazzo di carte napoletane [28] tre carte di spade? e tre figure? e due assi?

(435) Lanciando tre volte un dado, quante sono le sequenze contenenti al massimo tre numeri pari?

(436) Volendo visitare cinque città, quanti itinerari diversi potrei pensare?

[26] Torna utile ricordare che il volume della sfera è dato da $\frac{4}{3}\pi r^3$, determinato da Archimede, attorno al 200 a.c., con molta soddisfazione, confrontando la sfera stessa con il cilindro circoscritto e determinando il rapporto di due a tre! una bella dimostrazione si può trovare negli scritti di Galileo: egli utilizza la famosa "scodella" ed il principio di Cavalieri.

[27] Podio si intende: primo, secondo e terzo posto.

[28] Quaranta carte, dieci carte per ciascuno dei quattro "semi"

(437) In un gruppo di sei persone, due tra queste non possono mai sedersi vicine: quanti possibili allineamenti diversi, rispettando questa condizione, si possono fare?
(438) In quanti modi diversi quattro persone possono essere disposte a cerchio?
(439) In una Classe di 18 alunni, si sorteggiano quattro rappresentanti da mandare ad una manifestazione. Quanti gruppi diversi possono essere formati? Se nello stesso gruppo non possono stare contemporaneamente due allievi ben identificati, per questioni disciplinari, quanti gruppi si potrebbero formare?
(440) In quanti modi due italiani, quattro inglesi e cinque francesi possono essere messi in fila in modo che i connazionali siano tutti vicini tra loro?
(441) In un test si richiede ai candidati di rispondere a sedici tra venti domande. Quante scelte ha il candidato? e se fosse obbligato a rispondere alle prime dodici domande?
(442) Una partita è finita 4 a 3. In quanti modi diversi possono essersi succedute le reti?
(443) In quanti modi diversi 3 bambini possono spartirsi 7 caramelle?
(444) Devo distribuire a dieci bambini cinque mele, due banane e tre arance: ogni bimbo deve ricevere esattamente un frutto. In quanti modi diversi posso effettuare la distribuzione?
(445) In un pullman ci sono 32 posti a sedere ma salgono solo 30 persone. In quanti modi diversi possono restare liberi i due posti?
(446) Su uno scaffale sono sistemati 100 lampadine, di cui 10 sono difettose. Prendendone 6 a caso, in quanti modi possono essere selezionate esattamente due lampadine difettose?
(447) Supponendo di avere le 100 lampadine di prima, di cui dieci difettose, in quanti modi si possono selezionare dodici lampadine di cui esattamente tre difettose?
(448) In un torneo di briscola partecipa un certo numero di persone. Ogni sera giocano quattro persone. Dopo tredici sere, ogni giocatore ha giocato esattamente una volta e contro tutti gli altri. Quanti sono i giocatori iscritti al torneo?
(449) Un allenatore ha a disposizione una rosa comprendente tre portieri, otto difensori, sette centrocampisti e quattro attaccanti. Volendo mettere in atto un modulo di gioco 4/4/2, quante squadre diverse potrebbe allestire? e se volesse giocare con un 4/3/3 ?
(450) Lanciando una moneta cinque volte, in quanti modi diversi è possibile ottenere testa esattamente due volte? Ed almeno due

volte? e non più di due volte?

(451) Otto amici organizzano un torneo di scacchi, in modo che ogni partecipante incontra ogni altro esattamente una volta. Quanti scontri prevede questo torneo?

(452) In quanti modi 7 buste numerate possono essere assegnate a 7 persone, se ognuna di esse riceve una busta? e se le buste fossero identiche e non ci fosse la condizione che le persone debbano ricevere necessariamente una busta?

(453) In quanti modi 3 ragazzi e 3 ragazze possono disporsi per ordine su di una panchina? ed a condizione che i ragazzi e le ragazze siano tutti vicini fra loro? e se solo i ragazzi siedono tutti vicini fra loro? In quanti modi se non vi sono persone dello stesso sesso sedute a fianco?

(454) Da un gruppo di 8 donne e 6 uomini deve essere scelta una commissione formata da 3 donne e 3 uomini. Quante diverse commissioni si possono formare? e se 2 degli uomini rifiutano di lavorare insieme? e se 2 delle donne rifiutano di lavorare insieme? Infine, se uno degli uomini e una delle donne rifiutano di lavorare insieme?

(455) Dodici persone sono divise a formare 3 commissioni, rispettivamente di 3, 4 e 5 persone, quante sono le possibili divisioni?

(456) Alla prima mano di scopa vengono date tre carte all'avversario. Quanti gruppi con esattamente due sette possono essere formati? e quanti con il sette di denari ed almeno un altro sette? In quanti modi diversi si può formare la terna di carte data all'avversario tra le quaranta pescate nel mazzo?

Relativi al Capitolo 18

Sui Problemi di Calcolo delle Probabilità.

(457) Lanciando un dado qual è la probabilità che esca un numero maggiore di due?

(458) Lanciando due dadi, quanto vale la probabilità che si ottenga un doppio uno? e due numeri qualsiasi uguali?

(459) Lanciando tre monete, quanto vale la probabilità che si presenti almeno una testa?

(460) Un'urna contiene dieci palline rosse, venti gialle e trenta nere. Quanto vale la probabilità che estraendo una pallina a caso, essa sia rossa? e che sia di colore giallo o nero?

(461) Estraendo dall'urna dell'esercizio precedente, contemporaneamente, due palline, quanto vale la probabilità che siano entrambe rosse? e che siano di colore diverso? e se si estraggono

l'una dopo l'altra, dopo aver rimesso la prima pallina nell'urna e mescolato, quanto valgono le probabilità chieste prima?

(462) Quanto vale la probabilità che pescando da un mazzo di carte napoletane a caso due carte, escano due figure uguali? e che siano due re?

(463) Giocando due numeri al Lotto su ruota fissa, quanto vale la probabilità di fare ambo? e di indovinare almeno un numero?

(464) Due urne contengono rispettivamente dieci palline gialle e cinque rosse, l'altra cinque gialle e dieci rosse. Estraendo due palline, una da un'urna e l'altra dall'altra, qual è la probabilità che esse siano entrambe rosse? e che siano di colore uguale?

(465) Il 40% degli alunni di una Classe è insufficiente in Italiano, il 50% in Matematica ed il 10% in entrambe le materie. Presi tre ragazzi a caso, qual è la probabilità che essi siano insufficienti in entrambe le materie?

(466) Quanto vale la probabilità che di prima mano, chi riceve le prime tre carte da un mazzo di carte napoletane, abbia tre sette? ammesso che l'avversario abbia ricevuto tre sette di prima mano e che tra le mie tre carte non vi sia il quarto sette, qual è la probabilità che esso compaia tra le quattro messe scoperte sul tavolo?

(467) In una fabbrica lavorano tre macchinari che producono pezzi difettosi in proporzioni di 2%, 3% e 4% rispettivamente. Si stabilisce di procedere ad un controllo di qualità utilizzando il sorteggio di una pallina tra le sei numerate e messe in un'urna, in tal guisa: se esce la pallina n.1 viene prelevato un pezzo dalla produzione del primo macchinario; se esce una tra le palline con numerazione 2 o 3, si preleva dalla produzione del secondo macchinario, altrimenti si controlla dalla produzione del terzo macchinario. Quanto vale la probabilità di prelevare proprio un pezzo difettoso?

(468) Quanto vale la probabilità che in una Classe di 25 allievi, due abbiano il compleanno nello stesso giorno?

(469) In un'urna ci sono cinque bussolotti: tre contrassegnati con un numero pari e due con un numero dispari. Si estraggono, uno appresso all'altro, due bussolotti e si verifica che essi sono uno pari e l'altro dispari. Quanto vale la probabilità che alla terza estrazione esca un bussolotto contrassegnato con un numero pari?

(470) Si prelevano tre elementi da uno stock di 15, di cui 5 sono

difettosi. Qual è la probabilità che tra gli elementi prelevati, nessuno sia difettoso? e che ce ne sia esattamente uno difettoso? e che almeno un elemento sia difettoso?

(471) In un magazzino ci sono 200 pezzi; 40 tra questi sono prodotti dalla ditta A, 60 dalla ditta B, 30 dalla ditta C e 70 dalla D. Si collaudano tre pezzi, prelevandoli contemporaneamente dal magazzino. Qual è la probabilità che essi siano stati prodotti tutti dalla ditta A?

(472) Due ditte producono per un negozio uno stesso tipo di prodotto: la prima ditta, chiamiamola A, produce il doppio della seconda ditta, che chiameremo B. Le ditte forniscono al negoziante le proprie stime di produzione di prodotti difettosi: 2% per A e 1% per B. Se il negoziante prende uno dei prodotti e lo trova difettoso, qual è la probabilità che venga dalla produzione della ditta A?

(473) Il codice genetico determina un amminoacido mediante una successione di tre nucleotidi, possibilmente ripetuti. Notoriamente i nucleotidi sono la timina, l'adenina, la citosina e la guanina. Supponendo l'equiprobabilità del presentarsi dei nucleotidi, quanto vale la probabilità che un amminoacido presenti due volte la timina? e che il primo aminoacido della sequenza sia la citosina?

(474) In un ufficio postale con otto sportelli aperti, arrivano cinque persone che si distribuiscono in modo del tutto casuale. Qual è la probabilità che non si formino code [29]?

(475) Viene visitato un paziente che potrebbe essere affetto da delle malattie con probabilità diverse: una malattia M1 al 40%, un malattia M2 con probabilità 30% ed una terza malattia M3 ancora con probabilità del 30%. Si effettuano pertanto delle analisi, per decidere cosa abbia il paziente. In caso di risultato positivo (alle analisi), si sa che la probabilità di aver contratto la malattia M1 è del 10%, la malattia M2 ha probabilità del 40% e la terza malattia la si stima al 50%. Dato che le analisi risultano positive, quale malattia ha maggiore probabilità di avere il paziente? e se analisi risultassero negative?

(476) Per superare un concorso di selezione di personale, è stato somministrato un test con 10 domande, ognuna delle quali presentava cinque risposte, di cui una sola esatta. Se un candidato sceglie a caso le risposte, quanto vale la probabilità di aver risposto esattamente a due domande?

[29]Ovvero almeno due persone allo stesso sportello.

Relativi al Capitolo 19

Sui Problemi di Statistica descrittiva.

(477) Una famiglia media di 4 persone ha sostenuto le seguenti spese mensili, in euro, per un anno:

1250,00; 1320,00; 1650,00; 1400,00; 1380,00; 1410,00;
1450,00; 2800,00; 1550,00; 1700,00; 1350,00; 2150,00.

Qual è stata l'entrata minima necessaria per sostenere tali spese?

(478) Una piccola azienda ha sostenuto le seguenti spese in euro: nei primi quattro mesi dell'anno 25000,00; poi 49000,00 euro per sei mesi, a novembre 55000,00 euro e 78000,00 a dicembre. In media, al mese, quanto avrebbe speso?

(479) Dalle analisi del sangue effettuato su un gruppo di 100 pazienti, si sono registrati i seguenti livelli di colesterolo: uno presentava 134; quattro 165; ventiquattro presentavano 196; diciassette 227; ventisette 258, sedici 189; nove 320; nessuno 351 e due 382. Trova media, moda, mediana e deviazione standard.

(480) Le misure in centimetri della lunghezza di un gruppo di chiodi è la seguente:

cm	4,12	4,13	4,14	4,15	4,16	4,17	4,18	4,19
freq.	8	15	24	32	45	36	25	12

Determinare lunghezza media e deviazione standard.

(481) Prima di acquistare un tester, un tizio decide di sottoporre due strumenti a delle prove ed inizia a misurare le resistenze che ha in laboratorio. I risultati delle prove sono tabulati qui di seguito:

Misura	Tester 1	Tester 2
1	11,5	11,6
2.	11,4	11,3
3	11,5	11,5
4	11,3	11,4
5	11,4	11,2

Decide di acquistare il tester che mostra di avere minore indice di variabilità: quale è dei due ?

[Hint: si determini la deviazione standard per entrambi i gruppi di misurazioni.]

Esercizi di riepilogo, tratti da gare o, semplicemente, curiosi

Presentiamo ora una serie di "problemi di riepilogo": essi sono generalmente meno ovvi di quelli dati precedentemente ed occorre che si conoscano quasi tutti gli argomenti presentati nel libro: ad esempio, qualora si dovessero stabilire delle equazioni risolutive, molto probabilmente saranno di secondo grado o superiore... questo non vieta di impostare il modello risolutivo già alla fine del primo anno di corso, rimandando all'anno successivo la risoluzione dell'equazione trovata o che lo studente voglioso possa "anticipare argomenti" [30] per la curiosità di risolvere i problemi proposti.

(482) Dato il parallelepipedo in *Fig.1,* di lati a, b, c dimostrare che per la diagonale d si ha $d^2 + a^2 + b^2 + c^2$.

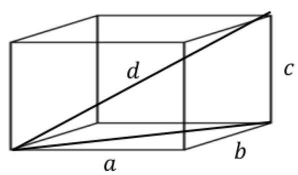


Fig. 1

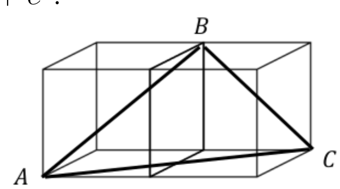
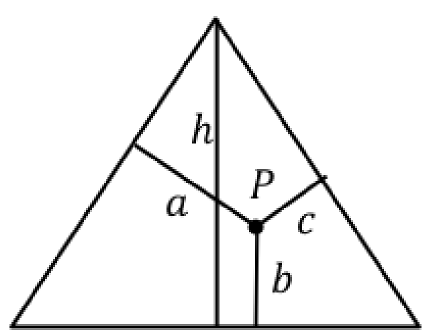


Fig. 2

Considerando i due cubi di lato unitario accostati come in *Fig.2,* si dimostri che l'angolo in B, è retto.

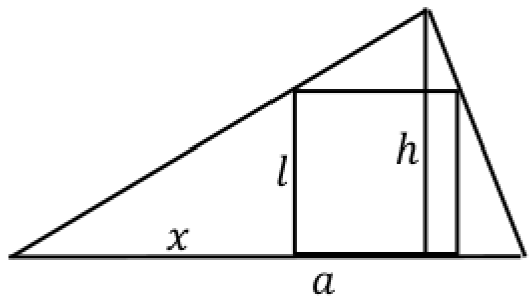
(483) Dato un triangolo equilatero e preso P un punto interno ad esso, dimostrare che le distanze a, b, e c dai tre lati hanno somma costante e pari all'altezza del triangolo stesso, ovvero, facendo riferimento alla figura,



$$a + b + c = h.$$

[30] Il ché sarebbe fantastico ed auspicabile!!! fermo restando sempre la possibilità di rivolgersi al proprio docente di Matematica per ultimare l'esercizio.

(484) Dato il triangolo di base a ed altezza h ed inscritto in esso il quadrato di lato l, come in figura,

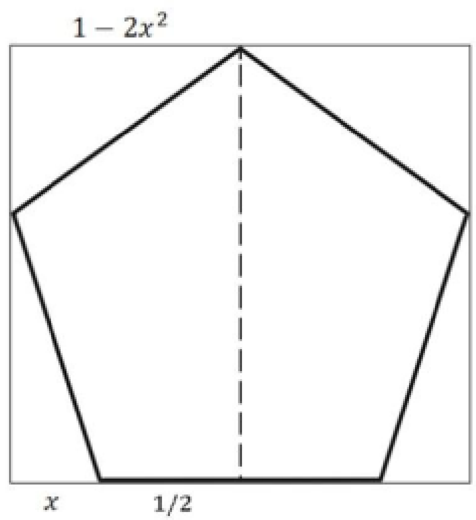


dimostrare che vale la relazione

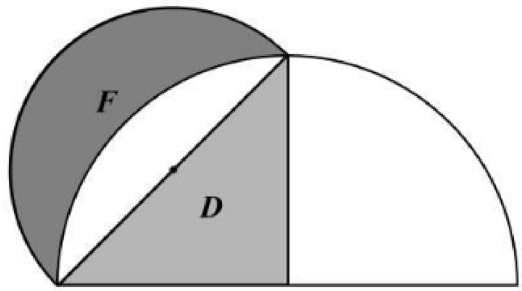
$$\frac{1}{l} = \frac{1}{a} + \frac{1}{h}$$

[Hint: l'area del triangolo è la somma delle sotto-figure...]

(485) Dato il pentagono regolare di figura, calcolare il valore di x.



(486) Quanto vale il rapporto tra le aree delle figure F e D, indicate in figura?



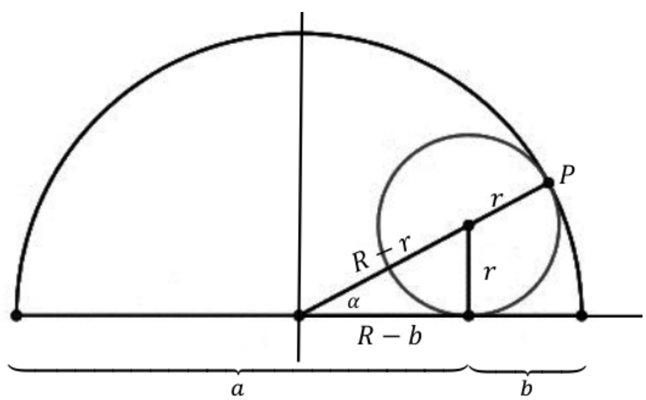
[Hint: si ricordi che il rapporto delle aree tra figure simili è pari al rapporto dei quadrati delle lunghezze omologhe...]

(487) Il prodotto tra due numeri consecutivi è sicuramente pari (perché?), si dimostri che il prodotto dei tre numeri consecutivi $(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ deve essere multiplo di 6 e che, se n è dispari, allora esso è multiplo di 24.

[Hint: si scriva $n = 2k+1 \ldots$]

(488) Con riferimento alla figura, si dimostri che

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$



(489) Se due numeri (interi) a e b, divisi per lo stesso numero n danno uguale resto, allora essi si diranno **congruenti modulo** n e si scriverà $a \equiv_n b$ o anche $a \equiv b \mod n$. Dimostrare che la relazione di *congruenza modulo un numero* è una relazione di equivalenza sull'insieme dei numeri interi. L'insieme quoziente $\mathbb{Z}_{/\equiv_n}$ in genere si indica semplicemente con $\mathbb{Z}_n$. Giustificare il fatto che le classi di congruenza sono in numero di n.

(490) Dati quattro numeri naturali a, b, c, e d tali che

$$a \equiv_n b \quad \text{e} \quad c \equiv_n d$$

provare che
a) $a + c \equiv_n b + d$
b) $ac \equiv_n bd$.

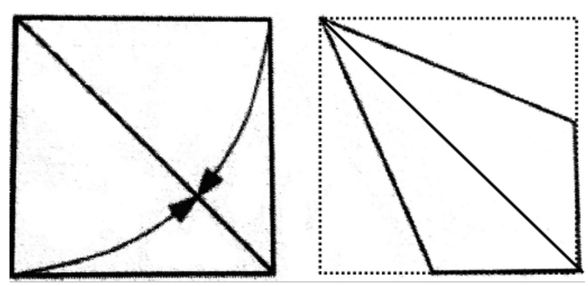
(491) Un numero (in base 10) è composto da 77 cifre tutte uguali a 7:

$$\overbrace{777\ldots7}^{77} = 7 \cdot \overbrace{111\ldots1}^{77}.$$

Qual è il resto della sua divisione per 101?

[Hint: si osservi che $101 \cdot 11 = 1111\ldots$ *]*

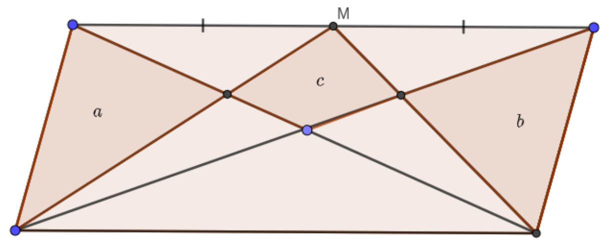
(492) Gabriele prende un quadrato di carta di lato unitario e piega due lati facendoli combaciare con la diagonale (vedere la figura seguente) ottenendo un quadrilatero a forma di aquilone. Qual è l'area di tale quadrilatero?



[Hint: Si ricordi il teorema della bisettrice...]

(493) Alcuni gommoni scendono lungo un fiume con a bordo tutti lo stesso numero di persone. Durante la navigazione uno di essi non è più in grado di proseguire e le persone a bordo vengono trasferite sugli altri gommoni, cosicché ciascuno di essi si ritrova a bordo 1 passeggero in più. Poco dopo altri 3 gommoni vanno in avaria e le persone a bordo vengono distribuite sui rimanenti gommoni i quali imbarcano così altre 5 persone ciascuno. Quanti erano i gommoni alla partenza?

(494) Dato il parallelogramma di area unitaria e facendo riferimento alla figura seguente,



dimostrare che per le aree indicate vale:

$$a + b - c = \frac{1}{4}.$$

(495) Perché la somma delle cifre di un multiplo di 9 è anch'essa multipla di 9?

(496) Dimostrare che per ogni numero primo maggiore di 3 si ha

$$p = 6n + 1 \quad \text{oppure} \quad p = 6n - 1,$$

ma non è vero che tutti i numeri del tipo $p = 6n \pm 1$ sono numeri primi, ad esempio $6 \cdot 4 + 1 = 25$ che non è primo. Altresì dimostrare che se un numero della forma $2^n - 1$, maggiore di 3, è primo, allora $2^{n-1} - 1$ deve essere necessariamente multiplo di 3: ad esempio $2^5 - 1 = 31$ è un primo maggiore di tre e $2^4 - 1 = 15$ risulta multiplo di 3.

(497) Dato un intero positivo n, dimostrare che $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$. Utilizzando questo risultato calcolare la somma

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{998 \cdot 999} + \frac{1}{999 \cdot 1000}.$$

Verificare infine che se n è dispari, si ha la scomposizione in *frazioni egizie:*

$$\frac{2}{n} = \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n(n+1)},$$

ad esempio $\frac{2}{35} = \frac{2}{36} + \frac{2}{35 \cdot 36} = \frac{1}{18} + \frac{1}{630}$.

(498) Una passatoia, il lungo tappeto da cerimonia, ha uno spessore di $s = 0.5$ cm e quando è arrotolata assume la forma di un cilindro di diametro $d = 0.5$ mt. Come si può calcolare (approssimativamente) la sua lunghezza senza srotolarla?

[Hint: si consideri il rotolo come costituito da una serie di cilindri cavi di spessore $s \ldots$]

(499) Un pallottoliere ha 4 stecche sulle quali sono presenti, dal basso verso l'alto, rispettivamente 4, 3, 2 e 1 palline. Ferme restando le modalità d'uso dell'abaco, determinare il valore

delle palline su ciascuna stecca, il numero massimo fino a cui è possibile contare con un pallottoliere di quel tipo e come si esprime il numero 33. Come si possono meglio disporre, sulle stecche, le 10 palline in modo da “aumentare la potenza di calcolo”?

(500) Una cellula, che si riproduce sdoppiandosi ogni ora in due cellule identiche, riempie il contenitore campione dopo 24 ore.

i) Dopo quante ore il contenitore era pieno a metà?
ii) Partendo inizialmente da due cellule, anziché una, dopo quanto tempo il contenitore risulterà pieno?
iii) Se ogni ora viene inserita una cellula extra, quante saranno le cellule in coltura dopo $24\,h$?
iv) Dato che il contenitore ha un volume di 10 ml e quello degli oceani è di 1.28 miliardi di Km^3, calcolare il tempo che una cellula impiegherebbe a colonizzare le acque della Terra.

[Hint: si utilizzi l'approssimazione $10^3 \approx 2^{10} \ldots$ *]*

(501) Un salumiere ha una bilancia a due piatti; su un piatto vi sono 140 gr di prosciutto crudo, sull'altro 475 gr di prosciutto cotto. Una cliente gli chiede poi 1 Kg di pane grattugiato ed il salumiere si diverte a ripartirlo in due parti mettendone un po' sul primo piatto ed un po' sul secondo piatto della bilancia in modo che la bilancia stessa risulti in equilibrio. Quanto pane deve mettere sul primo piatto?

(502) Il centro meteo di S.Anna ha stimato una probabilità di cinque noni che la temperatura domani aumenti e di due terzi che piova. Se la probabilità che si avveri una delle previsioni è due terzi, che probabilità c'è che domani aumenti la temperatura e piova? e che non si verifichi nessuna della due circostanze?

(503) In una gara di nuoto un atleta ha probabilità cinque ventunesimi di vincere la prova di stile libero ed un terzo di vincere quella di dorso. Poiché valuta che la probabilità di vincere entrambi è undici ventunesimi, qual è la probabilità che le vinca entrambe? e di non vincere nemmeno una gara?

(504) In un gruppo di 8 persone, 3 sono favorevoli ad una data proposta. Quale è la probabilità che scegliendo a caso tre persone tra di esse, due siano contrarie alla proposta?

(505) Un aereo tenta di distruggere una linea telefonica lanciando delle bombe. Sapendo che la probabilità di distruggere la linea lanciando una bomba è un terzo, quanto è la probabilità di distruggerla lanciandone tre?

(506) In un frutteto di forma rettangolare sono piantati degli alberi in file ordinate. Il numero di alberi lungo una direzione è uguale a quello nell'altra direzione diminuito di 3. Quanti alberi ci sono lungo le due file, sapendo che in un tutto il frutteto ci sono 550 alberi?

(507) n un bar degli amici bevono tutti la stessa bibita, che costa 3 euro. Al momento di pagare risulta che uno è senza soldi, due hanno solo 1.5 euro a testa, per cui ognuno dei rimanenti devono sborsare 4 euro. Quanti sono i ragazzi?

(508) Per sapere l'altezza della più alta piramide d'Egitto (quella di Cheope -per la cronaca!:-) si procede così: si lascia scivolare una corda lungo una faccia e si trova che dal vertice della piramide fino al punto medio del lato di base essa misura 186 mt (ovvero si misura l'apotema); poi si misura il lato di base è si trova che esso è di 230 mt. Questo basta: ora sai dire quanto è alta la piramide?

(509) Costruire con un filo di ferro lungo 36 cm un triangolo equilatero; con un altro filo di ferro della stessa dimensione un triangolo rettangolo in cui un cateto è i tre quarti dell'altro e, con un altro filo di ferro identico agli altri due, un triangolo isoscele la cui base è due quinti del lato. Trovare le aree dei tre triangoli.

(510) Con tre fili di ferro identici di dimensione 40 cm, costruire un quadrato, un rombo che ha una delle diagonali uguali al lato ed un trapezio isoscele di base maggiore doppia rispetto alla base minore e lati obliqui lunghi quanto la base minore. Determina le aree dei tre quadrilateri.

(511) Quando si dice "Un televisore di 19 pollici" s'intende che la diagonale dello schermo è lunga 19 pollici. Sapendo che un pollice misura 2,54 cm e che, in tempo passato, lo standard televisivo era di $\frac{3}{4}$ (ovvero i lati dello schermo stavano in rapporto di 3 a 4), calcolare l'area, in cm-quadrati, del monitor della TV. Da un bel po' di tempo si è introdotto il formato a $\frac{16}{9}$ (che alcuni chiamano anche "widescreen"). In questo caso, quanto misura l'area visibile del monitor?

(512) In una gara di atletica superano le eliminatorie i tre ottavi dei con correnti; accedono alle semifinali i tre settimi dei qualificati nelle eliminatorie; disputano la finale dodici atleti, i quali rappresentano i quattro noni dei semifinalisti. Quanti erano gli iscritti alla gara e quanti di essi non hanno superato le semifinali?

(513) Anziché pagare subito un'automobile, preferisco una maggiorazione di un dodicesimo del prezzo di listino ed un pagamento in ventiquattro rate da 780 euro ciascuna. Qual è il prezzo di listino dell'automobile?

(514)

$$\text{Se} \quad \frac{x^2+9x-15}{2x^2-5x+3} = \frac{7}{8}, \quad \text{quanto vale} \quad \frac{x^2-14x+18}{3x^2+4x-12} = ?$$

(515) Due cacciatori vedono una lepre e sparano simultaneamente. Sappiamo che i due cacciatori colpiscono la preda una volta su quattro, qual è la probabilità che almeno uno colpisca la lepre?

(516) Pierino dispone di stampi per fabbricare soldatini di piombo. Fa fondere alcuni lingottini di piombo e osserva che produce un soldatino per ogni lingottino, inoltre, con gli avanzi del piombo fuso, riesce a costruire un altro soldatino ogni 4. Quanti soldatini fabbrica con 24 lingottini?

(517) Un artigiano inizia a lavorare alle ore 8 e produce 6 braccialetti ogni 20 minuti. Il suo aiutante inizia a lavorare un'ora dopo e produce 8 braccialetti ogni mezz'ora. L'artigiano smette di lavorare a mezzogiorno ma avverte il suo aiutante: "Dovrai continuare a lavorare finché non avrai prodotto tanti braccialetti quanti ne ho fatti io!" A che ora l'aiutante potrà andare a riposarsi?

(518) Si dimostri la seguente identità:

$$(s+q)^2 - (s-q)^2 = 4sq.$$

(519) Si dimostri la **forumula di Erone** per determinare la misura dell'area del triangolo in base alla conoscenza delle sole misure dei lati:

$$A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

dove p indica il *semiperimetro del triangolo* di lati a, b e c.

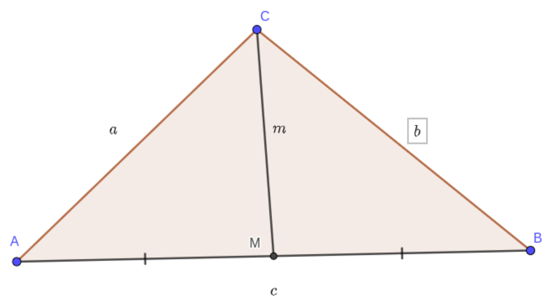
[Hint: Si può utilizzare l'identità precedente per dimostrare la formula equivalente, ottenuta da quella di Erone elevando al quadrato e quadruplicando i due membri: $4A^2 = 4p(p-a)(p-b)(p-c)$, oppure direttamente tramite Teorema di Pitagora, utilizzando la nota formula delle aree dei triangoli, noti base e altezza, i prodotti notevoli ed i quadrati di binomio...]

(520) Si dimostri che la formula di Erone è equivalente alla *formula di Qin Jiushao* pubblicata dallo studioso cinese nel 1257,

indipendentemente dalla formula di Erone

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2}, \quad a \geqslant b \geqslant c.$$

(521) Sfruttando la formula di Erone, si dimostri che la lunghezza di una mediana è tale che il doppio del suo quadrato uguaglia la somma dei quadrati dei lati di cui non è mediana, diminuita della metà del quadrato di cui è mediana.

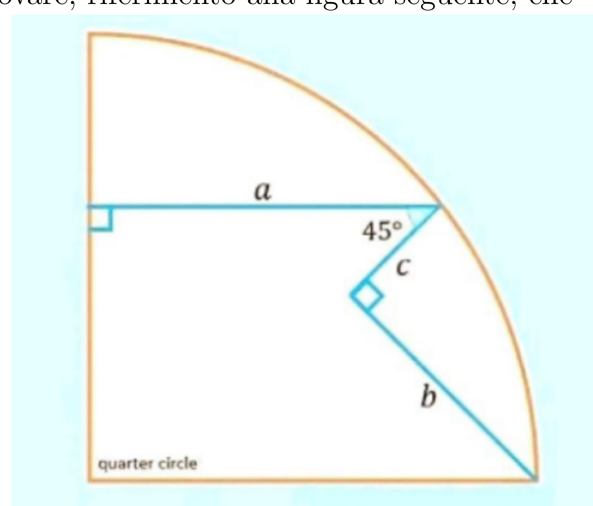


Facendo riferimento alla figura, in formule

$$2 \cdot m^2 = a^2 + b^2 - \frac{1}{2}c^2.$$

[Hint: Si consideri che la mediana ripartisce il triangolo in altri due equivalenti e, poi, si utilizzi la formula di Erone...]

(522) Provare, riferimento alla figura seguente, che



$$\frac{\sqrt{2}}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

(523) Per un viaggio di 192 km da una città A a una città B si impiegano 2 ore in più se si prende il treno locale piuttosto quello interregionale. Se la velocità del treno più veloce è di 16 km/h maggiore rispetto a quella del treno più lento, trova le velocità del treno più veloce (l'interregionale) e del treno locale.

(524) Trovare per quali valori del parametro k la seguente equazione ha soluzioni coincidenti e trovarle:

$$(2k+1)x^2 – (7k+2)x + (7k – 3) = 0.$$

(525) La velocità di una barca, in acque ferme, è di 15 km/h. Essa risale un fiume per 30 km e poi ritorna allo stesso punto, impiegando 4 ore e 30 minuti. Trova la velocità del flusso delle acque del fiume.

(526) Un treno viaggia ad una certa velocità (media) per una distanza di 63 km, poi percorre una distanza di 72 km ad una velocità (media) di 6 km/h in più rispetto alla sua velocità precedente. Se ci vogliono 3 ore per completare il viaggio, qual è la velocità (media) d'inizio viaggio?

(527) Un gioco consiste nel lanciare una moneta 3 volte e annotare ogni volta il risultato. Se si ottiene lo stesso risultato in tutt'e tre i lanci, allora si vince; trova la probabilità di perdere la partita.

(528) Un sacchetto contiene delle palline di cui un certo numero, diciamo x, sono bianche, il doppio (quindi $2x$) sono nere ed il triplo ($3x$) sono rosse. Se una pallina viene scelta a caso, qual è la probabilità che :

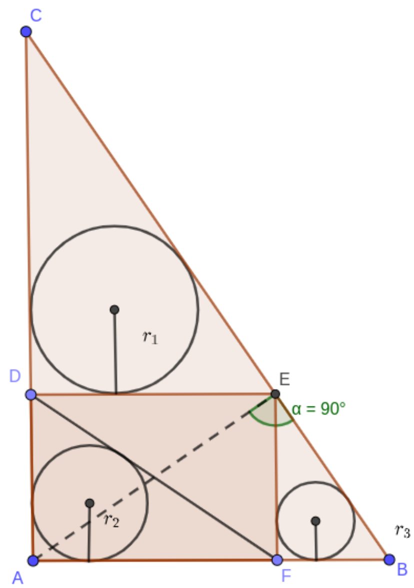
i) non sia rossa?

ii) sia bianca?

(529) In una data popolazione, una malattia si presenta con una frequenza di 2 persone ogni 1000 e la sua presenza può essere diagnosticata con un test che con una probabilità pari a 0.98 fornisce una risposta positiva qualora la persona sia effettivamente malata, ma che con una probabilità pari a 0.05 fornisce una risposta positiva qualora la persona sia invece sana. Quanto vale la probabilità che una persona risultata positiva al test sia effettivamente malata?

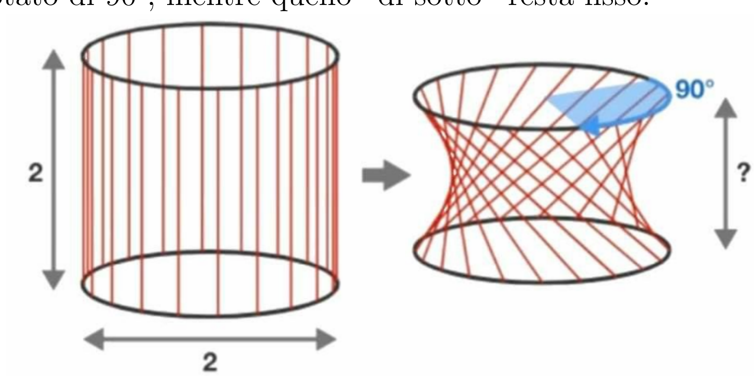
[Hint: si utilizzi il Teorema di Bayes...]

(530) Facendo riferimento alla figura, dimostra che il raggio r_2 è la media geometrica degli altri due raggi:



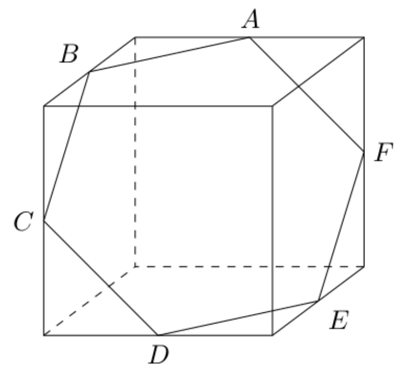
$$r_2 = \sqrt{r_1 \cdot r_3}.$$

(531) Facendo riferimento alla figura, il cerchio "di sopra" viene ruotato di 90°, mentre quello "di sotto" resta fisso.

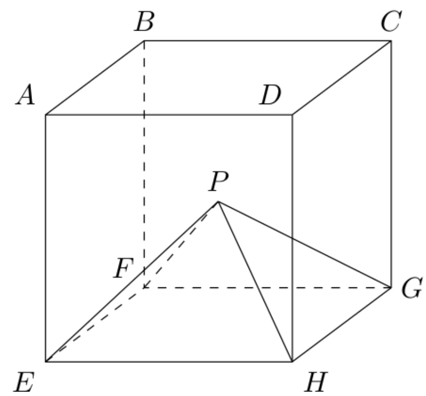


Qual è la nuova distanza tra i due cerchi?

(532) Calcola la misura dell'area dell'esagono $ABCDEF$ formato unendo i punti medi degli spigoli adiacenti di un cubo, come mostrato nella figura seguente.



(533) Determina il volume della piramide $PEFGH$ in cui $EFGH$ è una faccia del cubo unitario e P è il punto d'intersezione tra due diagonali, ad esempio $\overline{AG}$ e $\overline{FD}$.



(534) Un rettangolo di carta di dimensioni 10×24 unità viene piegato in modo che due vertici opposti coincidono. Calcola la lunghezza della piega che si forma sulla carta, dopo averla piegata per come detto.

(535) Se la probabilità che non piova è il quadrato della probabilità che piova, calcolare la probabilità che pioverà.

(536) Le 25 squadre di una piccola lega-calcio sono divise in due divisioni, "serie A" e "serie B". Ogni squadra gioca contro ogni altra squadra nella propria divisione esattamente una volta, ma non gioca contro nessuna squadra nell'altra divisione. Se vengono giocate 36 partite in più in "serie A" rispetto all'altra divisione ("serie B"), quante squadre ci sono in "serie A"?

(537) Quanti termini distinti ci saranno se $(x + y + z)^{17}$ è algebricamente sviluppato e semplificato?

(538) Trovare il valore di n per il quale si verifica la seguente uguaglianza:

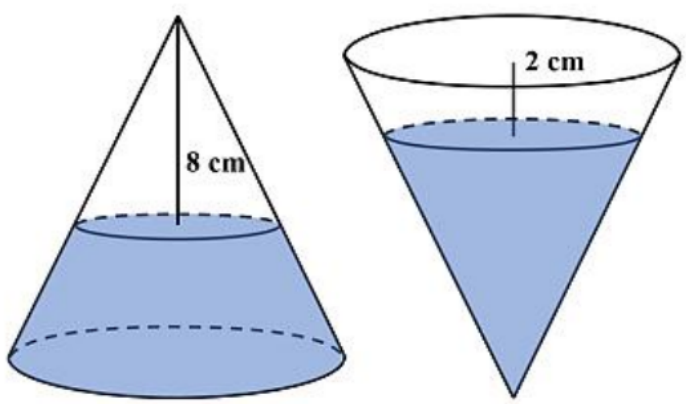
$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{1990}.$$

(539) Trovare le soluzioni dell'equazione

$$\left((1+x)^2\right)^{\frac{1}{7}} + 3\left((1-x)^2\right)^{\frac{1}{7}} = 4(1-x^2)^{\frac{1}{7}}.$$

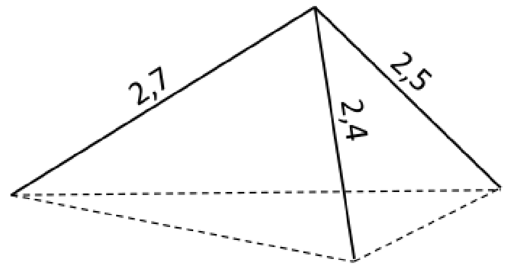
(540) Considera due macchinari molto elementari. Il primo consiste di tre parti e lavorerà solo se almeno due parti delle tre non si guasta. Una delle parti si rompe con probabilità $\frac{3}{5}$ e chiascuno delle altre due si guasta con probabilità p. Il secondo macchinario, invece, smette di lavorare con probabilità p^2-p+1. Se le probabilità che entrambi i macchinari siano in funzione è la stessa, trovare p.

(541) È dato un contenitore conico sigillato contenente dell'acqua. Poggiandolo sulla base, l'altezza libera è di 8 cm, mentre rovesciandolo è di 2 cm.



Dato che il rapporto tra i volumi di solidi simili è uguale al cubo del rapporto di lunghezze omologhe (degli stessi solidi), trovare la misura dell'altezza h del cono.

(542) Un cubetto di ghiaccio emerge dal cocktail per $\frac{1}{10}$ del suo volume.



Se le parti visibili degli unici tre spigoli emersi misurano rispettivamente $2,4$ cm, $2,5$ cm e $2,7$ cm, quanto misura l'intero spigolo?

[Si ricordi che le facce di un cubo sono ortogonali tra loro.]

(543) Determinare un polinomio $P(x)$ di terzo grado tale che

$$P(n) = P(n-1) + n^2, \quad \text{con} \quad P(0) = 0.$$

(544) Determinare il quoziente $(x^{n+1} - 1) : (x - 1)$ ed utilizzare il risultato per provare la seguente uguaglianza:

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(545) Un cono ha l'altezza tripla del raggio di base. Determina di quanto bisogna diminuire l'altezza ed aumentare il raggio di base affinché il volume non cambi.

[Si indichi con r il raggio di base e si risolva il problema in funzione di questa quantità.]

Per ultimare questo primo volume con gli ultimi esercizi, vogliamo introdurre dei concetti molto importanti per la Matematica moderna. Se tra gli elementi di un insieme si può definire una operazione binaria *interna,* che sia *associativa,* ammetta l'*elemento neutro* [31] e per la quale, ogni elemento ha un *elemento opposto* [32] (detto anche inverso), allora tale insieme, unitamente all'operazione considerata, viene detto **Gruppo** e se l'operazione è anche *commutativa* esso si dirà **Gruppo Abeliano.** Si dice anche che l'operazione definita con quelle proprietà *fornisce una struttura* di gruppo all'insieme di partenza. In Algebra Moderna, uno dei compiti principali è proprio lo studio delle strutture -e quindi delle proprietà- che gli insiemi di elementi possono dotarsi

[31] Ovvero esiste un elemento che composto tramite questa operazione con un qualsiasi altro, dà ancora quest'ultimo.

[32] Ovvero, per ogni elemento, nell'insieme stesso, si trova un altro tale che composto con esso dà l'elemento neutro.

una volta definita qualche operazione tra i suoi elementi.

(546) Verificare che l'operazione (binaria) definita in $\mathbb{N}$ ponendo

$$x \spadesuit y \longrightarrow x \cdot y + 1$$

(ove "$\cdot$" e "$+$" sono le normali operazioni tra numeri naturali) è commutativa, non associativa e priva di elemento neutro.

(547) Considera l'insieme $S = \{2^k | k \in \mathbb{Z}\}$, munito dell'ordinaria moltiplicazione "$\cdot$". Dimostra che $(S, \cdot)$ costituisce un gruppo abeliano.

(548) Provare che l'insieme numerico definito dalle frazioni della forma indicata d'appresso:

$$S = \left\{ \frac{1 + 2\,n}{1 + 2\,m} \mid n,\, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

munito dell'ordinaria operazione di moltiplicazione, costituisce un gruppo abeliano.

(549) Sia dato l'insieme $A = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$ e provare che $(A, +)$ è un gruppo abeliano, ove "$+$" è l'ordinaria addizione in $\mathbb{Q}$.

Un insieme, dotato di struttura di gruppo tramite una data operazione binaria, i cui elementi sono "generati" da un unico altro elemento del gruppo, si chiamerà **gruppo ciclico** : quindi, se $\mathcal{G}$ è l'insieme e $\odot$ l'operazione binaria definita tra gli elementi di $\mathcal{G}$, questo risulta ciclico se esiste un elemento $\bar{g}$ tale per cui

$$\forall g \in \mathcal{G}, \quad g = \bar{g} \odot \bar{g} \odot \cdots \odot \bar{g}.$$

Se immaginiamo di "estendere" la notazione delle potenze anche per l'operazione "$\odot$", allora si potrebbe dire molto semplicemente che il gruppo è ciclico se si può scrivere $\mathcal{G} = \{g^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$; la più piccola potenza per la quale $g^n = e$, dove "e" rappresenta l'elemento neutro del gruppo, si chiama **ordine** del gruppo.

(550) Le classi dei residui $mod.\, m$,

$$[0],\ [1],\ [2], \ldots, [m-1]$$

(a) formano *sempre* un gruppo ciclico (abeliano [33]) di ordine m, se si compongono con le leggi di addizione tra classi.
(b) formano un gruppo, se si compongono con la legge di moltiplicazione tra classi, se e solo se m è un numero primo!

[33] Dimostra che i gruppi ciclici devono essere per forza abeliani!

Indice analitico

Bibliografia

[1] Berzolari L., Vivanti G., Gigli D.: Enciclopedia delle Matematiche elementari e Complementi, vol.II parte I - Ulrico Hoepli Editore, 1943

[2] Casano A.: Elementi di Aritmetica, Tipografia Reale di Guerra - Palermo, 1832.

[3] Casano A.: Elementi di Geometria, Tipografia Reale di Guerra - Palermo, 1835.

[4] Casano A.: Elementi di Algebra, Tipografia Reale di Guerra - Palermo, 1833.

[5] Cirillo S.L.: Geometria Operativa vol. I e II - Ferraro Editrice, 1993.

[6] Conti F., Barboncini P.:Geometria Razionale vol. I e II (per i licei - Ghisetti e Corvi Editori,1981.

[7] Cortelazzo M., Zolli P.: Dizionario etimologico della lingua italiana, Zanichelli Editore, 1979.

[8] Enriquez F., Amaldi U.: Elementi di Geometria, parte prima e seconda (ad uso delle scuole secondarie superiori) - Zanichelli Editore, 1956

[9] Frajese A.: Attraverso la storia della matematica - Le Monnier, 1973 – Collana "La matematica nella cultura e nella scuola", Quaderni di Archimede.

[10] Euclide: Elementi.

[11] Rionero M.: Algebra moderna per le scuole medie superiori, Loffredo, 1972

[12] Rionero M.: Esercizi risolti di algebra moderna : insiemi, strutture algebriche, gruppi, anelli, ideali, corpi, equazioni secondo Galois, Loffredo, 1976

[13] Rionero M.: Complementi di Matematica per i licei scientifici, Loffredo, 1973

[14] Russell B.: I principi della matematica, Newtown Compton Italiana, 1971 -Collana paperbacks saggi/37

ISBN 979-12-210-3136-2

(Prezzo: € 00,00)