Lezioni di Matematica

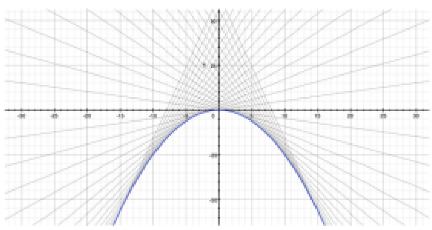
PROGRAMMA TRIENNIO SCUOLE SUPERIORI

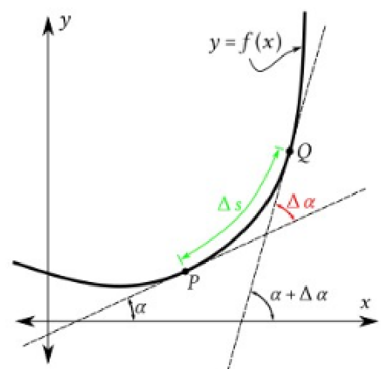
Vol. 2

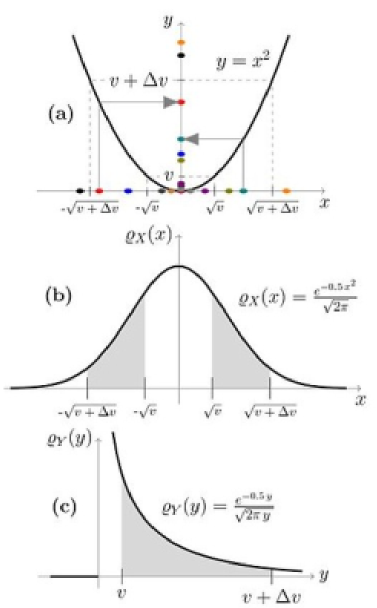
di

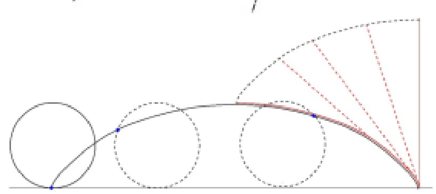
EMANUELE CASTAGNA

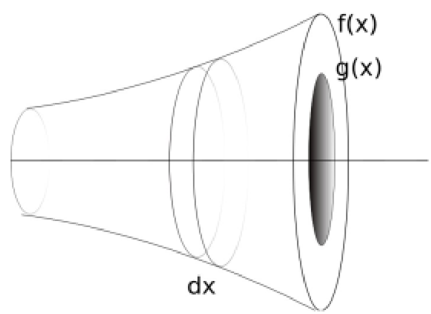
Docente di ruolo nelle scuole secondarie superiori
di MATEMATICA











STAMPA AUTONOMA

DIFFUSIONE GRATUITA

(1^a edizione: dicembre 2023)

Emanuele Castagna -"Lezioni di Matematica" - Vol.2
ISBN: 979-12-210-5058-5

Prefazione

Questo secondo volume, con tutto il programma di un triennio di scuole superiori, esce con fatica, tribolazione, ma recuperato entusiasmo: varie delusioni si sono interposte tra la pubblicazione del primo volume ed il presente ma, conviene sempre domandarsi: *"Quare renovare nos dolorem?"*, dimenticare il male subito ed andare avanti; fatica anche per via di problemi personali di salute che, fortunatamente, sembrano risolti in via definitiva. Tribolazione per via di inaspettati lutti familiari. Il rinnovato entusiasmo è dovuto all'accoglienza ed all'approvazione ricevuta, per la pubblicazione del primo volume, da tipologie assolutamente inaspettate di lettori e per l'aiuto che, ci consta, il libro sta effettivamente fornendo a diversi "portatori d'interesse": in primis siamo contenti che i propri allievi (ed ancora più i genitori dei nostri allievi!) trovino utile approfondire gli argomenti su un testo poco allineato agli standard dell'editoria scolastica e che, comunque, non risulta sicuramente un libro divulgativo nel senso "leggero" del termine. Per altro abbiamo ricevuto ringraziamenti da parte di persone interessate allo studio della Matematica, seppure ormai non più nel "girone degli studenti". Proprio la convinzione che questo volume possa essere parimenti apprezzato ed utilizzato proficuamente da coloro che vogliono apprendere le mirabili opere dell'ingegno matematico, oppure solo "passare un po' di tempo" leggendo di argomenti, che magari si sono studiati "in illo tempore", ma che non si erano adeguatamente capiti o approfonditi, ci ha spinti a completare la scrittura di quanto segue. Sarebbe stato un peccato interrompere tutto, una volta che il lavoro non era solo stato impostato, ma addirittura portato a compimento fino a quasi la fine! Comunque sia, l'impostazione segue l'obbiettivo che ci eravamo prefissati di raggiungere, fin dall'inizio della scrittura del primo capitolo, del primo volume, ovvero seguire un filo logico per la presentazione e lo sviluppo dei vari capitoli della Matematica, in modo che non si presentino regole e tecniche solo per pura erudizione tecnica, ma per capire quali idee hanno sollecitato l'introduzione e lo sviluppo di alcune aree della Matematica. Si è cercato il più possibile di dimostrare tutto quel che si andava affermando e di portare esempi ed applicazioni per la risoluzione dei vari problemi che si possono incontrare parlando di certi argomenti. Deve essere chiaro, comunque, che non si è voluto trascendere i limiti degli studi superiori e quindi, qualcosa -se si è stati fortunati a farsi mettere la pulce nell'orecchio ed ad incuriosirsi di quanto si andava dicendo- dovrà necessariamente essere approfondito con studi ulteriori post-scolastici: ci farebbe così tanto piacere che qualcuno, anche mosso dalla lettura di questo testo, si avvicinasse allo studio della Matematica come percorso universitario di Laurea.

Quasi tutti gli argomenti sono presentati per come vengono insegnati ai propri allievi, nelle varie Classi dell'Istituto scolastico in cui si presta servizio da, ormai, più di tre lustri. Gli esercizi presenti nell'ultimo capitolo, relativi agli argomenti spiegati nei primi quindici capitoli, sono quasi tutti presi dalle varie verifiche scritte effettuate durante questi anni d'insegnamento e, per altro, molte delle tracce proposte sono originali e non sono state "scolasticamente" pensate per "far uscire" risultati carini: anche per questo essi non vengono indicati. Gli esercizi sono proposti per essere risolti per propria soddisfazione personale e, anche, per testare il livello di comprensione di quanto studiato fino a quel punto; per coloro che frequentano un corso scolastico, sarebbe opportuno svolgere gli esercizi con il proprio docente il quale, tra l'altro, non dovrà limitarsi a fare solo quelli presenti nel sedicesimo capitolo di questo libro, ma dovrebbe inventarne tanti altri, magari ispirandosi a quelli del libro, al fine di facilitare la discussione con gli allievi e l'approfondimento degli argomenti trattati.

Ringraziamenti. Si ringraziano gli amici che hanno sostenuto l'autore con incoraggiamenti e suggerimenti, la propria famiglia, che amorevolmente ha sopportato gli stati d'animo non sempre allegri e le momentanee difficoltà. Un ringraziamento particolare agli eccellentissimi proff. ***Gianmarco Bramanti*** e ***Vincenzo Rubino***, con i quali si ha la fortuna di condividere la stessa passione per la didattica, l'opportunità di confrontarsi nella risoluzione di problemi, che sanno stuzzicare curiosità e fantasia e che, in altri tempi, avrebbero sicuramente animato disfide matematiche al pari di *Bernoulli & co.*. Essi hanno suggerito migliorie, corretto le bozze e proposto originali esercizi per il completamento di questo volume. Tra i correttori, un ringraziamento speciale è per un brillante giovane, che sta formandosi proprio in questi anni nello studio entusiastico della Matematica e di cui aspettiamo, fiduciosi, importanti risultati: grazie ***Vittorio Corea.*** Rimane sottinteso che ogni eventuale errore nella presente opera è ascrivibile totalmente all'autore che, comunque, ha già ricevuto un grande aiuto nella correzione delle bozze da parte degli amici più fidati e -sicuramente- più autorevoli di lui sia nello studio, sia nella creazione e sopratutto nell'insegnamento delle Matematiche.

Catanzaro, 01.12.2023

Emanuele Castagna

L'intera opera è stata scritta utilizzando l'ambiente LaTeX in un sistema *Linux,* per cui si ringraziano i creatori e curatori dei relativi progetti per la possibilità offerta di utilizzare questi mezzi informatici nella libera divulgazione di opere d'ingegno e culturali. Le figure sono state realizzate con *Geogebra,* di cui si raccomanda l'utilizzo per chiarire molte delle idee presentate o per approcciare gli esercizi proposti. Per le "scritture autografe" e le immagini "a mano libera", lo strumento principale utilizzato è stato il software *Xournal++* per *Linux*, rilasciato sotto licenza *GNU GPLv2* o successiva.

In copertina: *collage* di immagini scaricate dal sito "Wikimedia Commons", ad opera dell'autore.

“Studiare senza riflettere è inutile.
Riflettere senza studiare è pericoloso”.
(Confucio)

“A coloro che sanno apprezzare i doni gratuiti...

...alle mie figlie meravigliose, alla loro amata
madre ed a tutti i miei più cari amici.”

Indice

Parte 1

Geometria Analitica

(La Geometria di René Descartes)

CAPITOLO 1

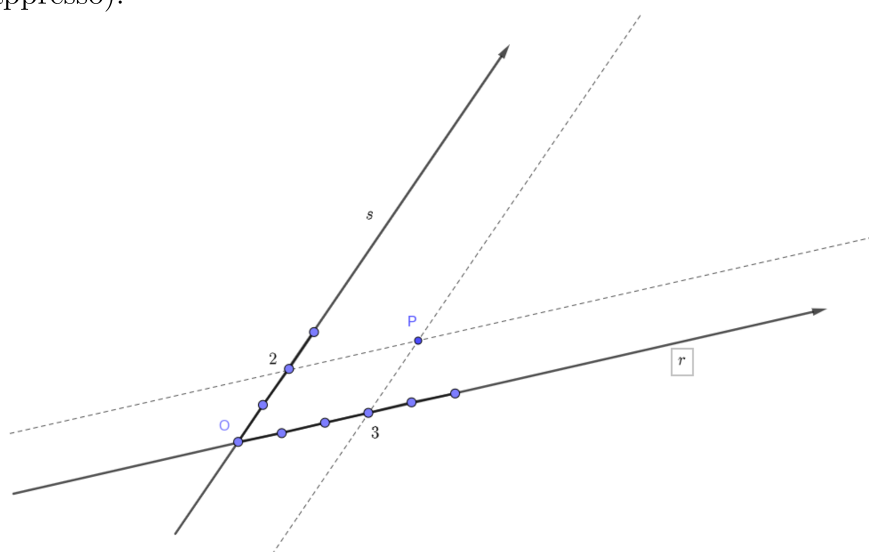
L'idea geniale

1. L'algebra e la geometria si fondono.

Nel 1637, come appendice del saggio filosofico intitolato "Discorso sul metodo", il francese René Descartes (conosciuto in Italia col nome di Cartesio) scrisse un'opera, intitolata *"Geometria"*, fondamentale per lo sviluppo della Matematica occidentale, in cui descrive metodi rivoluzionari che avrebbero portato allo studio delle proprietà di particolari curve ad alla risoluzione di numerosi problemi rimasti fino ad allora aperti. Ma la portata rivoluzionaria delle sue idee andarono ben oltre, dato che tutta la Matematica moderna e la Fisica, per come affrontata ed impostata da Newton o Leibniz e tutti i loro successori, non potrebbe essere sviluppata prescindendo dal metodo di Cartesio. L'idea, in sé, oggi nemmeno sembrerebbe così rivoluzionaria, dato che qualsiasi persona ragionevole la utilizzerebbe per dare indicazioni ai viandanti che chiedessero informazioni sulla posizione di qualche propria meta da raggiungere, ma -in effetti- è da tenere conto che fino alla prima metà del '600, a nessuno era venuto in mente di fare le considerazioni che esporremo a breve e, soprattutto, di portare il ragionamento avanti, al fine di ottenere nuovi teoremi o rilevanti applicazioni nell'area tecnica-scientifica del sapere umano. Supponiamo che vi troviate in una città di cui non conoscete le strade e che dobbiate chiedere informazioni per arrivare a casa di un vostro amico: un gentile signore vi indicherà la posizione dicendovi, ad esempio, "andate avanti di tre isolati, poi girate a destra e proseguite per altre due traverse... sulla sinistra vedrete il portone che state cercando". Ecco, a parte le indicazioni date, che avrebbero ben potuto essere altre, se vi foste trovati da qualche altra parte della città, il punto chiave del discorso è che quel signore -e voi stessi- per dirvi come arrivare dal vostro amico, ha considerato la posizione attuale come *"l'origine"* di un *sistema di riferimento* lungo cui muovervi in due direzioni: avanti di tre isolati e poi a destra per altre due traverse. Questa semplice idea è l'osservazione fatta da Cartesio [1] per fondare **il metodo delle coordinate.**

[1]Egli, però, narra che gli sia venuta in mente pensando a come localizzare gli obbiettivi verso cui lanciare bombe con mortaio, quando era ufficiale dell'esercito.

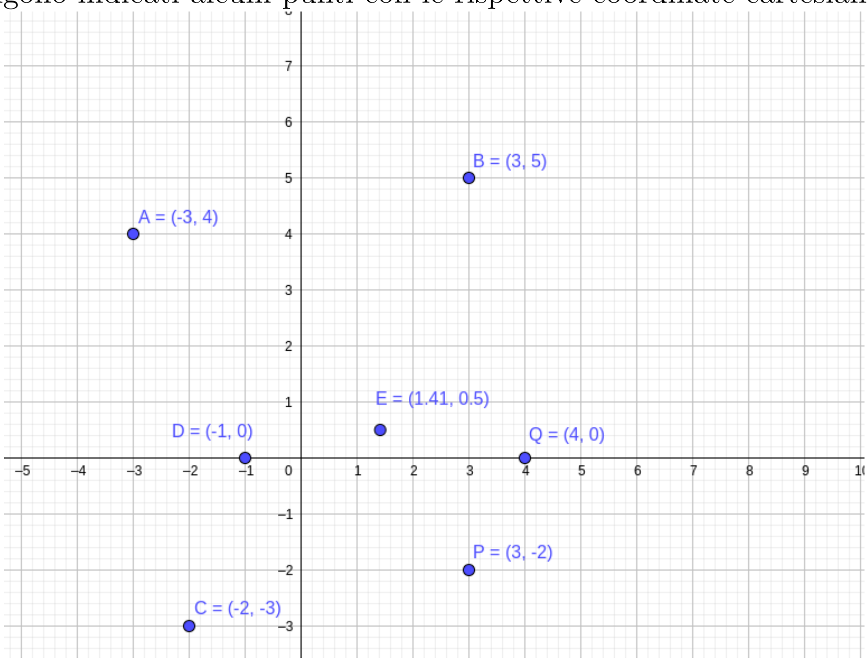
1.1. La geometria cartesiana. Consideriamo due rette non parallele, il punto d'intersezione la chiamiamo *origine* del sistema di riferimento. Risulta chiaro che ogni punto del piano, compreso tra le due rette oppure che appartenga ad una di esse, può essere raggiunto da un movimento che avviene nelle direzioni dei due assi. Si scelga allora un'unità di misura ed un verso di percorrenza degli assi, a partire dall'origine del sistema di riferimento, per determinare i movimenti da effettuare lungo le due direzioni. A questo punto, ogni punto del piano verrà identificato **univocamente** da una coppia di numeri reali, che indicano i movimenti da effettuare lungo le due direzioni, a partire dall'origine, per raggiungere il punto stesso (come nella figura d'appresso).



Al punto P saranno associati due numeri: il 3, che indica il movimento lungo la direzione dell'asse r ed il 2, che indica lo spostamento da effettuarsi lungo la direzione dell'asse s. Ora è chiaro che chiunque può scegliere gli assi per come gli piace, specie se deve "adattarsi" a qualche riferimento fisicamente già presente [2], ma Cartesio suggerisce di considerare le due rette di riferimento, **perpendicolari** tra di loro. La perpendicolarità è una condizione privilegiata, dato che, come presto vedremo, ci permetterà di considerare triangoli rettangoli, al fine dei nostri ragionamenti e, in ultima analisi, consente di applicare il *Teorema di Pitagora* senza patemi d'animo. Inoltre *si conviene* di chiamare **l'asse orizzontale** col nome di *asse delle ascisse* e **l'asse verticale** col nome di *asse delle ordinate.* Il primo movimento da indicare sarà

[2]Ad esempio, se ci trovassimo per strada e davvero chiedessimo indicazioni sulla meta da raggiungere nel centro storico di una città, difficilmente le strade saranno messe lungo direzioni comode.

lo spostamento lungo l'asse orizzontale e successivamente quello lungo l'asse verticale [3], per cui **il primo numero** della coppia che indica la posizione del punto nel piano indicherà lo spostamento lungo l'asse delle ascisse, mentre il secondo, lo spostamento lungo l'asse delle ordinate. Le coppie di numeri reali (a, b), con le convenzioni testé citate, si chiamano **coordinate cartesiane** dei punti. Nella figura seguente, vengono indicati alcuni punti con le rispettive coordinate cartesiane.



È utile ricordare la definizione di **prodotto cartesiano** tra due insiemi, per come incontrata negli studi del primo biennio: dati due insiemi A e B, il prodotto cartesiano è l'insieme di tutte le coppie ordinate di elementi, il primo preso da A ed il secondo da B, ovvero

$$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A \quad \text{e} \quad b \in B\}.$$

Se "spalmiamo" gli elementi dell'insieme $A = \mathbb{R}$ sull'asse delle ascisse e di B, anche esso uguale ad $\mathbb{R}$, sull'asse delle ordinate, allora è chiaro che questo prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, indicato più compattamente con $\mathbb{R}^2$, rappresenta tutti i punti del piano, proprio attraverso l'identificazione, *"per coppie di numeri reali"*, suggerita da Cartesio.

2. La distanza tra due punti

Ora che sappiano identificare la posizione dei punti nel piano, la prima cosa che ci domandiamo è: "C'è un modo per determinare la

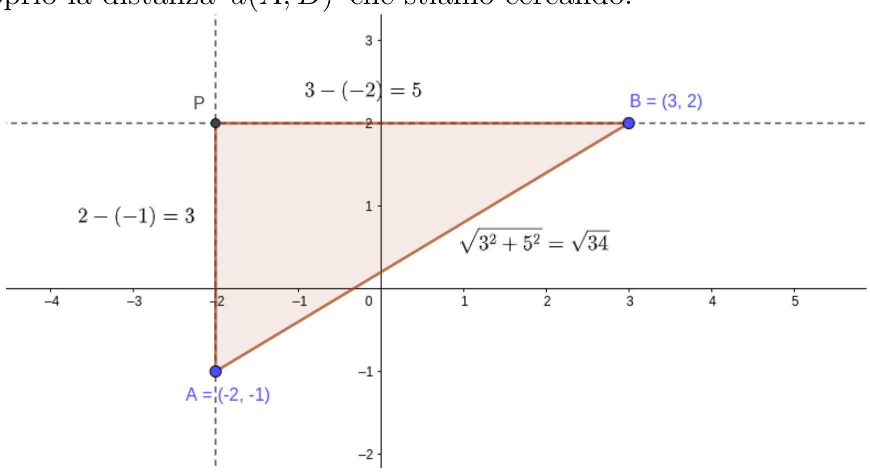
[3] D'altra parte prima ci muoviamo "avanti-indietro" sul piano dove stiamo e poi, in caso "sopra-sotto" utilizzando l'ascensore o le scale.

distanza tra due punti di coordinate note?". La risposta è chiaramente sì: le coordinate cartesiante conservano le informazioni geometriche e la mutua distanza tra punti è un'informazione di tipo geometrico [4]!

Osservazione: Prima di procedere, è facile convincersi che l'ordinata di un punto rappresenta **l'altezza rispetto all'asse orizzontale** del punto stesso e "mutatis mutandi" l'ascissa rappresenta **l'altezza** del punto rispetto all'asse verticale.

Nel proseguo diremo **verticale** una retta parallela all'asse delle ordinate e **orizzontale** un asse parallelo all'asse delle ascisse

Considerando due punti qualsiasi del piano, A di coordinate (a_1, a_2) e $B = (b_1, b_2)$ a meno che essi non siano allineati in verticale o in orizzontale, nel qual caso la distanza è ovviamente la differenza tra l'altezza maggiore e l'altezza minore, tracciamo attraverso uno dei punti un asse verticale ed attraverso l'altro un asse orizzontale. Queste due rette si incontreranno in un punto (che nella figura di seguito indichiamo con P): il triangolo $\overline{ABP}$ è rettangolo in P ed i cateti sono di lunghezza nota, poiché i punti A e P così come B e P si troveranno allineati o in verticale o in orizzontale. Si può quindi applicare il Teorema di Pitagora per determinare la lunghezza dell'ipotenusa $\overline{AB}$ che sarà proprio la distanza $d(A, B)$ che stiamo cercando.



In generale, considerando che elevando al quadrato un numero, esso risulta sempre positivo e che $d(A, C) = |a_1 - b_1|$ e $d(B, C) = |a_2 - b_2|$

[4]Ricordiamo che la distanza non è altro che il segmento che ha come estremi i due punti, di cui siamo interessati, in questo caso, alla sua misura.

allora, essendo questi due numeri le lunghezze dei cateti, si ha:

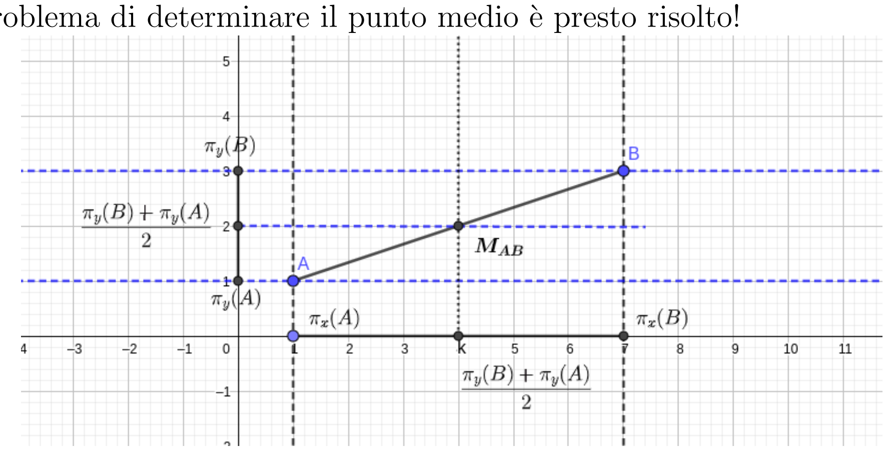
$$d(A,B)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}.$$

Praticamente conviene "incolonnare" le coordinate dei due punti ed effettuare la sottrazione "elemento per elemento", i numeri che si ottengono, che indichiamo con Δx e Δy rispettivamente [5], si elevano al quadrato e si sommano, per estrarne, infine, la radice quadrata:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{A=} & (& a_1 & , & a_2 &) \\ \text{B=} & (& b_1 & , & b_2 &) \\ \hline & & \boxed{\Delta x = a_1 - b_1} & , & \boxed{\Delta y = a_2 - b_2} & \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad d(A,B)=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

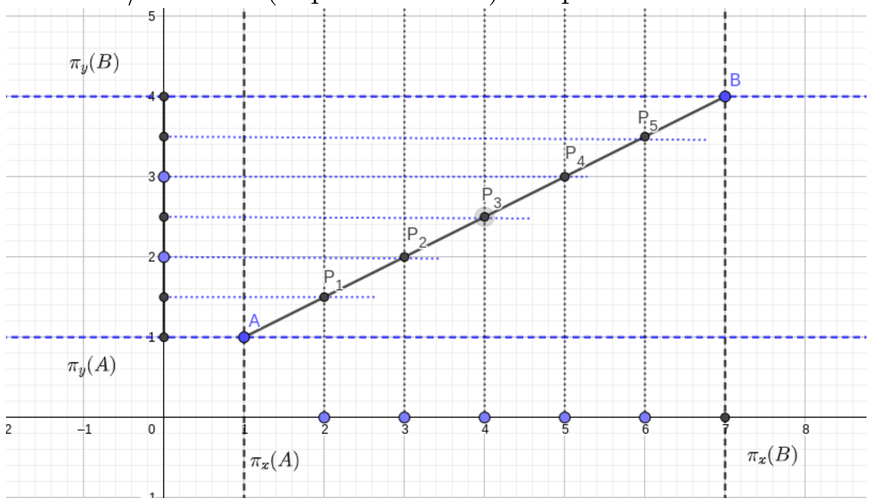
2.1. Punti medi. Supponiamo di voler inserire, tra A e B, il punto medio M_{AB} oppure che si vogliano inserire 5 punti medi equidistanti tra A e B. Ribadendo il concetto fondamentale che *le coordinate conservano l'informazione geometrica,* ci si può avvalere del Teorema di Talete per ottenere quello che vogliamo. Ricordiamo che dato un fascio di rette parallele, la congruenza dei segmenti su una trasversale è invariante qualsiasi sia la posizione assunta dalla trasversale. Per cui, se consideriamo gli assi cartesiani con delle trasversali, così come la retta su cui giace il segmento di estremi A e B, dividendo a metà i segmenti sugli assi cartesiani, si dividerà a metà anche il segmento $\overline{AB}$, come nella figura seguente esplicitato. Ma l'altezza media tra due altezze non è altro che la media aritmetica tra di esse, quindi il problema di determinare il punto medio è presto risolto!



---

[5]Dato che, solitamente l'asse delle ascisse è indicato anche come **asse** x e quello delle ordinate come **asse** y ed il simbolo Δ sta per **differenza tra,** ovvero **incremento di** a seconda su dove si voglia puntare l'attenzione.

Se invece vogliamo inserire 5 punti equidistanziati tra A e B [6], non dobbiamo far altro che dividere ciascuna proiezione [7] del segmento $\overline{AB}$ in sei parti uguali [8] e considerare i punti ottenuti per la suddivisione come ascisse/ordinate (rispettivamente) dei punti cercati.



Anche se *non crediamo sia opportuno "caricare" formule su formule,* comunque le diamo per completezza. Si abbiano, pertanto, i punti A e B di coordinate rispettivamente (a_1, a_2) e (b_1, b_2), il punto medio è dato da

$$M_{AB} = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right),$$

nell'esempio precedente in figura, $A = (1,1)$, $,B = (7,3)$ quindi $M_{AB} = \left(\frac{1+7}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (4,2)$. Nel secondo esempio, in cui si vogliono inserire 5 medi aritmetici tra $A = (1,1)$ e $B = (7,4)$, si trova "il passo" dell'incremento da a_1 fino a b_1 e quello da a_2 fino a b_2 semplicemente con la divisione $\frac{\Delta x}{6}$ e $\frac{\Delta y}{6}$ rispettivamente e poi si sommano questi incrementi a partire dalle coordinate di A per cinque volte. Quindi $\frac{7-1}{6} = 1$ e $\frac{4-1}{6} = \frac{1}{2}$ sono i valori cercati ed i punti avranno coordinate

$$P_1 = \left(1+1, 1+\frac{1}{2}\right) = \left(2, \frac{3}{2}\right), \quad P_2 = \left(2+1, \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right) = (3,2),$$

$$P_3 = \left(3+1, 2+\frac{1}{2}\right) = \left(4, \frac{5}{2}\right), P_4 = \left(4+1, \frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right) = (5,3)$$

[6]Quelli che si chiamano **cinque medi aritmetici**.

[7]Ricordiamo che la proiezione di un segmento su una retta si ottiene come segmento i cui estremi sono i piedi delle distanze del segmento dato dalla retta stessa (quindi "si proiettano ortogonalmente gli estremi del segmento sulla retta").

[8]Perché sei?

ed in ultimo:

$$P_5 = \left(5+1, 3+\frac{1}{2}\right) = \left(6, \frac{7}{2}\right).$$

In generale, se si vogliono inserire n medi aritmetici, basta trovare i due incrementi lungo gli assi coordinati

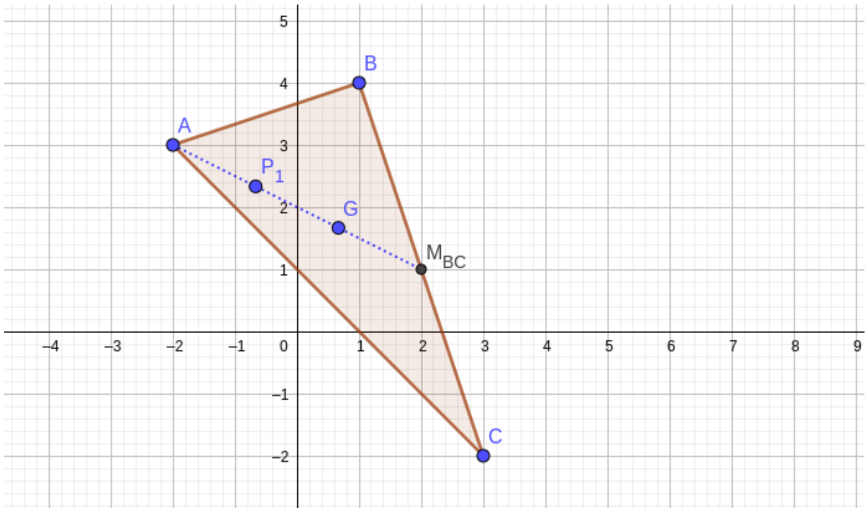
$$\Delta x = \frac{b_1 - a_1}{n+1} \quad \text{e} \quad \Delta y = \frac{b_2 - a_2}{n+1}$$

e sommarli ripetutamente a partire da A, per ottenere i punti medi aritmetici cercati

$$P_k = (a_1 + k\,\Delta x, a_2 + k\,\Delta y)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

2.2. Il baricentro tra tre punti. Sfruttiamo quanto detto finora per determinare il baricentro tra tre punti, che ricordiamo essere il punto d'intersezione delle tre mediane, qualora considerassimo, i tre punti dati, come i vertici di un triangolo. Tale punto ha, comunque, un'altra proprietà notevole, come dimostrato nel primo biennio di corso, esso ripartisce ciascuna mediana in due parti, l'una doppia dell'altra. Allora potremmo pensare di determinare il baricentro tra tre punti semplicemente trovando dapprima il punto medio tra due di essi e poi il punto che divide il segmento tra il vertice rimanente ed il punto medio appena trovato il due parti, l'una doppia dell'altra (il che equivale ad inserire due medi aritmetici e poi prendere le coordinate del secondo). Procediamo dapprima con un esempio e poi con una formula di tipo generale. Siano dati i punti $A = (-2, 3)$, $B = (1, 4)$ e $C = (3, -2)$. Per come indicato precedentemente scegliamo due punti e ci troviamo prontamente il loro punto medio, ad esempio: $M_{BC} = (2, 1)$. Tra A e M_{BC} inseriamo due medi aritmetici: $\Delta x = \frac{2-(-2)}{3} = \frac{4}{3}$ e $\Delta y = \frac{1-3}{3} = -\frac{2}{3}$. Il baricentro è il secondo medio aritmetico, pertanto ha le coordinate del punto G che determiniamo qui di seguito:

$$G = (-2 + 2\Delta x, 3 + 2\Delta y) = \left(-2 + \frac{8}{3}, 3 - \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right).$$



In generale, se abbiamo i punti di coordinate $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $C = (c_1, c_2)$, risulterà chiaro che $M_{BC} = \left(\frac{b_1+c_1}{2}, \frac{b_2+c_2}{2}\right)$ e la divisione del segmento $\overline{AM_{BC}}$ in tre parti uguali sarà operato da $\Delta x = \frac{\frac{b_1+c_1}{2}-a_1}{3}$ e $\Delta y = \frac{\frac{b_2+c_2}{2}-a_2}{3}$. Il baricentro G, pertanto, avrà coordinate:

$$G = (a_1 + 2\Delta x, a_2 + 2\Delta y) = \left(a_1 + \frac{b_1 + c_1 - 2a_1}{3}, a_2 + \frac{b_2 + c_2 - 2a_2}{3}\right) =$$

$$= \left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right).$$

Osservazione: Si poteva ottenere lo stesso risultato per via geometrica, utilizzando il Teorema di Talete (in forma generale) che, ricordiamo, afferma essere invariante, sotto un fascio di rette parallele, il rapporto tra i segmenti che si formano su una stessa trasversale, qualsiasi posizione assuma quest'ultima rispetto al fascio stesso [9].

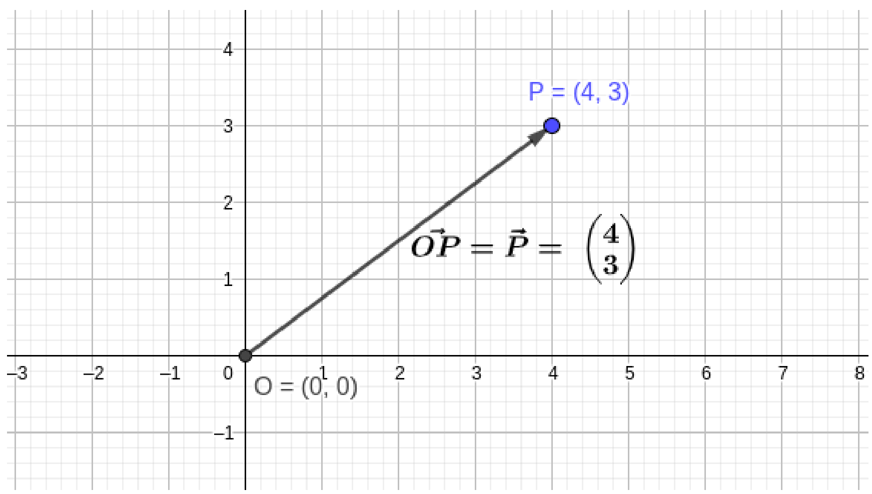
3. Identificazione affine del piano

Facciamo ora una considerazione tanto semplice quanto importate. Se noi consideriamo un punto P qualsiasi di coordinate (p_1, p_2) ed il segmento con estremi nell'origine del sistema di riferimento $O(0, 0)$ e $P(p_1, p_2)$, orientato da O verso P, ovvero se noi consideriamo il

[9] Si invitano i lettori interessati a produrre la dimostrazione che le coordinate del baricentro si determinano facendo la media aritmetica delle tre coordinate omologhe, tramite l'applicazione diretta del Teorema di Talete sulle proiezioni di una mediana sugli assi cartesiani.

vettore applicato nell'origine che punta ed arriva sul punto P, ebbene, esso è unico [10]. Ovvero possiamo stabilire una corrispondenza biunivoca [11] tra i punti del piano ed i vettori applicati nell'origine, il cui secondo estremo è proprio il punto P. Tale corrispondenza identifica, pertanto, ogni punto con un vettore applicato nell'origine e, viceversa, ogni vettore applicato nell'origine con il punto su cui esso arriva: questo fatto viene riferito come *identificazione affine del piano.* Ora, possiamo dire che $\overrightarrow{OP}$, o semplicemente $\vec{P}$, è il vettore che collega O con P e dato che questo punto, cartesianamente, possiede delle coordinate (p_1, p_2), allora queste stesse coordinate possono essere *interpretate* come le componenti del vettore $\vec{P}$.
Scriviamo quindi la seguente relazione di identificazione:

$$P\,(p_1, p_2) \quad \longleftrightarrow \quad \vec{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$



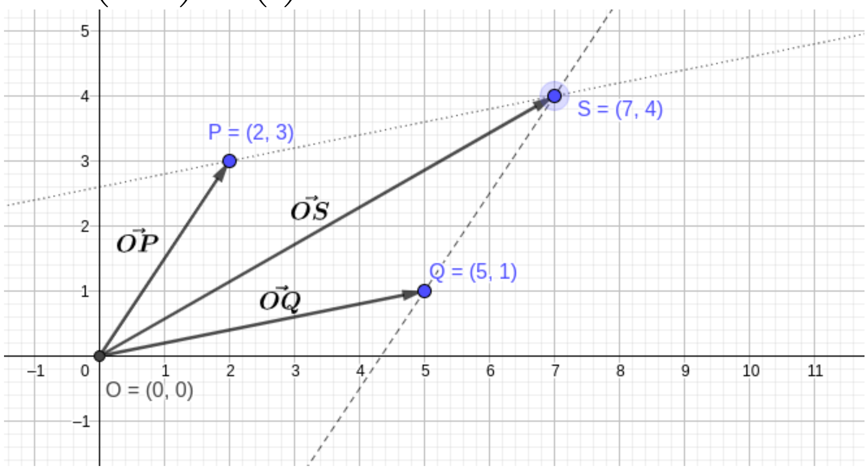
3.1. Operazioni con i vettori. Definiamo la somma tra due vettori nel modo più semplice e diretto possibile, ovvero la definiamo come somma "componente per componente" [12]. Per esempio, se $\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

[10] Evidentemente il segmento di $\overline{OP}$ è unico e da questo segue questa banale osservazione.

[11] Ricordiamo che una corrispondenza biunivoca posta tra due insiemi è tale che ad ogni elementi di un insieme corrisponde un unico elemento dell'altro e viceversa -in inglese, molto opportunamente, la definiscono "one-to-one"-.

[12] Ovvero si sommino le componenti omologhe per ottenere il vettore somma.

e $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ allora la somma è: $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{S}$, le cui componenti sono $\vec{S} = \vec{P} = \begin{pmatrix} 2+5 \\ 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.



Osserviamo che la definizione data corrisponde "geometricamente" alla somma dei vettori **secondo la regola del parallelogramma.**
Accetteremo l'abuso di notazione per il quale le componenti del vettore verranno indicate anche come coordinate cartesiane del punto corrispondente secondo l'identificazione affine di cui prima (e viceversa) e scriveremo ancora *il vettore di componenti* $\overrightarrow{OP} = (p_1, p_2)$, indicando quindi le coordinate cartesiane quasi come se esse fossero il vettore stesso applicato nell'origine. Forti di questo abuso, in cui però continueremo a distinguere se consideriamo quella coppia di numeri come coordinate (di un punto) o componenti (di un vettore), definiamo in generale la somma di due vettori $\vec{P}$ e $\vec{Q}$:

$$\vec{P} + \vec{Q} = (p_1, p_2) + (q_1, q_2) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2).$$

Osservando la figura di cui sopra, se noi sommiamo i segmenti $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$ facendo coincidere l'estremo P del segmento $\overline{OP}$, tenuto fermo esattamente dove sta, con l'estremo O di $\overline{OQ}$, mantenendo $\overline{OQ}$ parallelo al vettore originiario, arriviamo con l'ultima freccia sul punto S. Stessa cosa se avessimo tenuto fermo $\overline{OQ}$ e gli avessimo sommato "parallelamente a se stesso" il segmento $\overline{OP}$. Questo vuol dire che ogni somma di vettori può essere vista come un vettore che è applicato nell'origine del sistema di riferimento. D'altra parte, se $\vec{S} = \vec{P} + \vec{Q}$ allora si può definire la differenza tra $\vec{S}$ e $\vec{P}$ come il vettore $\vec{Q}$ che sommato a $\vec{P}$ dà $\vec{S}$. Nel caso della figura precedente, il vettore differenza $\vec{Q} = \vec{S} - \vec{P}$ corrisponde a quel segmento orientato $\overrightarrow{PS}$ corrispondente alla “diagonale minore” del parallelogramma, due lati del quale sono $\overline{OS}$ e $\overline{OP}$. Nei fatti il vettore “fisicamente” è $\overrightarrow{PS}$ ottenuto sottraendo le componenti omologhe di $\vec{S}$ e $\vec{P}$, quindi $\overrightarrow{PQ} = (7-2, 4-3) = (5,1)$ ma “geometricamente” esso viene trasportato con il suo punto di applicazione in O anziché in P, ottenendo esattamente il vettore $\overrightarrow{OQ}$.

3.2. Lunghezza di un vettore e distanza tra due punti. Se consideriamo un vettore applicato nell’origine, di componenti (p_1, p_2), evidentemente il Teorema di Pitagora dirà quanto esso è lungo, semplicemente sommando i quadrati dei cateti ed estraendone la radice quadrata. Osserviamo che $\sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{p_1 \cdot p_1 + p_2 \cdot p_2}$ e quindi definiamo questo *fondamentale tipo di moltiplicazione* detto **prodotto scalare** tra due vettori come *la somma del prodotto delle componenti omologhe:*

$$< \vec{P}, \vec{Q} >= p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2.$$

Questo “prodotto” gode di importanti proprietà di cui, per ora, non parliamo, riservando un capitolo intero di questo volume, per dettagliare ed approfondire il discorso sui vettori; fin da ora, comunque osserviamo che la lunghezza di un vettore può essere scritta in tal guisa:

$$L(\vec{P}) = \sqrt{< \vec{P}, \vec{P} >}$$

o, se scriviamo compattamente $\vec{P}^2 =< \vec{P}, \vec{P} >$ tramite la tautologica scrittura

$$L(\vec{P}) = \sqrt{\vec{P}^2},$$

da cui il motivo di indicare la lunghezza del vettore con la denominazione di **modulo**, in definitiva:

$$|\vec{P}| = L(\vec{P}) = \sqrt{\vec{P}^2} = \sqrt{< \vec{P}, \vec{P} >}.$$

Ora, la distanza tra due punti, evidentemente, corrisponde alla lunghezza del vettore “differenza” tra i vettori corrispondenti ai due punti stessi: in effetti, il segmento che li congiunge (a parte il verso di percorrenza) è proprio il vettore che sommato ad uno di essi dà l’altro. Per cui, quando si cerca la distanza tra i due punti A e B, si chiede -in maniera garbata- di determinare il modulo del vettore $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Da questo deriva la "regola pratica" di cui abbiamo parlato poche pagine prima, ovvero trovare la differenza componente per componente [13], elevarle al quadrato [14] ed estrarre la radice quadrata.

4. Le coniche

Nel trattato di Geometria del 1637, scritto da Cartesio in cui illustra il suo metodo delle coordinate, egli rivolge l'attenzione alla risoluzione di un buon numero di problemi riguardanti *le coniche,* curve determinate dalla sezione di un cono (matematico) [15] con dei piani opportuni. Queste intersezioni tra cono e piano originano, dal punto di vista cartesiano, delle relazioni "quadratiche", ovvero per ciascuna di queste curve si può scrivere una equazione di secondo grado e dalle proprietà di queste equazioni, discendono in modo diretto le proprietà delle curve stesse. In effetti, anticamente le coniche erano state ampiamente studiate e l'argomento risultava ben sviluppato, soprattutto ad opera di Apollonio di Perga che nel III secolo a.C. scrisse un trattato in otto volumi intitolato semplicemente "Le coniche". Però la trattazione che ne dà Cartesio risulta molto più agevole e sposta il compito della dimostrazione delle proprietà geometriche dalla Geometria all'Algebra. Inoltre, dalla conoscenza di quantità "analitiche" derivanti dalle equazioni delle coniche, sir. Isaac Newton riuscì a dimostrare, una volta per tutte, che le traiettorie dei pianeti sono ellittiche, dando una definitiva giustificazione della teoria eliocentrica di Copernico e deducendo le tre Leggi di Keplero dai soli tre principi della dinamica che enunciò nella sua monumentale opera **"Philosophiae Naturalis Principia Mathematica"** del 1687, opera che sancisce la nascita della Fisica moderna, per come la intendiamo oggi noi stessi.

Nel 1822 il matematico belga G.P.Dandelin dimostra in modo molto elegante e semplice che tutte le coniche si possono considerare come *luoghi geometrici* [16], considerando dei punti "speciali" detti **fuochi** o delle rette, dette **direttrici.** Il ragionamento si basa nell'inserire due sfere S_1 ed S_2 tangenti sia al cono che al piano secante che genererà la conica. In particolare consideriamo la seguente figura, per quella curva che si ottiene considerando il piano di taglio non parallelo alla

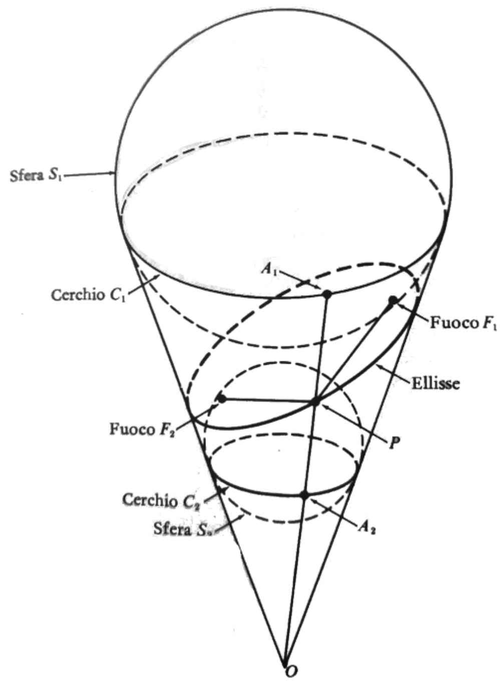
[13] Che corrisponde a trovare le componenti del vettore $\overrightarrow{AB}$.

[14] Che corrisponde a trovare $< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} >$.

[15] In Matematica un cono è *bi-falde,* ovvero è un cono doppio in cui gli angoli al vertice sono anche opposti al vertice e, per altro, i due coni si estendono all'infinito in entrambe le direzioni.

[16] Ricordiamo che un *luogo geometrico* è un insieme di punti che godono tutti e soli di una stessa proprietà.

"generatrice" del cono e che intersechi solo una falda del cono stesso: la conica in questo caso si chiamerà **ellisse** [17].



Le sfere toccano il cono lungo due cerchi paralleli C_1 e C_2. I punti di contatto di queste sfere con il piano di taglio li indichiamo F_1 ed F_2 e li chiamiamo **fuochi.**
Se si considera un punto P arbitrario sull'ellisse e tiriamo la retta che passa dal vertice del cono e per il punto P, essa toccherà anche le due sfere nei punti A_1 e A_2. Ora, le distanze $\overline{PF_1}$ e $\overline{PA_1}$ sono congruenti essendo entrambe segmenti di tangenti tracciati dalla stesso punto P alla circonferenza C_1 e, analogamente, si può dire che $\overline{PF_2} \cong \overline{PA_2}$.

Sommando membro a membro le due uguaglianze si ottiene:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} \cong \overline{PA_1} + \overline{PA_2}.$$

Ma quest'ultima somma corrisponde alla distanza tra le due circonferenze parallele tra loro, ovvero

$$\overline{PA_1} + \overline{PA_2} = \overline{A_1A_2}$$

che è costante per qualsiasi scelta del punto P. Pertanto si può asserire la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1. *L'**ellisse** è il luogo geometrico dei punti la cui somma delle distanze da due punti prefissati è costante.*

□

[17] Gli altri due casi sono dati dall'**iperbole,** ottenuta quando il piano di taglio interseca entrambe le falde del cono e la **parabola,** ottenuta per il piano di taglio parallelo alla retta generatrice del cono. In verità c'è anche un caso degenere, che determina due rette, ottenute quando l'asse "centrale" del cono appartiene al piano di taglio: le rette che si ottengono sono "le generatrici" del cono, ovvero quelle che lo delimitano "lateralmente".

Ragionamenti analoghi si possono fare per l'iperbole, considerando le sfere in ciascuna delle due porzioni del cono e per la parabola, ricorrendo ad un sfera tangente nel suo fuoco F al piano secante [18]. Si invitano i lettori interessati a produrre le dimostrazioni, secondo le indicazioni testé date, per le seguenti due affermazioni:

Proposizione 2. *L'**iperbole** è il luogo geometrico dei punti la cui differenza delle distanze da due punti prefissati è costante.*

□

Proposizione 3. *La **parabola** è il luogo geometrico dei punti le cui distanze da un punto prefissato ed una retta data sono uguali.*

□

Prima però di addentrarci nello studio delle coniche (ellissi, iperbole e parabola), conviene parlare di un altro *luogo geometrico* di cui, finora, non avevamo nemmeno lontanamente l'idea che potesse essere definito tale: ci stiamo riferendo alla **retta.** Prima dell'avvento della geometria cartesiana, la retta non poteva assolutamente essere definita in alcun modo: era infatti data come "ente primitivo", di cui noi tutti abbiamo un'idea (innata) e che poteva essere unicamente caratterizzata da assiomi e relazioni con altri enti primitivi (ad esempio, punti o piani), esattamente per come abbiamo imparato a fare durante lo studio della Geometria Euclidea. Grazie all'introduzione del sistema di riferimento e, in particolare, al metodo delle coordinate, la retta può essere definita tramite una sua proprietà caratteristica che è **l'invarianza della "pendenza"** calcolata tra tre suoi punti qualsiasi. Vedremo meglio, tra breve, a cosa ci riferiamo di preciso.

5. Equazioni analitiche e relazioni tra coordinate.

Ricordiamo che una relazione è definita come "sottoinsieme del prodotto cartesiano", ovvero come l'insieme di solo alcune coppie (a, b) appartenenti all'insieme $A \times B$. Nel caso che ci interessa ora, $A = B = \mathbb{R}$ e vorremmo selezionare solo alcuni punti tra tutti quelli presenti nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$. L'idea è che se noi tracciamo una particolare linea con qualche criterio "geometrico", allora tra le ascisse e le ordinate dei punti della figura, che abbiamo tracciato, deve esserci qualche relazione. Ora, le relazioni possono essere di vari tipi, ad esempio *di equivalenza,* o anche *d'ordine.* Notevoli relazioni che ci permetteranno di *tracciare*

[18] Questa sfera risulterà tangente al cono lungo un cerchio il cui piano taglia il piano a cui appartiene la parabola lungo una retta detta **retta direttrice** della parabola.

figure in modo particolarmente efficace sono quelle **funzionali.** Rimandiamo a dopo la discussione delle figure ottenibili tramite relazioni funzionali e consideriamo invece delle relazioni ancora più semplici. Al fine di procedere con ordine, immaginiamo che tra le ascisse e le ordinate dei punti, che noi diciamo appartenere ad una particolare figura, si possa stabilire un relazione e scriviamo, per questo, che esiste un legame che tutti i punti della figura in considerazione devono soddisfare. Se γ è la "curva" tracciata e $P \in \gamma$ ha coordinate (p_1, p_2), allora possiamo scrivere che esiste la relazione $p_1 \mathcal{R}\, p_2$ se e soltanto se p_1 e p_2 soddisfano ad una equazione del tipo $F(x, y) = 0$. Con questo intendiamo che p_1 e p_2 sostituiti come valori dentro l'equazione [19], danno il valore zero: $F(p_1, p_2) = 0$. Una relazione del tipo data or ora viene detta semplicemente **equazione analitica** di γ. Pertanto, a costo si sembrare ed essere ripetitivi, possiamo dire che:

> *Una equazione analitica è una relazione che lega le ascisse alle ordinate dei punti che appartengono ad un dato oggetto geometrico.*

In breve, se $P(p_1, p_2) \in \gamma$ e l'equazione analitica della figura γ è $F(x, y) = 0$ allora $F(p_1, p_2) = 0$ e viceversa, i punti le cui coordinate soddisfano all'equazione $F(x, y) = 0$ sono tutti punti della figura γ. Tra tutte le relazioni del tipo $F(x, y) = 0$ quelle più semplici da studiare sono date da equazioni del tipo $y = E(x)$ dove con $E(x)$ intendiamo un'espressione che calcola il valore dell'ordinata y una volta fissato il valore dell'ascissa x. Equazioni di questo tipo, evidentemente, sono relazioni funzionali e quando è possibile descrivere l'oggetto geometrico tramite una relazione del genere, allora si dice che si è data una *rappresentazione esplicita* della curva. Se, invece, non è possibile rendere esplicitamente il valore delle ordinate tramite una espressione delle ascisse, allora l'equazione $F(x, y) = 0$ si dice definire "la curva" in *forma implicita.*

La geometria cartesiana viene conosciuta, oggigiorno, col nome di **Geometria Analitica,** dato che si occupa -essenzialmente- di analizzare le equazioni che definiscono i vari oggetti geometrici per determinare le caratteristiche delle figure a cui sono associate.

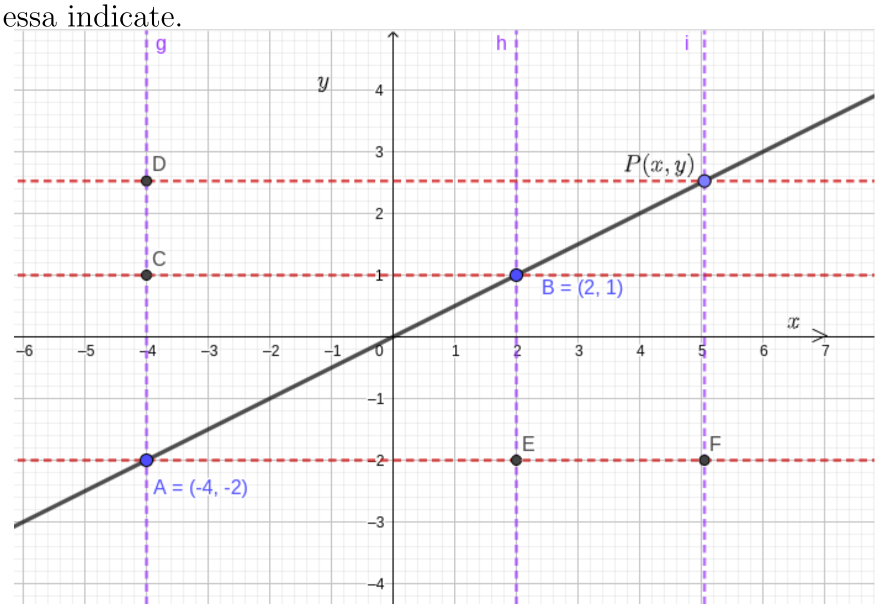
---

[19] Questa, d'altra parte, è la condizione che essi costituiscono una soluzione dell'equazione.

CAPITOLO 2

La retta

La più semplice di tutte le linee che si possa tracciare nel piano è una retta. Ricordiamo che per due punti passa una sola retta, che si dice, pertanto, determinata da essi. Quale relazione dovranno soddisfare tutti i punti di quella determinata retta, che passa da due punti dati nel piano? se è vero, come è vero, che due punti determinano la retta, allora la loro conoscenza deve bastare per definire in modo netta e chiara quali siano tutte le coordinate degli altri punti di quella retta! Consideriamo la seguente figura e, in riferimanto ad essa, le quantità in essa indicate.



Vogliamo trovare la relazione a cui deve soddisfare la coppia di coordinate (x, y) di un punto generico P appartenente alla retta passante per il punto A, di coordinate $(-4, -2)$ e B di coordinate $(2, 1)$. Dopo questo esempio specifico, faremo il discorso in generale. Guardando la figura e consideranto il Teorema di Talete, sia rispetto al fascio (tratteggiato) di rette verticali, sia rispetto al fascio di rette orizzontali, possiamo imporre le seguenti coppie di proporzioni:

$$\overline{AE} : \overline{EF} = \overline{AB} : \overline{BP}$$

e

$$\overline{AB} : \overline{BP} = \overline{AC} : \overline{CD};$$

mettendo assieme queste uguaglianza si ricava che deve essere

$$\overline{AE} : \overline{EF} = \overline{AC} : \overline{CD}.$$

Ora riscriviamo questa secondo le quantità indicate nella figura:

$$(2 - (-4)) : (x - 2) = (1 - (-2)) : (y - 1)$$

ovvero

$$6 : (x - 2) = 3 : (y - 1).$$

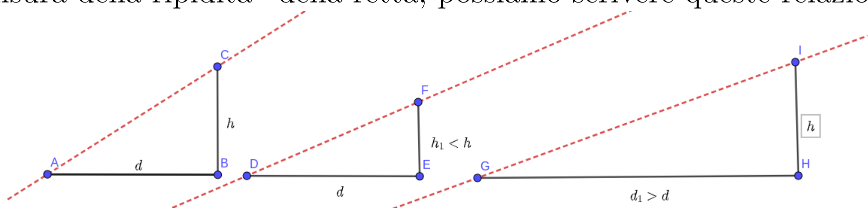
Quest'ultima relazione è l'equazione cercata: la riscriviamo in modo "più simpatico" e comprensibile tramite una equazione esplicita.

$$y - 1 = \frac{3}{6} \cdot (x - 2); \quad y = \frac{1}{2}x - \cancel{1} + \cancel{1}; \quad \boxed{y = \frac{1}{2}x}.$$

Osserviamo intanto che il punto A ha le coordinate che soddisfano -ovviamente- all'equazione trovata, infatti $-2 = \frac{1}{2} \cdot (-4)$; inoltre anche per B si può dire la stessa cosa: infatti $1 = \frac{1}{2} \cdot 2$. Però ora si possono trovare le coordinate di tutti gli altri punti, oppure anche solo controllare se un punto sta o no su quella retta. Ad esempio, quale punto di ascissa 4 sta sulla retta? basta mettere nell'equazione trovata il valore 4 a posto della x e calcolare il valore di y : $y = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$, per cui il punto $(4, 2)$ sta sulla retta e nessun altro punto con ascissa 4 può stare su quella stessa retta. La cosa rilevate è che alla stessa equazione saremmo potuti arrivare attraverso un'altra via, che non tiene in considerazione -esplicitamente- il Teorema di Talete. Procediamo in quest'altro modo, per altro molto significativo ed utile per capire appieno l'equazione analitica della retta.

1. Pendenza

Il punto di partenza è definire una quantità che rappresenti opportunamente il modo di crescere/decresce della retta. Un po' come farebbe un operaio che, anche non essendo stato un eccellente studente, dovesse risolvere il problema di portare una carriola carica di cemento all'interno di un edificio rialzato di un gradino rispetto all'esterno. Sapendo che "più ripida è la salita" e più fatica dovrebbe fare, egli sceglierà una "rampa" la più lunga possibile. D'altra parte, avendo già una tavola di lunghezza fissata, capisce immediatamente che più è alto in gradino da superare, più sarà ripida la rampa che egli dovrà approntare. Detto questo, dovrebbe risultare chiaro che qualsiasi cosa debba corrispondere ad una misura della ripidità della rampa, essa è direttamente proporzionale all'altezza, a parità di distanza dal punto di partenza ed inversamente proporzionale alla distanza, a parità di altezza. Con le etichette messe in figura, indicando **la pendenza** come la "misura della ripidità" della retta, possiamo scrivere queste relazioni:



$$\text{Pendenza} \propto h, \quad \text{Pendenza} \propto \frac{1}{d},$$

ergo, detta m la pendenza della retta, è ragionevole porre,

$$m = \frac{h}{d}.$$

Ora, la retta si può definire come *il luogo geometrico dei punti* la cui pendenza è sempre la stessa di quella calcolata tra due punti qualsiasi di essa. Vediamo se operativamente abbiamo conferma di quanto detto or ora. In riferimento all'esempio di prima si ha, detta m_{AB} la pendenza tra i punti A e B e, similmente m_{AP} quella tra il punto A ed il generico punto P che sta sulla stessa retta, imponendo l'uguaglianza tra le pendenze:

$$m_{AB} = m_{AP} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{|\overline{EB}|}{|\overline{AE}|} = \frac{|\overline{FP}|}{|\overline{AF}|} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1-(-2)}{2-(-4)} = \frac{y-(-2)}{x-(-4)},$$

che porta dritto all'equazione:

$$\frac{3}{6} = \frac{y+2}{x+4} \quad \longleftrightarrow \quad y+2 = \frac{1}{2}(x+4) \quad \longleftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}x.$$

C'è da notare che il discorso non sarebbe cambiato se avessimo uguagliato la pendenza m_{AB} a quella tra B e P.

2. Equazione (esplicita) della retta

In generale se indichiamo con Δx_{AB} l'incremento sull'asse delle ascisse nel passare dal punto A al punto B ed analogamente con Δy_{AB} l'incremento "in verticale", allora si ha:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y_{AB}}{\Delta x_{AB}}$$

e questa quantità [1] deve essere invariata per qualsiasi altra pendenza calcolata tra un punto della stessa retta, generico, P ed A o B.

[1]Importantissima anche per gli studi futuri e nota come **rapporto incrementale**.

Possiamo pertanto scrivere, se $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, detto $P = (x, y)$ il generico punto sulla retta individuata da A e B:

$$\frac{\Delta y_{AB}}{\Delta x_{AB}} = \frac{\Delta y_{AP}}{\Delta x_{AP}} \qquad \longleftrightarrow \qquad \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{x - a_1}$$

ed esplicitando dopo semplici passaggi:

$$y - a_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1)$$

$$y = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}\,x - \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}\,a_1 + a_2.$$

Chiamando, come solitamente si fa, le quantità numeriche $\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1} = m$ e $\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}\,a_1 + a_2 = q$ si ottiene l'equazione canonica della retta (in forma esplicita):

$$\boxed{y = mx + q}.$$

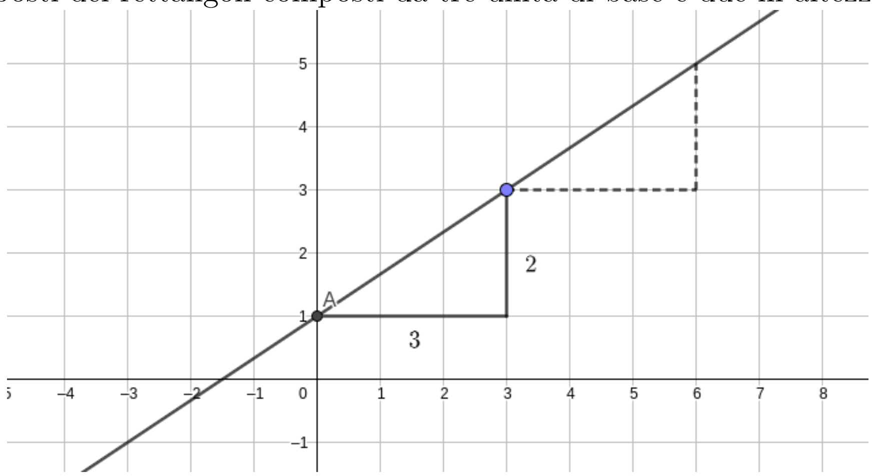
Di m abbiamo già parlato a sufficienza: questa quantità esprime la pendenza della retta ed è pari al rapporto di quanto ci si innalza verticalmente rispetto al movimento orizzontale che si compie nel portarsi da un punto ad un altro della retta. Il termine q si chiama **termine noto.** Si osserva banalmente che per $x = 0$ la y coincide proprio con q, ovvero il punto $(0, q)$ è un punto della retta e, più precisamente, rappresenta *il taglio dell'asse* y operato dalla retta [2]. La cosa importante è sapere che per determinare una retta, basta conoscere questi due numeri: m e q. Infatti l'inclinazione ed un punto (qualsiasi) da cui passa la retta basta per individuarla e... in effetti, due punti servono essenzialmente per determinare la pendenza ed avere un punto da cui la retta stessa passa.

3. Come disegnare velocemente una retta

Se abbiamo due punti, oppure la pendenza ed un punto da cui la retta passa, evidentemente possiamo determinare l'equazione analitica della retta, tramite le formule date prima. Ammesso che ora noi abbiamo l'equazione della retta, come facciamo a disegnarla? un primo metodo e di determinare due punti qualsiasi da cui passa e poi tracciare l'unica retta che passi da essi. Questo però è un modo piuttosto primitivo di affrontare la questione. Avendo "pendenza" e "termine noto", tracciare la retta dovrebbe essere un gioco da ragazzi (e sicuramente senza turbamenti). Procediamo con un esempio: si voglia disegnare la retta di equazione $y = \frac{2}{3}x + 1$. Partendo dal punto 1 sull'asse delle

[2] Qualcuno la chiama **ordinata all'origine,** qualcun altro **intercetta asse** y.

ordinate [3] si avanzi di tre unità (per come dice il denominatore della "pendenza") e successivamente ci si elevi di due unità. Basta ora tracciare la retta che passa attraverso il punto di partenza ed il punto in cui si è giunti con i due spostamenti (consecutivi) di prima. C'è da notare che *ogni tre in avanti e due verso sopra,* da qualsiasi punto si parta della retta, si arriverà ad un altro punto della retta, come si può ben vedere dai fogli a quadretti, sui quali la retta incontrerà tutti i vertici opposti dei rettangoli composti da tre unità di base e due in altezza.



4. Varie osservazioni sulla retta

Abbiamo trovato che l'equazione di una retta è del tipo $y = mx + q$ se essa ha una pendenza m e passa ad altezza q sopra l'asse delle ordinate. In verità è facile convincersi che tutte le rette orizzontali, avendo pendenza nulla, sono del tipo $\boxed{y = q}$. D'altra parte, le **rette verticali** non possono avere una pendenza ben definita, in quanto al denominatore $\Delta x = 0$. Ma le rette verticali passeranno da un dato valore delle ascisse e poi, tutti i loro punti, avranno quel valore come prima coordinata. Pertanto le **rette verticali** sono tutte del tipo $\boxed{x = \text{“numero”}}$. Inoltre, se $m < 0$ la retta procede "dall'alto verso il basso", dato che ogni tot passi in avanti che si faranno, un altro numero di passi saranno diretti verso il basso, a partire da un punto qualsiasi della retta stessa [4]. Ora, prima di proseguire, è utile introdurre l'interpretazione "vettoriale" della retta.

[3]Quindi dal punto $(0, 1)$ del piano.

[4]Equivalentemente, ogni numero di passi "indietro che si compiono", di un tot ci si sposta verso sopra.

5. La retta ed i vettori

Un vettore, in modo naturale, conserva l'informazione sulla *direzione* che possiede, dove per **direzione** indentiamo *l'inclinazione della retta a cui il vettore appartiene.* Se consideriamo, ad esempio, il vettore $\vec{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ allora la retta su cui giace ha pendenza [5] $m = \frac{p_2}{p_1}$. Definiamo, tramite il rapporto tra la seconda e la prima componente di un vettore nel piano, la **direzione del vettore** $\vec{P}$:

$$\mathrm{dir}(\vec{P}) = \frac{p_2}{p_1}.$$

Dovrebbe essere evidente che data la direzione, se indichiamo anche un punto da cui passa, la retta è univocamente determinata. Osserviamo ora che moltiplicando le due componenti per uno stesso numero, il vettore non può cambiare direzione, dato che quel rapporto risulterebbe dato da una frazione equivalente a quella di partenza. L'effetto è, in verità, di ottenere vettori con la stessa direzione, lo stesso punto di applicazione (l'origine del sistema di coordinate) ma lunghezza diversa: quindi

$$\lambda\vec{P} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot p_1 \\ \lambda \cdot p_2 \end{pmatrix}$$

è un vettore diretto come $\vec{P}$ ma di lunghezza diversa e, possibilmente, qualora λ fosse un numero negativo, anche con verso cambiato.

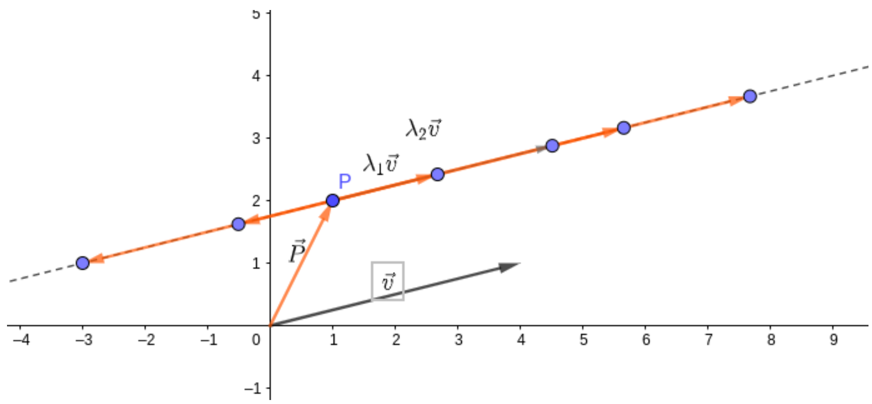
Dato il punto P ed un vettore (di direzione) $\vec{v}$ possiamo allora dire che l'espressione (vettoriale):

$$\vec{P} + \lambda\vec{v}, \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

rappresenta la retta passante dal punto P e con direzione [6] data dal vettore $\vec{v}$.

[5] Considerando che il vettore è applicato nell'origine, per cui la retta deve passare da O e da P.

[6] E quindi pendenza.



6. Dall'espressione vettoriale all'equazione analitica e viceversa

Ora, fissando in generale un vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ed un punto di coordinate $P = (p_1, p_2)$, possiamo scrivere la retta, come detto poc'anzi, tramite l'espressione

$$\vec{P} + \lambda\,\vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot p_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_1 + \lambda \cdot v_1 \\ p_2 + \lambda \cdot v_2 \end{pmatrix}.$$

Ricordando che la prima componente corrisponde all'ascissa del punto, mentre la seconda all'ordinata, allora possiamo scrivere ancora che un punto generico della retta avrà coordinate

$$x = p_1 + \lambda \cdot v_1 \quad \text{e} \quad y = p_2 + \lambda \cdot v_2.$$

Dopo semplici passaggi algebrici, che riportiamo qui di seguito, arriviamo alla relazione che lega le ascisse alle ordinate dei punti della retta, rappresentata da quella espressione vettoriale:

$$x - p_1 = \lambda \cdot v_1 \quad \text{e} \quad y - p_2 = \lambda \cdot v_2$$

e dividendo membro a membro

$$\frac{y - p_2}{x - p_1} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Dato che la direzione del vettore $\vec{v}$ coincide con il coefficiente m, allora possiamo scrivere

$$y - p_2 = m\,(x - p_1)$$

che, chiamando $p_2 - mp_1 = q$, si riscrive in

$$y = mx + q.$$

D'altra parte, avendo la retta di equazione $y = mx + q$ possiamo, se $m = \frac{h}{d}$, porre $\vec{v} = \begin{pmatrix} d \\ h \end{pmatrix}$ e $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$ per riscrivere la retta nella forma

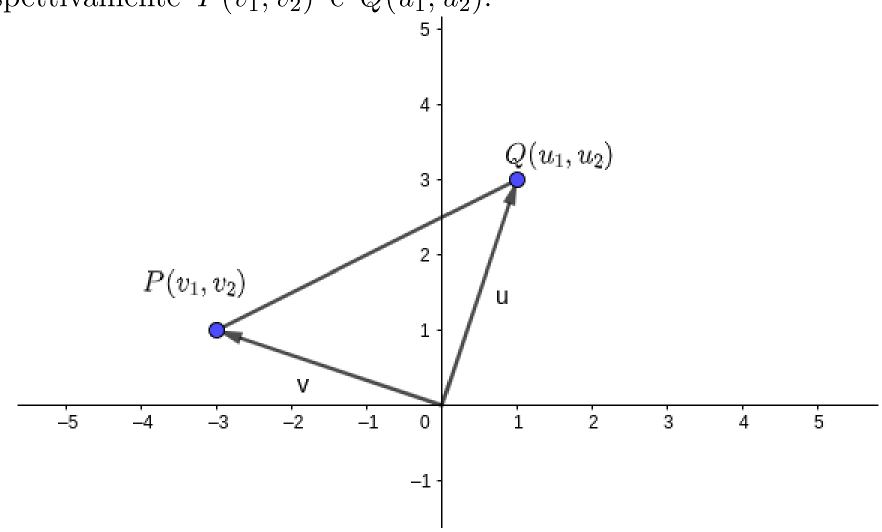
$$\begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \cdot d \\ \lambda \cdot h \end{pmatrix}$$

che è della forma

$$\vec{P} + \lambda \, \vec{v}.$$

7. Parallelismo e perpendicolarità

Rette parallele devono avere tutte la stessa direzione, per cui la **condizione di parallelismo è che esse abbiano tutte la stessa pendenza**. Ad esempio, le rette $y = \frac{3}{4}x - 1$ e $y = \frac{3}{4}x + 2$ sono parallele. Se le rette non sono parallele, devono essere incidenti e, tra tutte i modi in cui possono intersecarsi, sicuramente la posizione di perpendicolarità è privilegiata e particolare. Come ci accordiamo quando due rette sono perpendicolari? Possiamo limitarci, senza ledere alla generalità del discorso, a due vettori applicati nell'origine del sistema di riferimento, che siano perpendicolari tra loro: chiamiamoli $\vec{v}$ e $\vec{u}$ ed i punti corrispondenti (su cui arrivano) siano P e Q di coordinate rispettivamente $P(v_1, v_2)$ e $Q(u_1, u_2)$.



Per il Teorema di Pitagora, possiamo dire che

$$|\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 = d^{\,2}(P, Q).$$

Svolgiamo qualche breve passaggio:

$$< \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} > + < \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} >= (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2$$

$$\cancel{v_1^2} + \cancel{v_2^2} + \cancel{u_1^2} + \cancel{u_2^2} = \cancel{u_1^2} - 2u_1v_1 + \cancel{v_1^2} + \cancel{u_2^2} - 2u_2v_2 + \cancel{v_2^2}$$

$$u_1v_1 = -u_2v_2$$

che, riportata sotto forma di frazione diventa:

$$\frac{u_2v_2}{u_1v_1} = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{v_2}{v_1} = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{u_2}{u_1} = -\frac{1}{\frac{v_2}{v_1}},$$

od ancora

$$\boxed{\mathrm{dir}(\vec{u}) = -\frac{1}{\mathrm{dir}(\vec{v})}}.$$

In definitiva, se m è la pendenza di una retta ed $m_\perp$ quella di una retta ad essa ortogonale, deve sussistere la relazione

$$\boxed{m_\perp = -\frac{1}{m}} \quad \text{oppure} \quad \boxed{m \cdot m_\perp = -1}.$$

Si dice anche che la **condizione di perpendicolarità è che le direzioni risultino antireciproche.**

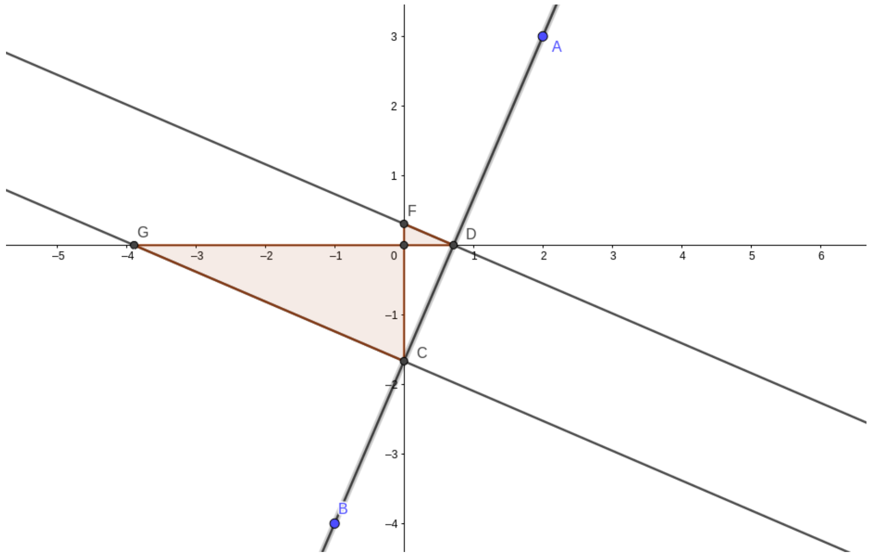
Ad esempio, le rette $y = \frac{2}{5}x - 4$ e $y = -\frac{5}{2}x + 1$ sono mutuamente perpendicolari.

8. Qualche esempio di problema risolto

Proponiamo ora qualche tipo di problema che può essere risolto tramite la teoria sviluppata fino ad ora.

PROBLEMA 1. *Determinare la retta r passante dai punti $A(2,3)$ e $B(-1,-4)$ e dire dove essa incontra gli assi cartesiani. Dai punti trovati condurre poi due rette perpendicolari ad r e trovare le aree dei triangoli che esse formano con gli assi coordinati.*

Soluzione:



La pendenza della retta r è: $m_{AB} = \frac{7}{3}$. Scegliendo A come punto di passaggio (che avevamo indicato, in precedenza, con P), la formula

$$y - p_2 = m\,(x - p_1),$$

ci permette di ricavare subito l'equazione di r :

$$r : y - 3 = \frac{7}{3}\,(x - 2)$$

da cui

$$r : y = \frac{7}{3}x - \frac{14}{3} + 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{r : y = \frac{7}{3}\,x - \frac{5}{3}}.$$

Uno dei due punti d'intersezione con gli assi cartesiani è immediato, data la conoscenza di $q = -\frac{5}{3}$, pertanto, chiamando tale punto con C, abbiamo $C = \left(0, -\frac{5}{3}\right)$. Il punto d'intersezione con l'asse delle ascisse, invece, si ottiene ponendo il valore delle ordinate pari a zero, ergo basta risolvere l'equazione (di primo grado): $\frac{7}{3}\,x - \frac{5}{3} = 0$ da cui si ricava $x = \frac{5}{7}$. Le rette ortogonali ad r devono avere *direzione antireciproca,* per cui la loro pendenza è $m_{\perp} = -\frac{3}{7}$. L'equazione della retta perpendicolare ad r e passante per C è presto data, in virtù del fatto che conosciamo sia la sua inclinazione, sia il suo termine noto [7], pertanto essa è

$$\boxed{y = -\frac{3}{7}x - \frac{5}{3}}.$$

[7] Che, evidentemente, è lo stesso valore di q della retta r.

Per trovare l'altra retta, utilizziamo la formula data all'inizio di questa soluzione, scegliendo il punto di passaggio essere $D\left(\frac{5}{7}, 0\right)$, per cui

$$y = -\frac{3}{7}\left(x - \frac{5}{7}\right) \iff \boxed{y = -\frac{3}{7}x + \frac{15}{49}}.$$

In ultimo, troviamo le aree osservando dei fatti geometrici elementari sulla figura nel piano cartesiano. Dapprima notiamo che del triangolo di vertici l'origine del sistema di riferimento, il punto D ed F conosciamo i due cateti che misurano rispettivamente [8]: $\frac{5}{7}$ e $\frac{15}{49}$. per cui l'area del triangolo "piccolo" è data da:

$$S_{\overline{ODF}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{15}{49} = \frac{75}{686}.$$

Per determinare la lunghezza del cateto orizzontale del triangolo "grande", troviamo l'ascissa del punto G ponedo a zero l'ordinata nell'equazione della retta che passa da C e G. Risolviamo quindi l'equazione $-\frac{3}{7}x - \frac{5}{3} = 0$ da cui ricaviamo $x = -\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{3} = -\frac{35}{9}$. Il cateto orizzontale, quindi, misura $\frac{35}{9}$. Quello verticale, invece, misura $\frac{5}{3}$. Per cui l'area cercata, del secondo triangolo [9], è data da:

$$S_{\overline{OCG}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{35}{9} \cdot \frac{5}{3} = \frac{175}{54}.$$

Allo stesso risultato si sarebbe giunti tramite considerazioni di similitudine, risparmiando la necessità di determinare l'ascissa del punto G: nei fatti il triangolo "grande" è simile a quello piccolo [10] per cui le aree dei due triangoli sono direttamente proporzionali al quadrato di due lati omologhi. Del triangolo "grande" il lato compreso tra l'estremo C e l'origine del sistema di coordinate è di lunghezza nota, pari a $\frac{5}{3}$, ed è omologo al cateto del triangolo "piccolo" di lunghezza $\frac{15}{49}$. Pertanto possiamo trovare l'area del triangolo "grande" moltiplicando l'area del triangolo "piccolo" per il *fattore d'ingrandimento* $\left(\frac{5}{3} \cdot \frac{49}{15}\right)^2 = \left(\frac{49}{9}\right)^2$. Quindi finiamo l'esercizio dicendo che l'altra area è pari a

$$S_{\overline{OCG}} = \frac{5 \cdot \cancel{15}^{5}}{2 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{49}} \cdot \frac{\cancel{49} \cdot \cancel{49}^{7}}{\cancel{9}^{3} \cdot 9} = \frac{25 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 9} = \frac{175}{54}.$$

□

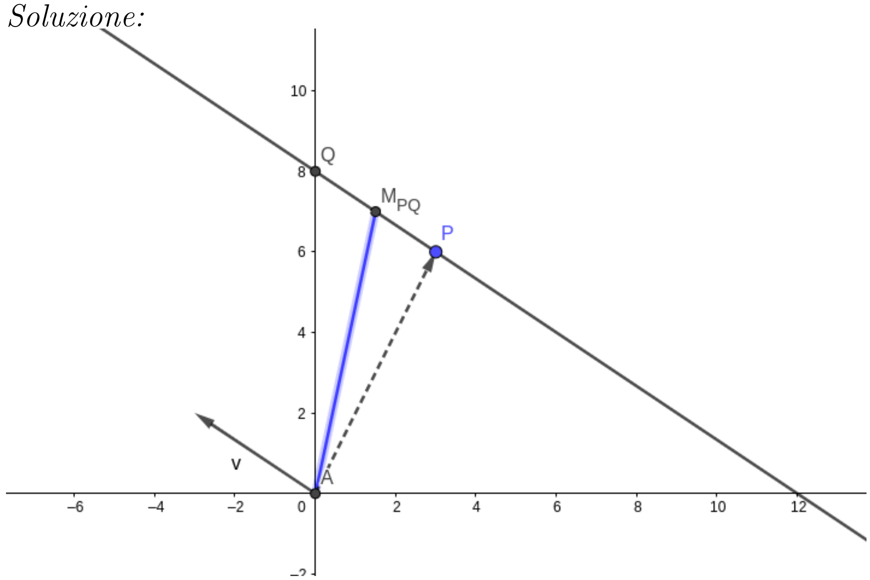
[8] Prima l'orizzontale e poi il verticale... ma perchè? da dove tiriamo fuori questi numeri?

[9] Quello "grande".

[10] Perché? ...suggerisco di controllare le coppie di angoli che si formano sotto le rette parallele con una stessa trasversale.

Problema 2. *Data la direzione indicata dal vettore* $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *trovare l'equazione cartesiana della retta passante per il punto* P *di coordinate* $(3, 6)$ *ed avente la direzione di* $\vec{v}$*. Trovare il punto* Q *d'intersezione di tale retta con l'asse delle ordinate e quanto dista dall'origine il punto medio tra* P *e* Q*.*

Soluzione:



La retta è espressa vettorialmente da $\vec{P} + \lambda \vec{v}$ che, nel caso specifico, si riscrive come

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 3\lambda \\ 6 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

Poniamo quindi $x = 3 - 3\lambda$ e $y = 6 + 2\lambda$ ed eliminiamo il parametro λ tra le due equazioni. Dalla prima ricaviamo $\lambda = \frac{3-x}{3}$ e dalla seconda $\lambda = \frac{y-6}{2}$, per cui l'equazione della retta è data da:

$$\frac{3-x}{3} = \frac{y-6}{2} \qquad \iff \qquad \boxed{y = -\frac{2}{3}x + 8}.$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare direttamente "cartesianamente" considerando che $\mathrm{dir}(\vec{v}) = \frac{2}{-3}$ da cui $m = -\frac{2}{3}$ ed utilizzando l'equazione (già considerata anche per la risoluzione del precedente esercizio):

$$\boxed{y - y_p = m\,(x - x_p)}$$

avendo indicato con (x_p, y_p) le coordinate di un punto da cui passa la retta stessa. Per cui si sarebbe dovuto scrivere:

$$y - 6 = -\frac{2}{3}\,(x - 3) \qquad \iff \qquad y = -\frac{2}{3}\,x + 8$$

come precedentemente trovato.
Il punto Q ha coordinate $(0, 8)$ e non perché le si leggono sul disegno, ma perché $q = 8$ esprime l'intercetta asse delle ordinate. Il punto medio tra P e Q è presto trovato facendo le medie aritmetiche delle coordinate dei punti:

$$M_{PQ} = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{8+6}{2}\right) = (1, 7)\,.$$

La distanza di questo punto dall'origine è la lunghezza del vettore $\overrightarrow{M_{PQ}}$, che si trova (tramite teorema di Pitagora):

$$|\overrightarrow{M_{PQ}}| = \sqrt{< \overrightarrow{M_{PQ}}, \overrightarrow{M_{PQ}} >} = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

□

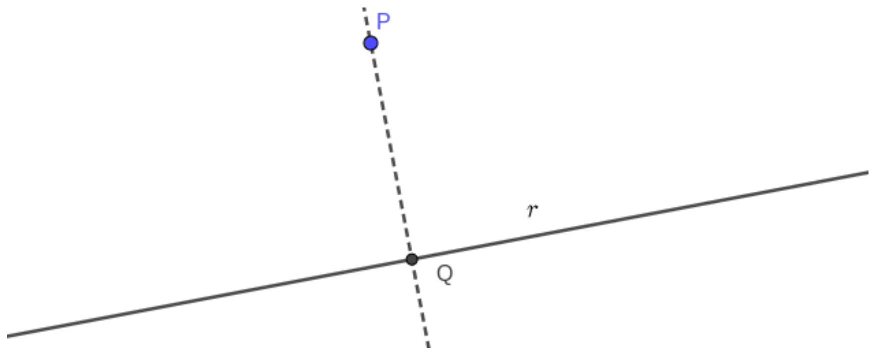
9. Intersezioni tra rette e distanza punto-retta

Date due rette non parallele tra loro, di cui si conoscono le equazioni, come si fa a determinare il loro punto d'intersezione? Basta notare che le coordinate del punto d'intersezione devono soddisfare entrambe le equazioni delle rette e, in particolare, l'ordinata di tale punto deve potersi calcolare sia attraverso l'equazione di una retta, sia attraverso l'equazione dell'altra. Quindi basta uguagliare i secondi membri delle equazioni (esplicite) delle rette per scrivere una equazione di primo grado che, risolta, dà l'ascissa del punto in comune. Con il prossimo esempio si capirà meglio quanto finora detto. Siano date le rette di equazioni $r : y = \frac{2}{5}x + 3$ e $s : y = x - 2$. Non essendo parallele, devono incontrarsi in un punto, che chiamiamo P. Vorremmo determinare le coordinate di P. Ora, l'ordinata di P è data sia attraverso l'equazione di r sia per mezzo dell'equazione di s, per cui

$$\frac{2}{5}x + 3 = x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3 + 2 = (1 - \frac{2}{5})\,x \quad \Leftrightarrow \quad x = 5 \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{3}.$$

L'ordinata la si calcolerà indifferentemente dall'equazione di r o di s : [11] dall'equazione di s risulta $y_P = \frac{25}{3} - 2 = \frac{19}{3}$. In definitiva il punto cercato ha coordinate $P = (\frac{25}{3}, \frac{19}{3})$.
La conoscenza del punto d'intersezione permette di risolvere un altro problema interessante: *"trovare la distanza di un punto prefissato da una retta data"*. In effetti si potrebbe riportare tale problema a quello di determinare la distanza tra due punti: uno dei quali è proprio quello di cui si cerca la distanza dalla retta, l'altro punto è rappresentato dalla proiezione del punto stesso sulla retta.

[11] Si scelga, chiaramente, quella che fa fare meno calcoli!



Per determinare il punto corrispondente alla proiezione del punto sulla retta, basta intersecare la retta perpendicolare a quella data e passante dal punto P con la retta stessa. Prima di procedere con la deduzione di una formula che permetta di ricavare immediatamente la distanza punto-retta, procediamo con la risoluzione di un problema seguendo l'idea testé esposta.

PROBLEMA 3. *Determinare la distanza del punto* $P(3,4)$ *dalla retta di equazione* $r : y = -\frac{1}{2}x + 1$

Soluzione: La direzione della retta perpendicolare, essendo antireciproca di quella data, è $m_{\perp} = 2$. La retta perpendicolare passante dal punto P si trova sempre tramite la formula

$$y - y_P = m_{\perp}(x - x_P)$$

che, nel caso in studio, si riscrive come

$$y - 4 = 2(x - 3) \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x - 2.$$

L'intersezione tra la retta r e quest'ultima trovata si ottiene uguagliando i secondi membri delle due equazioni cartesiane:

$$-\frac{1}{2}x + 1 = 2x - 2 \quad \text{da cui} \quad 1 + 2 = \left(\frac{1}{2} + 2\right)x$$

e quindi

$$x = 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}, \quad \text{... per l'ordinata,} \quad y = 2 \cdot \frac{6}{5} - 2 = 2\left(\frac{6}{5} - 1\right) = \frac{2}{5}.$$

Il punto $\pi_r(P)$ [12] corrispondente alla proiezione di P sopra r ha coordinate $\left(\frac{6}{5}, \frac{2}{5}\right)$. A questo punto, la distanza punto-retta, che noi indichiamo come $d(P,r)$ è data da

$$d(P,r) = d(P, \pi_r(P)) = \sqrt{\left(3 - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(4 - \frac{2}{5}\right)^2} =$$

[12] Nella figura di prima è quello che avevamo chiamato Q.

$$= \sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2 + \left(\frac{18}{5}\right)^2} = \frac{9}{5}\sqrt{1^2+2^2} = \frac{9}{5}\sqrt{5}.$$

□

Ricaviamo ora la formula generale, dato il punto di coordinate $P(x_p, y_p)$ e la retta di equazione $r : y = m\,x + q$. La retta perpendicolare ad r e passante da P è

$$r_\perp : y - y_P = -\frac{1}{m}(x - x_P) \quad \Leftrightarrow \quad r_\perp : y = -\frac{1}{m}x + y_P + \frac{1}{m}x_P.$$

L'ascissa del punto Q d'intersezione $r \cap r_\perp$ è data dalla risoluzione dell'equazione

$$mx + q = -\frac{1}{m}x + y_P + \frac{1}{m}x_P$$

che dà, dopo semplici passaggi

$$\left(m + \frac{1}{m}\right)x = y_p + \frac{1}{m}x_P - q, \quad \text{ergo:} \quad x = \frac{\cancel{m}}{m^2+1} \cdot \frac{my_P + x_P - mq}{\cancel{m}}.$$

Ora, la **distanza punto-retta** coincide con la distanza tra P e Q, quindi scriviamo:

$$d(P,r) = d(P,Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}.$$

La prima parentesi diventa:

$$(x_P - x_Q)^2 = \left(x_P - \frac{my_P + x_P - mq}{m^2+1}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{m^2x_P + \cancel{x_P} - my_P - \cancel{x_P} + mq}{m^2+1}\right)^2 = \left(\frac{m\,(mx_P - y_P + q)}{m^2+1}\right)^2$$

e ricordando che $y_Q = m\,x_Q + q = m \cdot \frac{my_P + x_P - mq}{m^2+1} + q$, ovvero

$$y_Q = \frac{m^2y_P + mx_P - \cancel{m^2q} + \cancel{m^2q} + q}{m^2+1},$$

sostituendo si ottiene per la seconda parentesi:

$$(y_P - y_Q)^2 = \left(\frac{\cancel{m^2y_P} + y_P - \cancel{m^2y_P} - mx_P - q}{m^2+1}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{y_P - mx_P - q}{m^2+1}\right)^2.$$

Quindi

$$d(P,r) = \sqrt{\left(-m \cdot \frac{y_P - mx_P - q}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{y_P - mx_P - q}{m^2+1}\right)^2}$$

e mettendo in evidenza la seconda parentesi

$$d(P,r) = \sqrt{\left(\frac{y_P - m x_P - q}{m^2+1}\right)^2 \cdot (m^2+1)} = \frac{|y_P - m x_p - q|}{\sqrt{m^2+1}}$$

che possiamo riscrivere, per ricordare meglio, in tal guisa:

$$\boxed{d(P,r) = \frac{|y_P - (m\,x_P + q)|}{\sqrt{m^2+1}}}$$

dove al numeratore compare l'espressione ottenuta cambiando l'"uguale" tra i due membri dell'equazione analitica della retta con un segno "meno" ed alle ascisse ed ordine della retta sono stati sostituiti i rispettivi valori presi dalle coordinate del punto P.

PROBLEMA 4. *Trovare la distanza tra il punto di coordinate* $P(3,5)$ *dalla retta passante per i punti* $A(-1,-3)$ *e* $B(2,-1)$.

Soluzione: La retta passante per A e B ha equazione $y - y_A = m_{AB}\,(x - x_A)$ dove $m_{AB} = \frac{2}{3}$. Ricaviamo l'equazione della retta:

$$r : y = \frac{2}{3}\,(x+1) - 3 \quad \Leftrightarrow \quad r : y = \frac{2}{3}\,x - \frac{7}{3}.$$

La distanza cercata è dunque data da:

$$d(P,r) = \frac{|5 - (\frac{2}{3}\cdot 3 - \frac{7}{3})|}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1}} = \frac{|5 + \frac{1}{3}|}{\sqrt{\frac{4}{9}+1}} = \frac{16}{\cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\sqrt{13}} = \frac{16}{13}\sqrt{13}.$$

□

10. Rappresentazione implicita e fasci di rette.

Abbiamo visto che le rette parallele hanno tutte la stessa direzione che, tradotto numericamente, significa avere tutte la stessa "pendenza" m. Quindi, se delle rette differiscono solo per il valore di q, esse sono tutte parallele tra loro e si dice *formare un fascio di rette parallele.* Se il valore di q è **parametrizzato** da un simbolo k che assume valori in $\mathbb{R}$ possibilmente, allora, fissato m possiamo dire che:

$$y = m\,x + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

forma un **fascio di rette parallele**. D'altra parte, tutte le rette che passano per un dato punto prefissato di coordinate $P(x_P, y_P)$ devono soddisfare all'equazione:

$$y - y_P = m\,(x - x_P),$$

quindi, se si permette ad m di assumere diversi valori (ovvero consideriamo m essere un parametro numerico che prende valori nell'insieme dei numeri reali), l'equazione scritta poco sopra rappresenta un **fascio di rette centrato in** P.

Supponiamo di avere una equazione del tipo $a\,x + b\,y + c = 0$ e verifichiamo che essa rappresenta una retta [13], per come l'abbiamo già rappresentata in questo capitolo. Possiamo "isolare" la y sottraendo gli altri due termini e dividendo tutto per b, ottenendo l'equazione

$$y = \frac{-a}{b}\,x + \frac{-c}{b},$$

che rappresenta una retta, la cui direzione è $m = -\frac{a}{b}$ ed il termine noto $q = -\frac{c}{b}$. D'altra parte ogni retta espressa nella forma $y = m\,x + q$ può essere riportata in *forma implicita* semplicemente sottraendo ad entrambi i membri quanto scritto nel primo membro, ottenendo:

$$m\,x - y + q = 0.$$

Considerando che $m = \frac{h}{d}$ [14] allora $\frac{h}{d}\,x - y + q = 0$ diventa, moltiplicando tutto per d,

$$h\,x + (-d)y + q\,d = 0$$

e chiamando $a = h, b = -d$ e $c = q \cdot d$ si riscrive esattamente l'equazione di prima:

$$a\,x + b\,y + c = 0.$$

Quindi la retta può anche essere rappresentata in forma implicita tramite l'equazione lineare scritta or ora. Supponiamo di avere due rette espresse in forma implicita:

$$r : a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0 \quad \text{e} \quad s : a_2\,c + b_2\,y + c_2 = 0.$$

Dato che le quantità $Q(x, y) = q_1\,x + q_2\,y + c$ nel caso delle rette r ed s rappresentano sempre quantità nulle, allora una qualsiasi somma di loro multipli rappresenterà ancora il valore 0. Questo vale a dire che, se si considerano due parametri numerici reali λ e μ, allora:

$$\boxed{\lambda\,(a_1\,x + b_1\,y + c_1) + \mu\,(a_2\,x + b_2\,y + c_2) = 0}.$$

L'equazione appena scritta rappresenta, per ogni fissato valore di λ e μ una retta e, in particolare, per $\lambda = 1$, $\mu = 0$ la retta r mentre per $\lambda = 0$, $\mu = 1$ la retta s. La formula nel riquadro si chiama **fascio di rette generato da** r **ed** s e le rette succitate diconsi **rette sostegno del fascio** o anche **generatrici.** Per non operare con due parametri,

[13] Una equazione di questo tipo, non a caso, si chiama anche **equazione lineare** e si dice che rappresenta la **retta in forma implicita**.

[14] Con le notazioni utilizzate nel paragrafi precedenti.

supponendo -senza ledere alla generalità del discorso- $\lambda \neq 0$ possiamo dividere tutto per λ e chiamare $k = \frac{\mu}{\lambda}$ per ottenere "la versione semplificata" del fascio di rette generato da r ed s [15] :

$$\boxed{(a_1\,x + b_1\,y + c_1) + k(a_2\,x + b_2\,y + c_2)} = 0.$$

È giusto un'osservazione banale che se i coefficienti a_1, b_1 sono direttamente proporzionali ai valori a_2, b_2 allora r ed s risultano parallele tra loro ed il fascio generato risulta essere di rette parallele. Se però questi due numeri non sono in proporzione con gli altri due, allora tutte le rette del fascio passeranno per uno stesso punto, detto **centro del fascio,** che deve coincidere con il punto d'intersezione tra le due rette generatrici. Consideriamo infatti il punto d'intersezione tra r ed s : se $r : y = -\frac{a_1}{b_1}\,x - \frac{c_1}{b_1}$ ed analogamente $s : y = -\frac{a_2}{b_2}\,x - \frac{c_2}{b_2}$ allora l'ascissa del punto d'intersezione si trova uguagliando i secondi membri:

$$-\frac{a_1}{b_1}\,x - \frac{c_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}\,x - \frac{c_2}{b_2}$$

da cui si ricava

$$\left(\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_1}\right)\,x = \frac{c_1}{b_1} - \frac{c_2}{b_2}$$

e quindi

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}.$$

L'ordinata del punto è quindi

$$y = -\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2} - \frac{c_1}{b_1} = \frac{\cancel{-a_1b_2c_1} + a_1b_1c_2 - a_2b_1c_1 + \cancel{a_1b_2c_1}}{b_1(a_2b_1 - a_1b_2)}$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_2b_1 - a_1b_2}.$$

Il punto di coordinate

$$P = \left(\frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}, \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_2b_1 - a_1b_2}\right),$$

soddisfa ad entrambe le equazioni delle rette r ed s, per cui, sostituendo nell'equazione del fascio si ottiene

$$\lambda\,(a_1x_P + b_1y_P + q) + \mu\,(a_2x_P + b_2y_P + q) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

identicamente, ovvero qualsiasi equazione che si ricava dalla equazione del fascio, verifica banalmente la condizione nel punto P, il ché significa che tutte le rette di quel fascio passano per lo stesso punto P.

[15] Di cui comunque si perde la possibilità di rappresentare la retta s, non potendo porre $\lambda = 0$.

11. Le condizioni di passaggio

Consideriamo un qualsiasi oggetto geometrico (per semplicità chiamiamolo "curva") che possa essere rappresentato da una relazione analitica data da una equazione del tipo *"Espressione che lega le ascisse e le ordinate dei punti" = 0,* scritta più sinteticamente tramite l'equazione

$$Q(x, y) = 0.$$

Allora la curva **passa** dal punto P di coordinate (x_P, y_P) se le coordinate di p **soddisfano** all'equazione della curva, ovvero se

$$Q(x_P, y_P) = 0.$$

Dette in parole povere, *sostituendo i valori delle coordinate del punto nell'equazione, si ottiene un'identità.* La cosa dovrebbe essere già abbastanza evidente per quanto finora detto: l'equazione analitica di una curva è un legame tra le ascisse e le ordinate dei punti che le appartengono, quindi se il punto sta su quella data curva, le coordinate del punto sono soluzione dell'equazione analitica! Però, da questa semplice considerazione, si possono ricavare notevoli informazioni sui valori dei parametri che la curva stessa deve avere. Facciamo un esempio concreto. Noi sappiamo che l'equazione della retta, nella forma generale [16], è del tipo

$$y = m\,x + q.$$

Se diciamo che la retta passa sia da $A(3, 2)$ che da $B(-1, 1)$, allora possiamo anche dire che le coordinate di questi punti soddisfano all'equazione della retta. Tradotto operativamente, si hanno le seguenti due condizioni che, considerate contemporaneamente, permettono di determinare i due parametri m e q in modo alternativo a quanto fatto finora. Procediamo:

$$\begin{cases} \text{Passaggio per } A: & 2 = 3\,m + q \\ \text{Passaggio per } B: & 1 = -1\,m + q \end{cases}$$

Sottraendo "membro a membro" si ottiene

$$2 - 1 = (3 + 1)\,m \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 4\,m$$

da cui

$$m = \frac{1}{4}.$$

[16] A meno che non sia una retta verticale.

Se poi sostituiamo questo valore trovato in una delle due equazioni determiniamo anche il valore si q : usiamo la seconda equazione...

$$1 = -\frac{1}{4} + q \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{4} = q$$

da cui

$$q = \frac{5}{4}.$$

Ergo la retta cercata è

$$\boxed{y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}}.$$

Ci teniamo a sottolineare che questa condizione, conosciuta come **condizione di passaggio,** è sempre utilizzabile e non ha controindicazioni! Lo ribadiamo ancora una volta:

> ***"Se una curva passa da un dato punto, allora le coordinate di quel punto soddisfano all'equazione della curva".***

Infine osserviamo che la retta ha bisogno di due punti per essere individuata [17] ed i *parametri* da determina sono esattamente due: m e q. Questo è un fatto generale: se si devono determinare due parametri, servono due condizioni e le condizioni di passaggio, ad esempio, forniscono "condizioni" per individuare parametri. Se dovessimo determinare, di una equazione analitica, tre parametri, allora sarà necessario imporre tre condizioni (non necessariamente tutte di passaggio). Quindi vale la seguente osservazione di carattere generale:

> ***Il numero delle condizioni necessarie per determinare*** n ***parametri è proprio*** n.

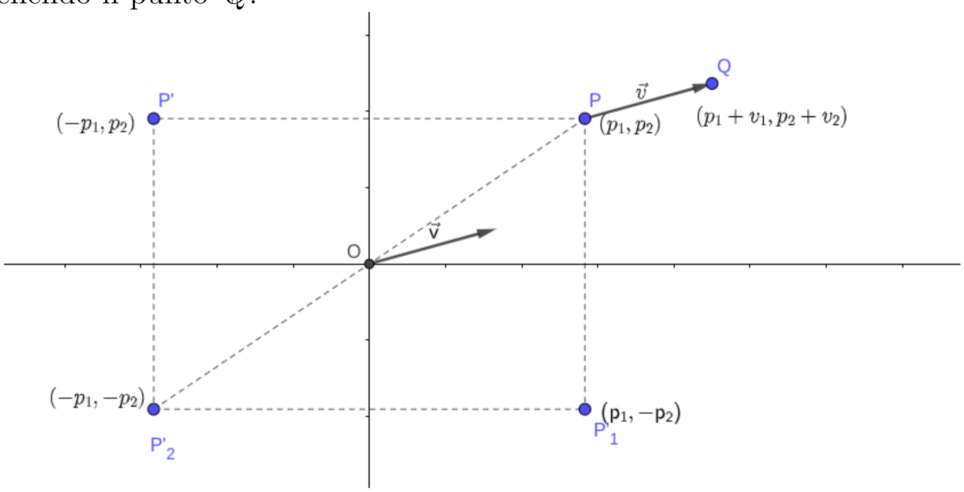
Se il numero delle condizione (che poi -per noi- significa, essenzialmente, impostare equazioni) è di uno minore del numero dei parametri da determinare, allora c'è libertà di scegliere il valore di uno dei parametri in modo arbitrario, facendo adeguare tutti gli altri in base alla nostra scelta: si dice, in tal caso, che il problema presenta ∞^1 soluzioni. Se la differenza tra il numero dei parametri n da determinare ed il numero m di condizioni che si riescono ad imporre è $k = n - m$, allora il problema presenterà ∞^k soluzioni, intendendo con questo che

[17] Oppure di una direzione e di un punto di passaggio: in questo caso i due punti servono proprio per determinare la direzione!

k tra i parametri da determinare si possono scegliere in modo totalmente arbitrario, mentre gli altri $n-k$ sono determinati dalla scelta effettuata dai k "parametri liberi" [18].

12. Trasformazioni elementari del piano

Consideriamo un punto $P(p_1, p_2)$ nel piano e osserviamo la seguente figura, in cui abbiamo segnato i punti corrispondenti di P simmetrici rispetto all'asse delle ascisse (P_1'), all'asse delle ordinate (P'), all'origine del sistema di riferimento (P_2') e "traslato" secondo il vettore $\vec{v}$ ottenendo il punto Q.



Possiamo notare che il **ribaltamento rispetto all'asse delle ascisse** [19] si ottiene cambiando di segno alla seconda coordinata del punto, lasciando la prima invariata. Il **ribaltamento rispetto all'asse delle ascisse** si ottiene cambiando il segno all'ascissa del punto, lasciando invariata l'ordinata ed il **ribaltamento rispetto all'origine** del sistema di coordinate si ottiene cambiando il segno ad entrambe le coordinate del punto P. Inoltre la **traslazione** del punto si ottiene indicando "di quanto spostarlo" nelle due direzioni di riferimento (asse verticale ed asse orizzontale), per cui si utilizza un vettore, detto **vettore di traslazione,** e si sommano le componenti di esso con le coordinate del punto [20]

Due immediate osservazioni sono che il punto P_2' simmetrico di P rispetto all'origine si può ottenere tramite due ribaltamenti consecutivi rispetto all'asse delle ascisse e successivamente delle ordinate o, indifferentemente, rispetto all'asse delle ordinate e successivamente rispetto

[18] Si dice anche che il problema ha k **gradi di libertà**.

[19] Simmetria e ribaltamento li usiamo come sinonimi!

[20] Che comunque coincidono anche con le componenti del vettore $\overrightarrow{OP}$.

a quello delle ascisse. La seconda osservazione è che la descrizione vettoriale della retta altro non è che la traslazione del punto P lungo la direzione del vettore $\vec{v}$ opportunamente allungato od accorciato, per ottenere tutti i punti della retta $\vec{P} + \lambda\,\vec{v}$. Introduciamo il seguente simbolismo di ovvia interpretazione, riferendoci -come normalmente si fa- all'asse delle ascisse come "asse x" ed all'asse delle ordinate come "asse y":

- Ribaltamento "Asse x" :
$$R_x : \begin{cases} x & \mapsto \ x \\ y & \mapsto -y \end{cases}$$
Quindi, ad esempio, se $P = (2, 4)$ allora $R_x(P) = (2, -4)$.
- Ribaltamento "Asse y" :
$$R_y : \begin{cases} x & \mapsto -x \\ y & \mapsto \ y \end{cases}$$
Ad esempio, se $P = (3, 2)$ allora $R_y(P) = (-3, 2)$.
- Ribaltamento "Origine O" :
$$R_O : \begin{cases} x & \mapsto -x \\ y & \mapsto -y \end{cases}$$
Ad esempio, se $P = (-3, 4)$ allora $R_O(P) = (3, -4)$.
- Traslazione del punto secondo il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$:
$$T_{\vec{v}} : \begin{cases} x & \mapsto x + v_1 \\ y & \mapsto y + v_2 \end{cases}$$
Se $P = (2, 5)$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, allora $T_{\vec{v}}(P) = (2 - 3, 5 + 2) = (-1, 7)$.

Un'ultima osservazione, prima di finire il capitolo, se una figura γ è rappresentata nel sistema di coordinate $< x\,/\,y >$ da un relazione del tipo $G(x, y) = 0$, allora, per traslarla secondo il vettore $\vec{v}$ si deve considerare il *vettore opposto* $-\vec{v}$ che, come idea, sposta il sistema di riferimento "parallelamente a se stesso" ma con origine posta in $(-v_1, -v_2)$. Il motivo lo comprendiamo direttamente con questo esempio: sia data la retta $r : y = \frac{2}{3}\,x - 1$ e "trasliamola" secondo il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Il singolo punto P di coordinate (p_1, p_2) viene spostato, pertanto, in $T_{\vec{v}}(P) = (p_1 + 3, p_2 + 4)$. Ovvero possiamo scrivere che le **nuove**

coordinate del punto P sono date da $(p_1', p_2') = (p_1 + 3, +_2 + 4)$. Se noi vogliamo riscrivere completamente l'equazione, che però è scritta nelle coordinate "vecchie" dobbiamo ricavare la sostituzione dalle due relazioni:

$$\begin{cases} x' &= x+3 \\ y' &= y+4 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x &= x'-3 \\ y &= y'-4 \end{cases}.$$

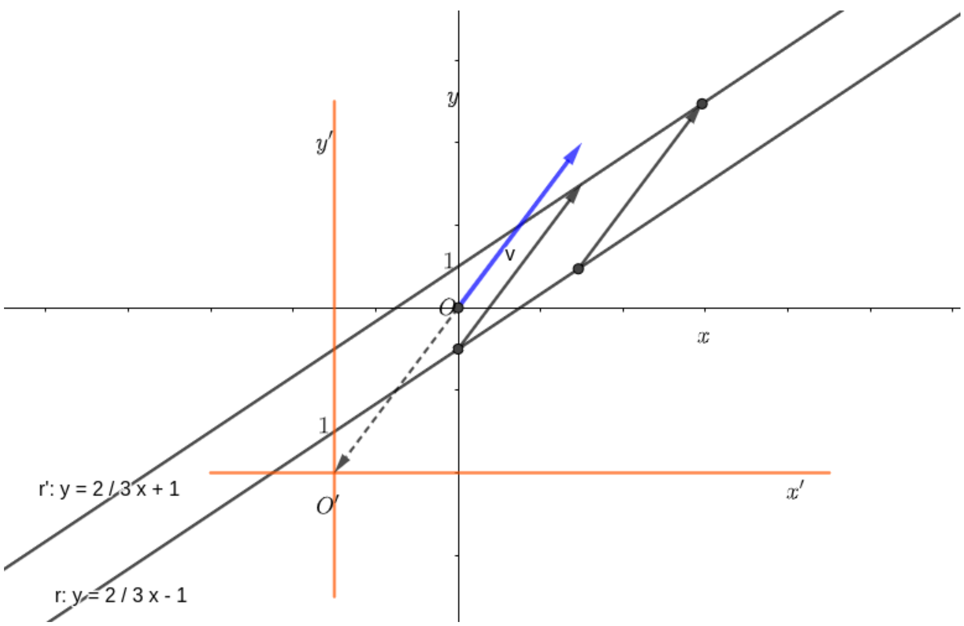
Allora la sostituzione che opereremo sulle ascisse e le ordinate presenti nell'equazione precedente sarà:

$$T : \begin{cases} x & \mapsto x-3 \\ y & \mapsto y-4 \end{cases},$$

da cui

$$r' = T(r) : y - 4 = \frac{2}{3}(x-3) - 1 \quad \Leftrightarrow \quad r' : y = \frac{2}{3}x + 1.$$

La seguente figura a conferma della bontà di quanto fatto [21].

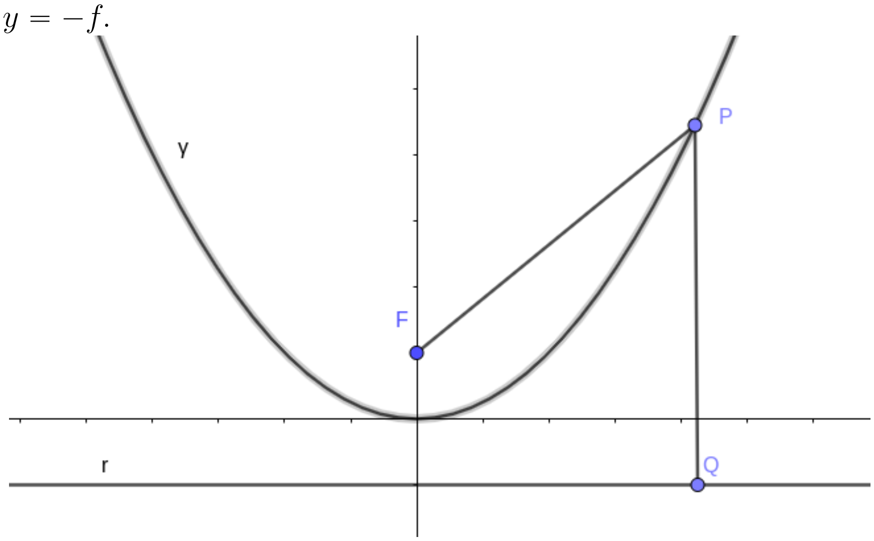


[21] Si chiede di meditare sul fatto che spostare un punto in una nuova posizione è lo stesso che lasciarlo fermo e spostare tutto il sistema di riferimento (parallelamente) della stessa quantità, ma in direzione contraria.

CAPITOLO 3

La parabola

Iniziamo lo studio delle coniche, dopo aver appreso che possono essere viste tutte come *luoghi geometrici* [1] , con la **parabola.** Essa è definita come *il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto prefissato e da un retta data.* Il punto prefissato si chiamerà **fuoco,** mentre la retta è detta **retta direttrice.** Una prima osservazione è che il punto medio tra il fuoco e la retta direttrice, proprio a metà altezza del fuoco rispetto alla retta, è un punto della parabola. Operiamo una semplificazione notevole: *dapprima supponiamo che il fuoco appartenga all'asse delle ordinate e che la retta direttrice sia orizzontale ed a pari distanza dall'origine del sistema di riferimento, come il fuoco dall'origine stessa.* Con queste premesse, l'origine del sistema di riferimento è un punto della parabola, essendo equidistante dalla retta e dal fuoco! Ora consideriamo un punto $P(x,y)$ generico che appartiene alla parabola in questione. Per fissare le idee, controlliamo la seguente figura, poniamo il fuoco nel punto $F=(0,f)$ e la retta direttrice di equazione $r: y=-f$.



Imponendo le condizioni di "luogo geometrico" si ha

$$d(F,P)=d(P,r) \quad \Rightarrow \quad d^2(F,P)=d^2(P,r).$$

[1]Rimandiamo alla lettura del capitolo 1, sez. 4.

Sostituiamo ora i dati che abbiamo e svolgiamo qualche "calcoletto":

$$x^2 + (y - f)^2 = (y + f)^2$$

$$x^2 + \cancel{y^2} - 2fy + \cancel{f^2} = \cancel{y^2} + 2fy + \cancel{f^2}$$

da cui

$$x^2 = 4f\,y \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{4f}\,x^2.$$

Detto $a = \frac{1}{4f}$, otteniamo l'equazione della parabola:

$$\boxed{y = a\,x^2}.$$

Osserviamo che la parabola presenta un **asse di simmetria** che coincide con la retta perpendicolare alla retta direttrice, passante dal fuoco. Il punto che sta a metà strada tra fuoco e retta direttrice è anche quello che dista meno da entrambi e si chiama **vertice** della parabola. Operiamo ora una *traslazione della parabola* secondo il vettore generico $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, utilizzando la trasformazione:

$$T : \begin{cases} x & \mapsto x - v_1 \\ y & \mapsto y - v_2 \end{cases}$$

ottenendo l'equazione generica della parabola che ha il vertice in $V = (v_1, v_2)$:

$$y - v_2 = a\,(x - v_1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = a\,x^2 - 2\,a\,v_1\,x + a\,v_1^2 + v_2$$

dato che $-2\,a\,v_1$ è un numero, così come $a\,v_1^2 + v_2$, possiamo assegnare ad essi le "etichette" b e c rispettivamente, ottenendo l'**equazione standard della parabola:**

$$\boxed{y = a\,x^2 + b\,x + c}.$$

Per quanto stabilito poc'anzi, si ha $b = -2\,a\,v_1$ da cui:

$$v_1 = -\frac{b}{2a},$$

corrispondente all'ascissa del vertice V e, pertanto, anche alla prima coordinata del fuoco F. Da $c = a\,v_1^2 + v_2$, sostituendo il valore di v_1 testé trovato e svolgendo qualche semplice passaggio algebrico, otteniamo: $c = \cancel{a}\,\frac{b^2}{4\,a^{\cancel{2}}} + v_2$, ergo:

$$v_2 = \frac{4\,a\,c - b^2}{4\,a} \quad \text{o meglio} \quad v_2 = -\frac{\Delta}{4\,a},$$

essendo Δ il discriminante $b^2 - 4ac$ associato al polinomio di secondo grado, presente nel secondo membro dell'equazione standard della parabola. Quindi, riassumendo, il **vertice** della parabola si determina a partire dai coefficienti dell'equazione standard tramite

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

Osserviamo, ora, che la traslazione della parabola con vertice altro punto rispetto all'origine del sistema di coordinate, non influisce sulla mutua posizione tra vertice, retta direttrice e fuoco. Pertanto, se la distanza tra vertice e fuoco (ovvero tra vertice e retta direttrice) era posta uguale ad f, allora ancora si ha che tale distanza *in verticale* è f. Ma avevamo chiamato $a = \frac{1}{4f}$ per cui il valore di f lo ricaviamo come $f = \frac{1}{4a}$. A questo punto siamo in grado di ricavare le coordinate del **fuoco** e l'equazione della **retta direttrice** [2]

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta + 1}{4a}\right), \quad \text{Retta direttrice:} \quad y = \frac{-\Delta - 1}{4a}.$$

1. Come disegnare velocemente una parabola

Per disegnare una parabola, nota la sua equazione cartesiana, non c'è bisogno di determinare il fuoco e la retta direttrice. *Per semplificare la trattazione, per ora discuteremo sempre di parabole aventi l'asse di simmetria verticale, ovvero la retta direttrice orizzontale.* Per determinare il disegno -con buona approssimazione- della curva **basta determinare il vertice ed un punto da cui passa.** Ora, il vertice si trova facilmente: la sua prima coordinata è $\frac{-b}{2a}$ e, dato che la parabola passa dal suo vertice, la seconda coordinata la determiniamo sostituendo l'ascissa del vertice nell'equazione, a posto delle x. Un punto di passaggio è immediato da trovare: basta "sparare" un valore qualsiasi alla x e si trova la y. In particolare, per $x = 0$, si ottiene $y = c$ da cui deduciamo -così come avevamo fatto anche per la retta- che il *termine noto* c esprime *l'intercetta asse* y [3]. Vediamo con un esempio.

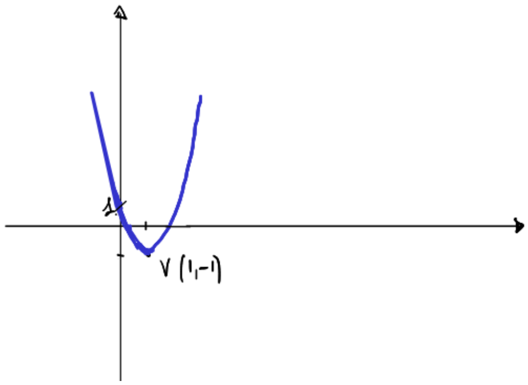
PROBLEMA 5. *Si disegni la parabola di equazione* $y = 2x^2 - 4x + 1$.

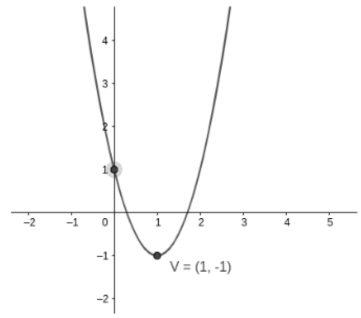
Soluzione: L'ascissa del vertice è $\frac{-b}{2a} = \frac{4}{4} = 1$. Valutando il polinomi per $x = 1$ si ottiene $y_V = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1 = -1$, per cui il vertice

[2] Ricordiamo che l'incremento f è rispetto all'ordinata di V e che vertice e fuoco sono allineati verticalmente.

[3] Quindi la parabola passa, sull'asse y, dal punto $(0, c)$.

è $V = (1, -1)$. Inoltre la parabola passa da $(0, c) = (0, 1)$. Ricordando che è una curva che "svasa" [4] a mano a mano che si allontana dal proprio vertice, allora la disegniamo (a mano libera) come di seguito.





□

Osserviamo ora che il *parametro* a dà informazioni sull'apertura della curva: la prima cosa che salta all'occhio è che se a è negativa, considerando la parabola con vertice nell'origine, $y = a\,x^2$, allora essa deve svilupparsi "al di sotto dell'asse delle ascisse"; infatti x^2 è una quantità sempre maggiore o uguale a zero e, se viene moltiplicata per un numero negativo, fornirà come risultato un numero sempre minore o uguale a zero. In questo caso, quindi, i punti della parabola stanno tutti sotto il vertice (che coincide con l'origine del sistema di coordinate) e si dirà che la parabola **volge la concavità verso il basso** [5]. A seguito di una traslazione il verso della concavità non può essere cambiato quindi, in generale, si ha per $a > 0$ la concavità è verso l'alto, mentre per $a < 0$ essa è verso il basso. Ma c'è di più: notiamo infatti che a parità di ordinata, più è piccolo il valore di a, maggiore è l'*apertura* della parabola. Consideriamo la retta orizzontale che passa dal fuoco [6] della parabola $y = \frac{-\Delta+1}{4a}$ e troviamo i valori delle ascisse che corrispondono ai punti [7], sulla parabola, di ordinata y_F. Dovremo risolvere l'equazione (di secondo grado)

$$ax^2 + bx + c - \frac{-\Delta + 1}{4a} = 0,$$

[4] Ovvero non "richiude mai verso se stessa"

[5] Evidentemente, se $a > 0$ la concavità è verso l'alto.

[6] Lo studente provi a rispondere alla domanda del perché abbiamo scelta proprio questa!

[7] Il segmento i cui estremi sono questi punti della parabola viene chiamato **latus rectum.**

ovvero

$$ax^2 + bx + \frac{\cancel{4ac} + b^2 - \cancel{4ac} - 1}{4a}$$

e quindi

$$4a^2\,x^2 + 4ab\,x + b^2 - 1 = 0.$$

Questa equazione ha sempre due soluzioni [8] e le determiniamo tramite la formula risolutiva, ridotta, ben nota:

$$x_{1,2} = \frac{-2ab \mp \sqrt{\cancel{4a^2b^2} - \cancel{4a^2b^2} + 4a^2}}{4a^2} = \frac{-2ab \mp 2a}{4a^2}$$

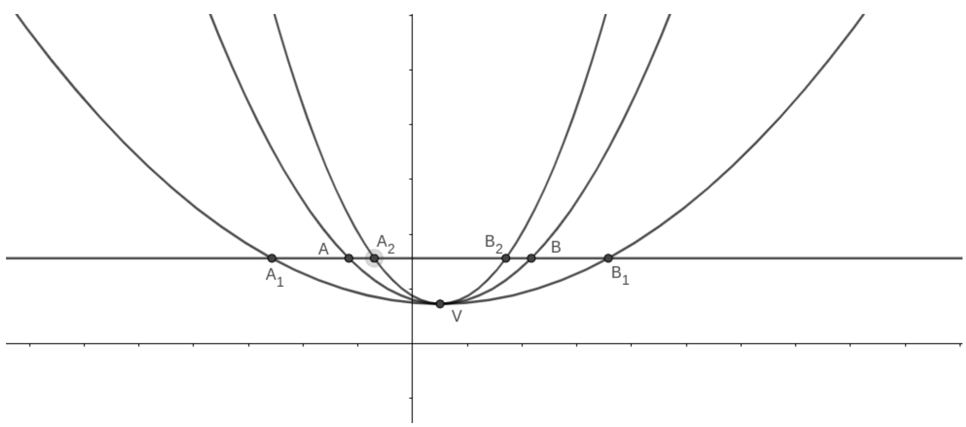
e quindi, infine

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp 1}{2a}.$$

La distanza tra i punti della parabola di coordinate $A(\frac{-b-1}{2a}, \frac{-\Delta+1}{4a})$ e $B(\frac{-b+1}{2a}, \frac{-\Delta+1}{4a})$, essendo *allineati in orizzontale,* è data da

$$\frac{-b+1}{2a} - \frac{-b-1}{2a} = \frac{1}{a}.$$

La prima cosa che osserviamo è che **essa dipende unicamente dal parametro** a e che la lunghezza del segmento $\overline{AB}$ è inversamente proporzionale ad a stesso. Quindi, più è grande a, più il segmento $\overline{AB}$ è corto, conseguentemente più i due rami della parabola sono vicini; viceversa, più è piccolo a, più è lungo $\overline{AB}$, quindi più sono distanti tra di loro i rami della parabola.



Nella figura risulta $\overline{A_2B_2} < \overline{AB} < \overline{A_1B_1}$ e, corrispondentemente le parabole risultano in ordine crescente di apertura.

[8]Perché?

2. Determinazione dell'equazione della parabola

L'equazione della parabola standard $y = a\,x^2 + b\,x + c$ contiene tre parametri da determinare a, b e c, per cui c'è bisogno di tre condizioni [9] affinché si possano determinare. Ora, le condizioni più semplici da dare è dire che **la parabola passa per tre punti noti.** Ma anche basta conoscere due punti, di cui uno è indicato essere il vertice: infatti il passaggio per due punti più la condizione che l'ascissa del vertice è data da $\frac{-b}{2a}$ sono in totale tre condizioni. In verità, tra le varie condizioni possono anche trovarsi altre del tipo "la parabola passa da questo punto, interseca questa retta in due punti che distano tot tra loro", od ancora [10] "la parabola è tangente a questa retta in quel punto e passa da quest'altro punto". Insomma: l'importante è riuscire ad imporre tre condizioni e, dare tre condizioni, corrisponde ad impostare tre equazioni non equivalenti tra di loro.

2.1. Parabola passante per tre punti. Nel capitolo precedente abbiamo parlato delle *condizioni di passaggio:* se una curva passa da un punto, le coordinate di quel punto soddisfano all'equazione della curva. Per cui, dati $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ e $C(c_1, c_2)$, per trovare la parabola passante per essi, partendo dall'equazione standard $y = a\,x^2 + b\,x + c$, non dobbiamo fare altro che sostituire le ascisse alla x e le corrispondenti ordinate alla y, al fine di determinare un sistema di tre equazioni lineari nelle incognite a, b e c. La risoluzione di questo sistema, che si può fare -per ora- in modo molto intuitivo [11] non è affatto difficile e può essere discussa già con il prossimo esempio.

Problema 6. *Si scriva l'equazione della parabola passante per i punti $A(1,0)$, $B(3,10)$ e $C(0,-2)$.*

Soluzione: L'equazione della parabola è $y = a\,x^2 + b\,x + c$. Impostiamo le condizioni di passaggio e scriviamo il sistema:

$$\begin{cases} \text{Passaggio per } A: & 0 = a + b + c \\ \text{Passaggio per } B: & 10 = 9a + 3b + c \\ \text{Passaggio per } C: & -2 = c \end{cases}.$$

Sottraendo membro a membro la terza equazione dalla prima e dalla seconda, *eliminiamo* il parametro c dalle prime due equazioni:

[9] Condizioni compatibili, per esempio, se tre punti risultano allineati, allora non può trovarsi la parabola passante da tutt'e tre i punti dati!

[10] Ne riparleremo comunque dopo quando tratteremo della mutua posizione tra parabole e rette

[11] E che, comunque, nella prossima sezione, tratteremo in modo più circostanziato.

$$\begin{cases} a+b & =2 \\ 9a+3b & =12 \end{cases}.$$

Per eliminare un altro parametro, dobbiamo fare in modo che i monomi che lo contengano nelle due equazioni abbiano lo stesso coefficiente numerico: quindi moltiplichiamo la prima equazione per tre:

$$\begin{cases} 3a+3b & =6 \\ 9a+3b & =12 \end{cases}$$

a questo punto basta sottrarre membro a membro e "sparisce" anche la b, lasciando scritta una equazione di primo grado in a.

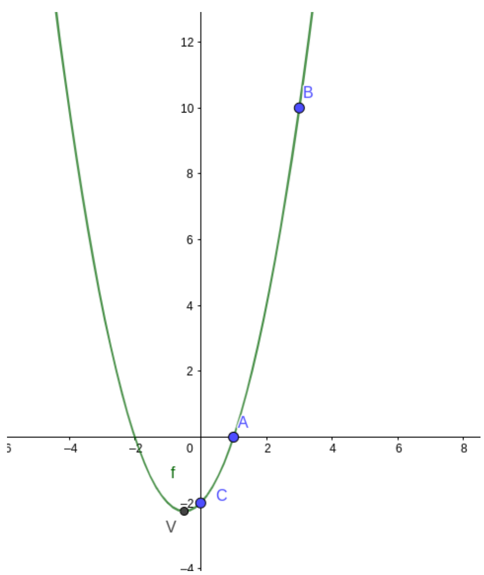
$$6\,a=6 \quad \text{da cui} \quad a=1.$$

Procedendo a ritroso troviamo gli altri due parametri: da $a+b=2$, sostituendo il valore trovato di a si ottiene

$$1+b=2 \quad \Rightarrow \quad b=1.$$

Quindi l'equazione della parabola è

$$y=x^2+x-2.$$



Per disegnarla "bene" troviamoci il vertice:

$$\frac{-b}{2a}=\frac{-1}{2} \qquad =v_1;$$

$$y_V=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)-2=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2=-2-\frac{1}{4}=-\frac{9}{4} \qquad =v_2.$$

Il vertice è quindi $V\left(-\frac{1}{2},-\frac{9}{4}\right)$.

□

2.2. Parabola passante da due punti di cui uno è il vertice. Le condizioni di passaggio per due punti forniscono due condizioni, la terza deriva dal fatto che l'ascissa del vertice è dato da $\frac{-b}{2a}$. Procediamo con un esempio.

Problema 7. *Determinare la parabola passante per $V(-1,5)$ e per $P(3,3)$, sapendo che V è anche vertice.*

Soluzione: Impostiamo le condizioni di passaggio e che $v_1 = \frac{-b}{2a}$ e scriviamo il sistema:

$$\begin{cases} \text{Passaggio per } V: & 5 = a - b + c \\ \text{Passaggio per } P: & 3 = 9a + 3b + c \, . \\ V \quad \text{è vertice} \ : & -1 = \frac{-b}{2a} \end{cases}$$

Sottraendo le prime due equazione *eliminiamo* il parametro c. Dall'ultima si scopre che $b = 2a$. Pertanto *riduciamo* il sistema a quest'altro:

$$\begin{cases} 8a + 4b & = -2 \\ b & = 2a \end{cases} .$$

Sostituendo il valore di b dalla seconda nella prima equazione, si perviene alla equazione lineare nella sola incognita a seguente:

$$8a + 4 \cdot (2a) = -2 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}$$

e quindi si ha anche

$$b = 2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Rimane da determinare c, all'uopo utilizziamo la prima equazione:

$$a - b + c = 5 \quad \Rightarrow \quad c = 5 - \left(-\frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{39}{8}$$

e la parabola ha quindi equazione

$$y = -\frac{1}{8}\,x^2 - \frac{1}{4}\,x + \frac{39}{8}.$$

□

C'è un secondo modo, molto più veloce, per pervenire alla soluzione del problema precedente: consideriamo che l'equazione della parabola è $y = a\,x^2$ se il vertice è nell'origine del sistema di riferimento: ora trasliamo la parabola tramite il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, ottenuto facendo in modo che il vertice della parabola sia quello dato; allora l'equazione a cui si perviene, come abbiamo già riscontrato nei paragrafi precedenti, è:

$$y - v_2 = a\,(x - v_1)^2.$$

Sostituendo i valori v_1 e v_2 con le coordinate del vertice si ottiene

$$y - 5 = a\,(x + 1)^2.$$

Adesso ricaviamo il valore di a imponendo la condizione di passaggio per P :

$$3-5=a\,(3+1)^2 \quad \Rightarrow \quad -2=16\,a. \quad \text{da cui} \quad a=-\frac{1}{8}.$$

Quindi l'equazione della parabola è:

$$y-5=-\frac{1}{8}\,(x+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad y=-\frac{1}{8}\,x^2-\frac{1}{4}\,x-\frac{1}{8}+5$$

ovvero:

$$y=-\frac{1}{8}\,x^2-\frac{1}{4}\,x+\frac{39}{8}$$

come trovato precedentemente.

□

3. Intersezione tra curve e risoluzione di sistemi

Abbiamo già incontrato e risolto il problema di determinare il punto d'intersezione tra due rette (non parallele). D'altra parte, in questo stesso capitolo, abbiamo trovato il punto d'intersezione tra la parabola e la retta orizzontale che passa dal suo fuoco. Inoltre, quando abbiamo trattato il problema di determinare l'equazione della parabola passante per tre punti, oppure due, di cui uno è vertice, ancora una volta abbiamo dovuto considerare **condizioni contemporaneamente verificate.** Ora è giunto il momento di trattare più estesamente il problema di intersecare due o più curve generiche di equazioni date o di considerare un certo numero di condizioni da verificare contemporaneamente e di trovare una (o più) strategie di risoluzione. Quando si impostano più condizioni da verificare contemporaneamente, equivalentemente si cercano le **soluzioni comuni** di più equazioni che devono contemporaneamente essere verificate, allora si dice che si deve risolvere un sistema (di equazioni [12]). Può essere che i sistemi che ne risultano, siano facilmente risolvibili e per essi siano stati già sviluppati una esauriente teoria e molteplici tecniche di soluzione. Per altri, invece, la risoluzione diventa piuttosto difficile, almeno dal punto di vista analitico e quindi si procede a determinare la soluzione "per via grafica" oppure per approssimazione numerica. Sicuramente la risoluzione dei **sistemi lineari** [13] fa parte della prima categoria di problemi: quella con teoria

[12] O disequazioni... ma anche misto.

[13] Che, nel caso di due equazioni in due incognite, significa *determinare il punto d'intersezione tra due rette,* nel caso di tre equazioni in tre incognite, *determinare il punto d'intersezione di tre piani,* ecc... per dimensioni superiori, in cui si parlerà di *iperpiani*, si cercherà sempre "il punto" multidimensionale d'intersezione tra tutti gli iperpiani dati.

completa e tecniche efficaci. Prima di procedere, diciamo che **risolvere un sistema** di n equazioni in n incognite, significa trovare tutte le n-uple di numeri $x, y, z, \ldots$ tali che essi siano soluzione contemporanea di tutte le n equazioni presenti nel sistema.

3.1. Sistemi Lineari. Un sistema lineare è formato da equazioni tutte di primo grado nei polinomi che le compongono. Dato che una relazione del tipo $a\,x + b\,y + c = 0$ rappresenta una retta, il motivo dell'appellativo lineare appare evidente. Un sistema del tipo:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{cases}$$

si chiama 2×2 e rappresenta l'intersezione di due rette: quindi determina, se i coefficienti a_1, b_1 e a_2, b_2 non sono direttamente proporzionali, il punto in comune tra le due rette.
Abbiamo già incontrato sistemi del tipo

$$\begin{cases} a_1x + b_2y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{cases}$$

quando abbiamo determinato la parabola passante per tre punti, impostando le tre condizioni di passaggio [14]. Questo sistema viene indicato col nome 3×3. In generale, un sistema di n equazioni in n incognite si chiamerà $n \times n$. Per la risoluzione di un sistema lineare si può procedere in quattro modi diversi: per sostituzione, per confronto, per eliminazione e tramite il metodo di Cramer. Di questi metodi, l'ultimo è abbastanza noioso e non richiede di ragionare, pertanto non lo trattiamo [15]. Gli altri tre metodi, occasionalmente, li abbiamo utilizzati implicitamente, anche senza averne mai trattato l'idea di fondo sufficientemente: ora è giunto il momento di ragionarci definitivamente su.

3.1.1. *Metodo del confronto.* Supponiamo di determinare dalle n equazioni -formalmente- una stessa incognita per ciascuna di essa: visto che queste incognite, nei punti di risoluzione del sistema, devono coincidere nei valori, allora possiamo uguagliare le equazioni l'uno con l'altro fino ad ottenere un sistema $(n-1) \times (n-1)$ dove la variabile che avevamo "isolata" non comparirà più in alcuna equazione. Poi si procede nello stesso modo fino ad arrivare ad una sola equazione in una

[14] In quel caso x, y e z erano le tre incognite a, b e c.

[15] La presente opera ha, come finalità principale, di "attivare il cervello" e tecniche, che non richiedono di ragionare, sono messe al bando!

sola incognita che, risolta, ci dà il primo valore. A ritroso si determinano una-ad-una tutte le altre incognite. Vediamo con un esempio come funziona.

PROBLEMA 8. *Trovare la soluzione del sistema lineare*

$$\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 3x+y-z=2 \\ x-y+2z=-1 \end{cases}$$

Soluzione:
Dalla prima equazione ricaviamo $z=1-2x-3y$; dalla seconda $z=3x+y-2$ e, infine, dalla terza $z=\frac{-x+y-1}{2}$. Uguagliando i primi due valori di z e il primo con l'ultimo, arriviamo a definire il seguente sistema 2×2 in cui z non compare più:

$$\begin{cases} 1-2x-3y=3x+y-2 \\ 1-2x-3y=\frac{-x+y-1}{2} \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 5x+4y=3 \\ 3x+7y=3 \end{cases}.$$

Operiamo ora nello stesso identico modo, trovandoci, ad esempio, il valore di $x:$ dalla prima si ottiene $x=\frac{3-4y}{5}$ e dalla seconda equazione $x=\frac{3-7y}{3}$. Uguagliando questi due valori di x, si ottiene una equazione in cui comparirà solo l'incognita y, che andremo prontamente a risolvere.

$$\frac{3-4y}{5}=\frac{3-7y}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 9-12y=15-35y \quad \Leftrightarrow y=\frac{15-9}{35-12}=\frac{6}{23}.$$

Trovata y, si determina x tramite una delle due relazioni di prima, ad esempio

$$x=\frac{1}{\cancel{3}}\left(\cancel{3}^{\,1}-7\cdot\frac{\cancel{6}^{\,2}}{23}\right)=\frac{23-14}{23}=\frac{9}{23}.$$

Utilizzando questi due valori, sostituendo in una [16] delle determinazioni di z si ottiene

$$z=1-2\cdot\frac{9}{23}-3\cdot\frac{6}{23}=\frac{23-18\cdot 2}{23}=-\frac{13}{23},$$

pertanto la soluzione del sistema è la tripletta di numeri (in ordine i valori sono dati per x, y e z).

$$\left(\frac{9}{23},\frac{6}{23},-\frac{13}{23}\right).$$

[16] Si scelga, come sempre, la più comoda!

□

Il confronto risulta molto vantaggioso praticamente solo per l'intersezione di due rette *scritte in modo esplicito:* nei fatti, quando dicevano che nel punto d'intersezione le ordinate devono potersi calcolare con l'una e l'altra equazione e quindi bastava uguagliare i secondi membri delle equazioni analitiche delle due rette, stavamo risolvendo un sistema lineare *per confronto.*

3.1.2. *Metodo di sostituzione.* Il metodo di sostituzione è molto simile a quello del confronto, solo che non pretende di determinare da ciascuna equazione una stessa incognita e poi ridurre il sistema ad uno di "una" dimensione minore, ma di ricavare da ciascuna equazione una delle variabili e sostituirla, come se fosse di valore noto, nelle altre. Anche in questo modo di perviene, alla fine, ad un'unica equazione in una sola incognita. Per lo stesso esempio di prima, ora risolviamo il sistema per sostituzione.
Ricordiamo che stiamo cercando la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

Prima di tutto ricaviamo z dalla prima equazione e la sostituiamo nelle altre due, ottenendo:

$$\begin{cases} z = 1 - 2x - 3y \\ 3x + y - (1 - 2x - 3y) = 2 \\ x - y + 2(1 - 2x - 3y) = -1 \end{cases}$$

Quindi le altre due equazioni, in cui non compare più l'incognita z sono:

$$\begin{cases} 5x + 4y = 3 \\ -3x - 7y = -3 \end{cases}$$

Ora ricaviamo la y dalla prima equazione $y = \frac{3-5x}{4}$ e la sostituiamo nella seconda per ottenere:

$$-3x - 7 \cdot \frac{3 - 5x}{4} = -3.$$

Risolviamo per determinare l'incognita x e poi a ritroso le altre due incognite:

$$\left(-3 + \frac{35}{4}\right) x = \frac{21}{4} - 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{23}{4} x = \frac{9}{4} \quad \Rightarrow x = \frac{9}{23}.$$

Da:

$$y = \frac{3-5x}{4}, \quad \text{sostituendo,} \quad \Rightarrow y = \frac{6}{23}$$

e l'ultima incognita si determina sostituendo i valori trovati per x e y in una delle tre equazioni iniziali.

□

In verità anche questo metodo risulta poco efficace se non per casi rari: richiede spesso di svolgere numerosi calcoli, almeno troppo per i nostri gusti.

3.1.3. *Metodo di eliminazione.* Questo metodo, il più efficiente, è dovuto -probabilmente- al matematico tedesco Gauss. Si tratta di eliminare le incognite tra le varie equazioni, per mezzo di una sottrazione di quantità uguali. Il metodo si basa sull'osservazione che tre operazioni non cambiano la natura del sistema:

(1) Scambiare due equazioni di posto;
(2) Moltiplicare tutti i termini di una equazione per uno stesso numero;
(3) Sostituire una equazione con la somma di una sua multipla con multiple delle altre.

Queste tre operazioni, dette **ammissibili** permettono, con un po' di arguzia, di arrivare a scrivere direttamente il valore di una incognita e, a ritroso, di tutte le altre. Addirittura si potrebbe anche fare a meno di scrivere le equazioni di volta in volta, limitandosi a considerare solo i coefficienti numerici dei monomi, presi ordinatamente dalle equazioni e riportati in una tabella detta **matrice associata** al sistema. Risolviamo il sistema degli esempi precedenti con questo metodo.

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

È evidente che sommando le prime due equazioni si elimina l'incognita z dalla seconda equazione e sottraendo la terza dal "doppio della prima" si elimina la stessa incognita dalla terza. Pertanto si ha:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 5x + 4y = 3 \\ 3x + 7y = 3 \end{cases}$$

Moltiplicando la seconda per 7 e la terza per 4, sottraendole, si elimina anche y e si arriva subito ad una equazione con la sola incognita x :

$$\begin{cases} 35x + 28y & = 21 \\ \underline{12x + 28y} & \underline{= 12} \\ 23x \ + \varnothing & = 9 \end{cases}$$

Da cui $x = \frac{9}{23}$. D'altra parte, moltiplicando le stesse equazioni rispettivamente per 3 e 5 e sottraendo, si ottiene:

$$\begin{cases} 15x + 12y & = 9 \\ \underline{15x + 35y} & \underline{= 15} \\ \varnothing \qquad 23y & = 6 \end{cases}$$

da cui $y = \frac{6}{23}$. Per determinare il valore di z si sostituiscono i valori trovati di x e y in una delle tre equazioni iniziali del problema e si procede come negli altri due metodi suesposti.

□

Evidentemente questo ultimo è il metodo da preferire per la risoluzione dei sistemi lineari. Il metodo di sostituzione, invece, diventa fondamentale quando il sistema da risolvere non risulta lineare.

3.2. Incompatibilità ed indeterminatezza dei sistemi lineari. Cosa succede se un sistema non ammette un'unica soluzione? i casi sono due: o ammettono un'infinità di soluzioni, oppure non ne ammettono nessuna. Nel primo caso, la soluzione si *parametrizza* con un certo numero di parametri che corrisponde al numero di "gradi di libertà" del sistema stesso. Ad esempio, supponiamo di cercare la soluzione al sistema lineare composto da due equazioni che rappresentano due rette parallele. Evidentemente, in questo caso, non c'è un soluzione unica, ma potrebbero essercene un'infinità, nel caso le due equazioni rappresentino la stessa identica retta, oppure addirittura nessuna soluzione, nel caso di rette parallele e distinte. Nel primo caso diremo che il sistema è **indeterminato,** dato che non selezione un "punto"-soluzione, nel secondo caso, invece, si dirà che il sistema è composto da equazioni/condizioni **incompatibili.** Due esempi sono chiarificatori di quanto abbiamo detto.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$$

Moltiplicando la prima per due e sottraendo arriviamo al sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Questo vuol dire che la seconda equazione è identica alla prima e, soprattutto, che può essere eliminata dal sistema stesso. A questo punto, le soluzioni sono tutte le coppie (x, y), i cui valori soddisfano la prima equazione, ovvero tali per cui,dato il valore di x, la y si ottiene come

$$y = \frac{1 - 2x}{3}.$$

Quindi la x è stata scelta in modo arbitrario e la y assume un valore determinato per ogni scelta effettuata: si dice che il sistema ammette ∞^1 soluzioni [17]. Modifichiamo l'esempio di prima, considerando due rette parallele distinte.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 5 \end{cases}$$

Procedendo come prima, raddoppiando la prima equazione e sottraendo dalla seconda, si perviene al sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

che presenta una scrittura impossibile ($0 = 3$), quindi, in questo caso, il sistema è *incompatibile* [18]. Questo basti su questo argomento.

4. Mutua posizione tra parabola e retta

Dopo la divagazione sulla risoluzione di sistemi di equazioni, torniamo a parlare delle parabole e, in particolare, del problema di determinare i punti di intersezione tra rette e parabole. Consideriamo attentamente le seguenti tre situazioni in figura. Nel primo caso la retta r non interseca la parabola, quindi il sistema di equazioni, costituito dall'equazione della retta e dall'equazione della parabola, non dà soluzioni. Se la ricerca dei punti di intersezione tra la retta e la parabola passa attraverso la risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} r: \quad y = m\,x + q \\ \gamma: \quad y = a\,x^2 + b\,x + c \end{cases}$$

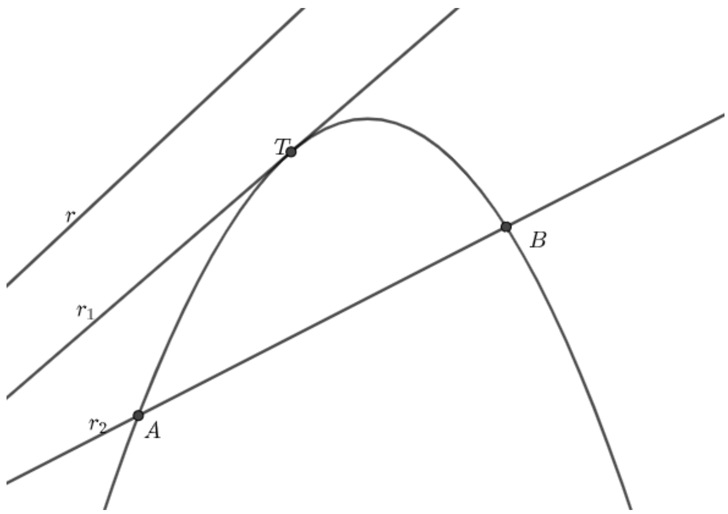
[17] In pratica tutti i punti della retta risolvono il sistema!

[18] O meglio, le due condizioni, espresse dalle due equazioni, sono incompatibili tra di loro.

allora, per confronto [19] si ottiene l'equazione di secondo grado:

$$a\,x^2 + b\,x + c = m\,x + q \quad \Leftrightarrow \quad a\,x^2 + (b - m)\,x + c - q = 0.$$

Questa non ha soluzioni, come si sa, se il discriminante Δ è negativo: infatti si troverà esattamente questa condizione se la retta non interseca la parabola, si dice anche che **la retta è esterna** alla parabola.



Nel secondo caso la retta r_1 "tocca" la parabola in esattamente un punto (che abbiamo indicato con T). Si dice anche che la **retta è tangente** alla parabola nel punto T. Ora, considerando il sistema, come prima, la cui soluzione dà le coordinate del punto d'intersezione, si ha:

$$\begin{cases} r_1: & y = m\,x + q \\ \gamma: & y = a\,x^2 + b\,x + c \end{cases}$$

e quindi, procedendo come prima, si ottiene l'equazione di secondo grado:

$$a\,x^2 + (b - m)\,x + c - q = 0.$$

Avendo la retta e la parabola un unico punto in comune, risulterà che il discriminante si annulla:

$$\boxed{\Delta = 0}.$$

Questa ultima condizione è *importantissima* e si chiama **condizione di tangenza.**

Nell'ultimo caso, r_2 intercetta la parabola in due punti che abbiamo indicato con A e B. Evidentemente, in questo caso, il discriminante

[19] O sostituzione, ché in questo caso sono metodi coincidenti, oppure ancora sottraendo le due equazioni membro a membro...

del polinomio di secondo grado dell'equazione, che risolve il problema, avrà valore positivo. Risulta ora opportuno discutere qualche esempio.

PROBLEMA 9. *Determinare i punti d'intersezione tra la parabola di equazione* $y = 4x^2 - 2x + 1$ *e la retta di equazione* $y = x + 2$.

Soluzione: Uguagliamo i secondi membri, ottenendo:

$$4x^2 - 2x + 1 = x + 2$$

da cui:

$$4x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Il discriminante è $\Delta = 9 + 16 = 25$, che, essendo positivo, ci rassicura sul fatto di trovare due punti d'intersezione. Per determinare i valori delle ascisse di tali punti utilizziamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{3 \mp \sqrt{25}}{8} = \frac{3 \mp 5}{8}$$

per cui le due soluzioni sono:

$$x_1 = -\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad x_2 = 1.$$

Rispettivamente le ordinate le determiniamo dall'equazione della retta [20] :

$$y_1 = -\frac{1}{4} + 2 = \frac{7}{4} \quad \text{e} \quad y_2 = 1 + 2 = 3.$$

Ergo, i punti d'intersezione sono:

$$A\left(-\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right) \quad \text{e} \quad B(1, 3).$$

Si lascia il compito allo studente solerte di rappresentare graficamente la retta, la parabola e verificare che i punti trovati sono posizionati giustamente sul diagramma.

□

4.1. Le rette tangenti e la parabola. Crediamo sia opportuno, dato che è un argomento rilevante anche per il corso degli studi successivi, di dedicare particolare attenzione alle rette tangenti, soprattutto alla risoluzione del problema di determinarle, una volta dato un punto nel piano. Intanto, dato un punto P di coordinate (x_P, y_P), il fascio di rette passanti da P è dato da:

$$y - y_P = m\,(x - x_P).$$

[20] Risultando la più semplice per fare i conti.

Se la parabola ha equazione $\gamma : y = a\,x^2 + b\,x + c$, allora l'intersezione tra una retta generica del fascio e la parabola determina la seguente equazione di secondo grado:

$$a\,x^2 + (b-m)x + c + m\,x_P - y_P = 0. \tag{1}$$

Imponendo la condizione di tangenza $\Delta = 0$ si ricava

$$(b-m)^2 - 4\,a\,(c + m\,x_P - y_P) = 0.$$

Risolvendo rispetto ad m, che rappresenta anche l'unica incognita, si ricava la pendenza della retta tangente. quindi si ha:

$$m^2 - 2\,(b + 2ax_P)\,m + b^2 - 4ac + 4y_P = 0.$$

Anche questa è una equazione di secondo grado! nei fatti da un punto esterno alla parabola si possono tracciare due rette tangenti, quindi dovremo determinare due valori per m; d'altra parte, se il punto appartiene alla parabola stessa, ovvero è il punto di tangenza, allora l'equazione deve ammettere un'unica soluzione. Se, invece, il punto è interno alla concavità della parabola, allora non possono essere trovate rette tangenti e, da questo, segue che quella equazione di secondo grado in m non ammette soluzioni. Prima di procedere con la risoluzione di un paio di problemi, vogliamo discutere il caso in cui il punto da cui tracciare la retta tangente coincide con il punto di tangenza stesso. In questo caso si ha $\Delta = 0$ per l'equazione in m ultima trovata ma, soprattutto, le due soluzioni dell'equazione (1) devono coincidere in x_P. Ricordando che la somma delle radici di una equazione di secondo grado è l'opposto del coefficiente del termine lineare diviso il coefficiente del termine di secondo grado, possiamo scrivere:

$$\frac{m-b}{a} = 2\,x_P \quad \text{da cui} \quad \boxed{m = 2a\,x_P + b}.$$

Ribadiamo, quest'ultima relazione, messa nel riquadro, si riferisce alla direzione di una retta tangente **ad un punto P appartenente alla parabola.** Non può essere usata per determinare la pendenza di una retta tangente tracciata da un punto P, che non appartenga alla parabola: in questo caso andrebbe fatto "il percorso lungo", ovvero *intersecare le rette del fascio centrato in P con la parabola ed impostare la condizione di tangenza per determinare la pendenza/le pendenze giuste.*

Problema 10. *Determinare la retta tangente alla parabola di equazione $y = \frac{1}{2}\,x^2 - 2x$ nel suo punto $P(4,0)$.*

Soluzione: Il fascio di rette centrato in P ha equazione:

$$y = m\,(x-4).$$

L'intersezione tra le rette del fascio e la parabola porta all'equazione:

$$\frac{1}{2}x^2 - (2+m)\,x + 4m = 0.$$

Imponendo la condizione di tangenza otteniamo:

$$\Delta = \ (2+m)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4m = 0$$

da cui:

$$m^2 - 4m + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (m-2)^2 = 0$$

e, infine $m = 2$. Quindi la retta tangente è:

$$y = 2(x-4) \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x - 8.$$

In modo alternativo, abbiamo visto che se P sta sulla parabola, allora $m = 2a\,x_P + b$ per cui:

$$m = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 - 2 = 2.$$

Inoltre, l'equazione cercata, sarà quella di una retta di pendenza 2 e passante da P :

$$y = 2(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x - 8.$$

4.2. Formula di sdoppiamento. Se il punto da cui si conduce la tangente è anche punto di tangenza, abbiamo visto che si può determinare la pendenza della retta tangente con la formula $m = 2a\,x_P + b$. Pertanto la retta tangente è

$$y - y_P = (2a\,x_P + b) \cdot (x - x_P)$$

ovvero

$$y - y_P = 2a\,x_P\,x - 2a\,x_P^2 + b\,x - b\,x_P.$$

Ma si ha anche, dato che il punto sta sulla parabola,

$$y_P = a\,x_P^2 + b\,x_P + c$$

e sommando membro a membro l'equazione di prima con il doppio di quest'altra [21] si ottiene:

$$y + y_P = 2a\,x_P\,x + b\,x + bx_p + 2c$$

che, dividendo per due si scrivere come

$$\frac{y + y_P}{2} = a\,x_p\,x + b\,\frac{x + x_P}{2} + c.$$

Questa formula prende il nome di **formula di sdoppiamento.** Confrontiamo questa formula con quella della parabola:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

[21] In modo da eliminare il termine con x_P^2

Notiamo che i coefficienti a, b e c sono messi in ordine se si operano tali sostituzioni:

$$\begin{cases} y \mapsto \frac{y+y_P}{2} & \text{Media aritmetica tra le ordinate} \\ x^2 \mapsto x_p \cdot x & \text{Il prodotto a posto del quadrato} \\ x \mapsto \frac{x+x_P}{2} & \text{Media aritmetica tra le ascisse} \end{cases}$$

Utilizzando tali formule, si scrive direttamente l'equazione della retta tangente a partire da quella della parabola [22]. Ad esempio, per il precedente problema si avrebbe subito:

$$\frac{y+0}{2} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x - 2\,\frac{x+4}{2} + 0$$

da cui, raddoppiando tutto:

$$y = 4\,x - 2x - 8 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x - 8.$$

□

Problema 11. *Dalla "Fisica" si apprende che, il moto del baricentro di un sistema di punti materiali, che si muova soggetto unicamente alle forze del campo gravitazionale, è descritto da una parabola. Supponiamo che un ragazzino lanci una pietra* [23] *verso l'alto davanti a sé. Se un osservatore registra che la pietra parte dall'altezza di* 1.5 *mt (l'altezza del ragazzino circa) e che la massima altezza, la raggiunge a* 5 *mt dal punto di lancio ed è pari a* 6 *mt, a che distanza colpirà terra e con quale inclinazione?*

Soluzione: Se noi conoscessimo l'equazione della traiettoria parabolica della pietra, sapremmo dare risposta ad ogni domanda. Possiamo determinare la traiettoria considerando che la parabola parte dal punto $A\left(0, \frac{3}{2}\right)$ ed ha il vertice in $V(5,6)$. Consideriamo l'equazione $y - v_2 = a\,(x - v_1)^2$ ed imponiamo sia che $v_1 = 5$, $v_2 = 6$ sia che passa da A:

$$\frac{3}{2} - 6 = a\,(0-5)^2$$

da cui:

$$a = -\frac{9}{2 \cdot 25} = -\frac{9}{50}.$$

Sostituendo nell'equazione della parabola otteniamo

$$y - 6 = -\frac{9}{50}\,(x-5)^2.$$

[22] Formule analoghe sono valide per tutte le coniche! basta sostituire i quadrati con i prodotti $x_P \cdot x$ oppure $y_P \cdot y$ a seconda che si debba sostituire la x^2 o la y^2 ed i termini lineari con le medie aritmetiche $\frac{x+x_P}{2}$ ovvero $\frac{y+y_P}{2}$.

[23] Che per semplicità immaginiamo puntiforme

Per determinare il punto di atterraggio P, bisogna imporre $y = 0$, da cui:

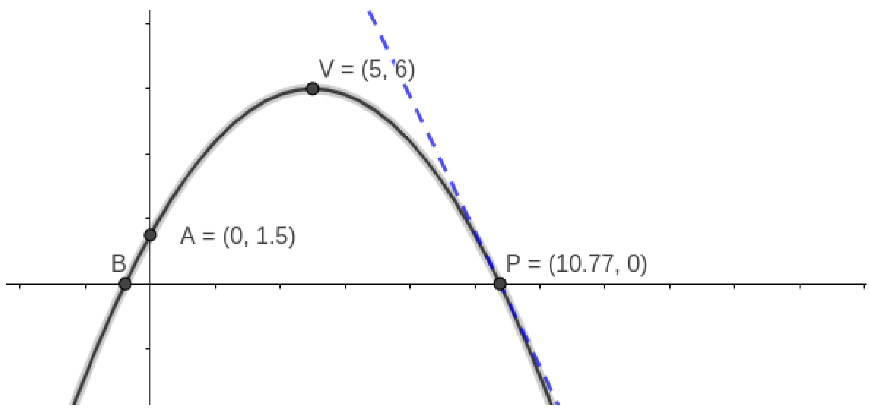
$$(x-5)^2 = \frac{50 \cdot 6}{9}$$

e quindi:

$$x = 5 \mp \sqrt{\frac{50 \cdot 6}{9}},$$

e scartiamo il valore negativo, che fisicamente corrisponde al fatto che la pietra invece di essere proiettata davanti al ragazzino, indietreggia per cadere dietro di lui. Quindi otteniamo la soluzione:

$$x = 5 + \frac{10}{3}\sqrt{3} \approx 10.773\,\text{mt}.$$



Per trovare l'inclinazione, basta determinare la pendenza della retta tangente nel punto di atterraggio; quest'ultimo, d'altra parte, è un punto della parabola, quindi possiamo utilizzare la formula $m = 2a\,x_P + b$. Sviluppiamo il quadrato di binomio e semplifichiamo per ottenere l'equazione standard della parabola:

$$y = -\frac{9}{50}x^2 + \frac{9}{5}x - \frac{9}{2} + 6$$

ovvero:

$$y = -\frac{9}{50}x^2 + \frac{9}{5}x + \frac{3}{2}.$$

Quindi la pendenza cercata è:

$$m = -2 \cdot \frac{9}{50}\left(5 + \frac{10}{3}\sqrt{3}\right) + \frac{9}{5}$$

$$m = \cancel{-\frac{9}{5}} - \frac{6}{5}\sqrt{3} \cancel{+\frac{9}{5}} = -\frac{6\sqrt{3}}{5},$$

ovvero ogni 5 metri in avanti scende di $6\sqrt{3}$ metri.

□

Problema 12. *Si lancia un oggetto da una torre alta* 20 *metri e si osserva che cade ad una distanza di* 10 *metri dalla base della torre. Sapendo che è lanciato verso l'alto ed ad un metro dalla torre si trova ad una altezza di* 24 *metri, dire quale è l'altezza massima raggiunta e a che distanza dalla torre essa si ottiene.*

Soluzione: Considerando il sistema di riferimento in cui la torre è "a filo con l'asse delle ordinate" proprio nel punto di partenza dell'oggetto e la base della torre è piantata sull'asse delle ascisse, allora il punto di partenza ha coordinate $(0, 20)$, ed il punto di atterraggio coordinate $(10, 0)$. Inoltre si sa che passa dal punto di coordinate $(1, 24)$. Basta ora scrivere l'equazione della parabola passante dai tre punti e determinare le coordinate del vertice, per rispondere ad entrambe le richieste poste. Dell'equazione standard $y = a\,x^2 + b\,x + c$, il valore di c è già determinato dall'intercetta asse y, quindi $c = 20$. Imponiamo le altre due condizioni di passaggio per ottenere il seguente sistema lineare in a e b:

$$\begin{cases} \text{Passaggio per } (10,0): & 100\,a + 10\,b + 20 = 0 \\ \text{Passaggio per } (1,24): & a + b + 20 = 24 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = 4 \end{cases}.$$

Moltiplicando la seconda per 10 e sottraendo dalla prima equazione, si ottiene l'equazione che determina a:

$$90\,a = -60 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{2}{3}.$$

Si ricava quindi anche:

$$b = 4 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{14}{3}.$$

L'equazione della traiettoria dell'oggetto è quindi $y = -\frac{2}{3}\,x^2 + \frac{14}{3}\,x + 20$. Per trovare le coordinate del vertice, determiniamo dapprima:

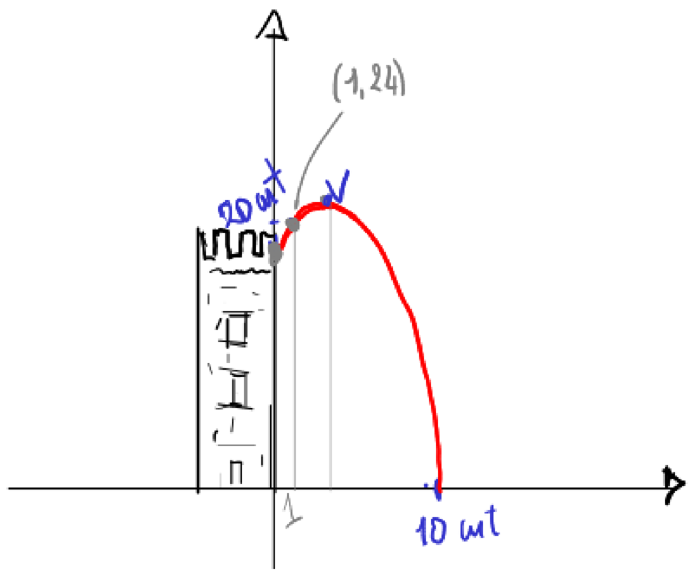
$$v_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{14}{3}}{-\frac{4}{3}} = \frac{7}{2}$$

e successivamente, sostituendo nell'equazione della parabola tale valore,

$$v_2 = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{14}{3} \cdot \left(\frac{7}{2}\right) + 20 =$$

$$= -\frac{7^2}{6} + \frac{2 \cdot 7^2}{6} + 20 = \frac{49}{6} + \frac{120}{6} = \frac{71}{6} \approx 11.83.$$

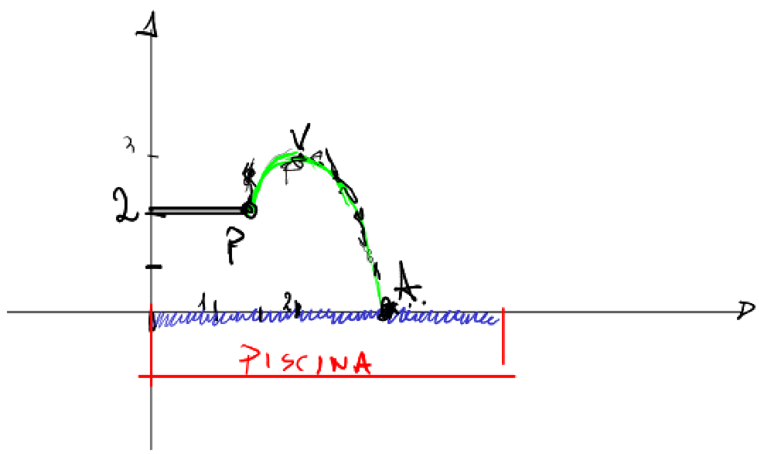
Dato che il vertice è dato dal punto $V = \left(\frac{7}{2}, \frac{71}{6}\right)$, concludiamo che l'altezza massima è di circa 11.83 metri e viene raggiunta a distanza di tre metri e mezzo lontano dal punto di partenza. Il disegno seguente illustra la situazione rappresentata nella traccia.



□

Problema 13. *Un tuffatore si lancia dal trampolino di due metri e, prima di arrivare in piscina, si solleva fino ad una altezza di tre metri a 50 cm di distanza dal trampolino stesso. A che distanza dal bordo della piscina giunge in acqua, se il trampolino ha il suo bordo rientrante nella piscina per un metro e mezzo? e con quale inclinazione arriva?*

Soluzione: La situazione è rappresentata nella figura seguente



Se consideriamo il sistema di riferimento con l'origine posta "a pelo d'acqua" nello spigolo a sinistra direttamente sotto il trampolino, allora il punto di partenza del tuffatore ha coordinate $P = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$. Il punto più alto della traiettoria del tuffatore è raggiunto mezzo metro più avanti del punto di partenza, per cui a $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$ metri dall'origine del sistema di riferimento ed ha coordinate: $V=(2,3)$. Si tratta di trovare l'equazione della parabola passante da P e V con quest'ultimo coincidente con il vertice. Impostiamo quindi le condizione di passaggio e diciamo che V è vertice, ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} \text{Passaggio per } P: & 2=\frac{9}{4}\,a+\frac{3}{2}\,b+c \\ \text{Passaggio per } V: & 3=4\,a+2\,b+c \\ \text{Il vertice è } V: & \frac{-b}{2a}=2 \end{cases}$$

che, riscritto più ordinatamente, è:

$$\begin{cases} \frac{9}{4}\,a+\frac{3}{2}\,b+c & =2 \\ 4\,a+2\,b+c & =3 \\ b & =-4\,a \end{cases}.$$

Sottraendo le prime due equazioni, eliminiamo c:

$$\begin{cases} \frac{7}{4}\,a+\frac{1}{2}\,b & =1 \\ b & =-4a \end{cases}$$

e sostituendo il "valore di b" nella prima equazione, ricaviamo il valore del parametro a:

$$\frac{7}{4}\,a+\frac{1}{2}\cdot(-4a)=1 \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{8}\,a=1$$

e quindi $a=-8$. Procedendo a ritroso ricaviamo ora $b=32$ e, successivamente, $c=3-4\,a-2\,b$, quindi $c=3+32-64=-29$. La parabola cercata ha quindi equazione:

$$y=-8\,x^2+32\,x-29.$$

Per determinare il punto in cui entra in piscina, dobbiamo porre l'ordinata a zero, ottenendo l'equazione:

$$8\,x^2-32\,x+29=0$$

che risolviamo prontamente utilizzando la formula ridotta:

$$x_{1,2}=\frac{16\mp\sqrt{16^2-8\cdot 29}}{8}=\frac{16\mp\sqrt{8\cdot(32-29)}}{8}=$$

$$=\frac{16\mp 2\sqrt{2\cdot 3}}{8}=\frac{8\mp\sqrt{6}}{4}.$$

La soluzione più piccola è chiaramente da scartare, dato che "fisicamente" significa che il tuffatore finisce sotto il trampolino! quindi il punto di arrivo in acqua è dato dall'ascissa

$$x_A = \frac{8+\sqrt{6}}{4} \approx 2.612.$$

Vuol dire che, rispetto al trampolino, arriva a $2.612-1.5 = 1.12$ mt più in avanti. Per trovare l'inclinazione, possiamo considerare che il punto $A = \left(\frac{8+\sqrt{6}}{4}, 0\right)$ è un punto della parabola, quindi il coefficiente della retta tangente si può determinare come $m = 2a\,x_A + b$ che, sostituendo i valori trovati, diventa;

$$m = 2\cdot(-8)\cdot\frac{8+\sqrt{6}}{4} + 32 = \cancel{-32} - 4\sqrt{6}\cancel{+32} = -4\sqrt{6}.$$

□

5. Proprietà focali

La parabola gode di importanti proprietà che la rendono utile come "profilo" da utilizzare in svariate occasioni. La principale proprietà è che, se degli specchi vengono sistemati lungo un profilo parabolico, allora tutti i raggi di luce, che arrivassero parallelamente all'asse della parabola, verrebbero riflessi nel fuoco della parabola stessa [24]. Questa proprietà non vale solo per la luce, ma per qualsiasi cosa che si possa riflettere lungo una superficie parabolica: ad esempio, i segnali satellitari sono molto deboli per evitare di creare interferenze con le comunicazioni terrestri, per cui si è pensato di "potenziare" il segnale facendo convergere tanti di essi in uno stesso punto. Ecco spiegato il principio di funzionamento delle antenne paraboliche! i radiosegnali rimbalzano sulla superficie metallica e convergono tutti nell'"occhio" (illuminatore) dell'antenna. Ma vale anche il fenomeno inverso: se si mette una sorgente luminosa (sferica) nel fuoco di una parabola rivestita di materiale riflettente, allora i raggi che colpiscono tale superficie vengono tutti riflessi parallelamente all'asse della parabola! questo fatto si utilizza per la costruzione dei fanali delle automobili: infatti è utile illuminare "dritto-davanti" all'automobile, piuttosto che disperdere la

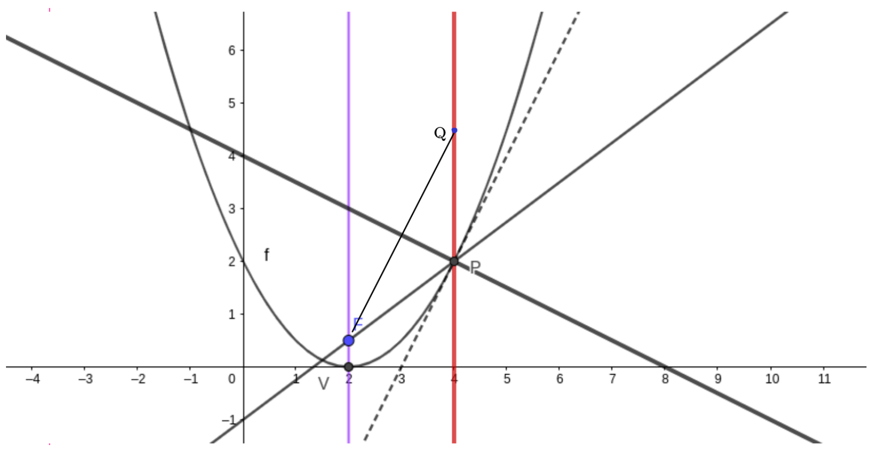
[24]Non a caso quel punto viene chiamato **fuoco:** una pagliuzza messa nel fuoco di uno specchio parabolico, prenderebbe fuoco, in una giornata sufficientemente assolata. I famosi **specchi ustori di Archimede** non sarebbero altro che degli specchi parabolici con il fuoco posto nel punto dove stazionavano le navi romane... probabilmente è solo "mitologia", dato che ai tempi di Archimede non si possedeva una tecnologia così avanzata da creare specchi di una certa dimensione con tanta precisione.

luce tutto attorno al muso del veicolo stesso [25]. Più avanti nel libro, daremo una dimostrazione di questa proprietà "di riflessione" tramite gli strumenti più avanzati del *calcolo differenziale,* però già ora possiamo utilizzare il seguente teorema per giustificare le proprietà testé citate.

Prima di procedere definiamo la retta perpendicolare alla retta tangente, in un punto di una data curva, come la **retta normale** o semplicemente **la normale** alla curva nel punto.

TEOREMA 1. *La retta normale in un punto della parabola biseca l'angolo formato dalla retta parallela all'asse della parabola e passante dal punto e la retta passante per il punto ed il fuoco della parabola* [26].

Dimostrazione: Si consideri la seguente figura.



Se P ha coordinate (x_P, y_P), e la parabola ha equazione $y = a\,x^2 + b\,x + c$, allora la retta tangente ha pendenza data da $m = 2a\,x_P + b$, [27].

[25]Notiamo solo che in entrambi i casi, antenna satellitare e fanali dell'automobile, più che di parabola sarebbe corretto parlare di **superficie parabolica,** ottenuta -ad esempio- ruotando un pezzo di parabola attorno al proprio asse di simmetria. È chiaro, però, che l'abuso di linguaggio si basa sul fatto che un qualsiasi piano di taglio a cui appartiene l'asse di simmetria di tale superficie, genera una parabola uguale esattamente a quella che si farebbe fatta ruotare: quindi è come se noi avessimo un'infinità di parabole, tutte con lo stesso vertice e lo stesso fuoco e, pertanto, con le stesse proprietà focali ed è legittimo, per questo motivo, continuare a riferirsi a tale superfici indicando solo la curva generatrice.

[26]Pertanto, se la parallela all'asse è la traiettoria di un raggio di luce che colpisce la parabola nel dato punto, allora esso viene riflesso sul fuoco della parabola, dato che la traiettoria "riflessa" è quella che forma un angolo uguale con la retta normale alla curva che descrive il profilo della superficie riflettente.

[27]Ergo la normale avrà pendenza $m_\perp = -\frac{1}{2a\,x_P + b}$.

Per dimostrare la tesi, verificheremo che il triangolo $\overline{FPQ}$, ottenuto tracciando il lato $\overline{FQ}$ parallelo alla retta tangente in P, è isoscele sulla base $\overline{FQ}$ e, a tal fine, dimostreremo che la retta su cui giace la mediana relativa al lato $\overline{FQ}$ è esattamente la retta perpendicolare al lato stesso e passante da P, ovvero coincide con la normale alla parabola nel punto P, [28] pertanto è anche la retta a cui appartiene la bisettrice dell'angolo al vertice $F\hat{P}Q$.

$$\text{Retta FQ:} \quad y - F_2 = (2a\,x_P + b)\,(x - F_1),$$

dove (F_1, F_2) rappresentano le coordinate del fuoco F. Sostituiremo successivamente i valori delle coordinate del fuoco, per come le abbiamo già determinate: $F_1 = v_1 = -\frac{b}{2a}$ e $F_2 = \frac{-\Delta+1}{4a}$. Ora, invece troviamo le coordinate di Q ponendo il valore dell'ascissa uguale a quella di x_P nell'equazione della retta per F e Q. Si ottiene:

$$y = (2a\,x_P + b)\,(x_P - F_1) + F_2$$

da cui:

$$Q = (x_p\ ,\ (2a\,x_P + b)\,(x_P - F_1) + F_2).$$

Il punto medio tra F e Q è:

$$M_{FQ} = \left(\frac{x_P + F_1}{2}\,,\, \frac{(2a\,x_P + b)(x_P - F_1) + F_2 + F_2}{2} \right).$$

La pendenza della retta passante da P e da M_{FQ} è data da

$$\frac{(2a\,x_P + b)(x_P - F_1) + 2F_2 - 2\,y_P}{x_P + F_1 - 2x_P} =$$

[29]

$$= \frac{\frac{(2a\,x_P+b)^2}{2a} + 2\left(\frac{-\Delta+1}{4a} - y_P\right)}{\frac{-b-2a\,x_P}{2a}} = \frac{(2a\,x_P + b)^2 + (-\Delta + 1 - 4a\,x_P)}{-(2a\,x_P + b)} =$$

$$= \frac{\cancel{4a^2\,x_P^2} + \cancel{4ab\,x_P} + \cancel{b^2} + \cancel{4ac} - \cancel{b^2} + 1 \,-\, 4a\,(\cancel{a\,x_P^2} + \cancel{b\,x_P} + \cancel{c})}{-m} =$$

$$= -\frac{1}{m} = m_{\perp},$$

da cui segue quanto affermato, ovvero che la mediana coincide con l'altezza del triangolo $\overline{FPQ}$ e quindi il triangolo è isoscele e quella mediana, che è altezza, coincide anche con la bisettrice dell'angolo in $\hat{P}$.

c.v.d.

---

[28]Ovvero dimostriamo che l'altezza relativa ad $\overline{FQ}$ è anche mediana, per cui è anche bisettrice del triangolo di cui sono elementi.

[29]Ricordando l'espressione delle coordinate di F.

CAPITOLO 4

L'Ellisse

L'ellisse è il luogo geometrico dei punti **la cui somma delle distanze da due punti prefissati è costante,** per come -tra l'altro- avevamo proprio dimostrato come esempio nel primo capitolo. Per semplicità pensiamo di *considerare i Fuochi,* questi due punti prefissati, *sull'asse delle ascisse e simmetrici rispetto all'origine* del sistema di coordinate. Sia quindi $F_1 = (-f, 0)$ e $F_2 = (f, 0)$ e $P(x, y)$ un punto generico dell'ellisse. La condizione che la determina è:

$$d(F_1, P) + d(F_2, P) = k,$$

essendo k il valore costante su cui soffermeremo l'attenzione a breve. Svolgendo qualche semplice calcolo, sulla condizione di prima, otteniamo:

$$\sqrt{(-f-x)^2 + (0-y)^2} + \sqrt{(f-x)^2 + (0-y)^2} = k$$
$$\sqrt{(f+x)^2 + y^2} = k - \sqrt{(f-x)^2 + y^2}$$

ed elevando al quadrato:

$$(f+x)^2 + \cancel{y^2} = k^2 - 2\,k\,\sqrt{(f-x)^2 + y^2} + (f-x)^2 + \cancel{y^2}$$
$$(f+x)^2 - (f-x)^2 - k^2 = -2\,k\,\sqrt{(f-x)^2 + y^2}$$
$$k^2 - 4\,f\,x = 2k\,\sqrt{(f-x)^2 + y^2}$$

ed elevando nuovamente al quadrato:

$$k^4 - 8\,f\,k^2\,x + 16\,f^2\,x^2 = 4\,k^2\,(f-x)^2 + 4\,k^2\,y^2$$
$$k^4 \cancel{-8\,f\,k^2\,x} + 16\,f^2\,x^2 = 4\,k^2\,f^2 \cancel{-8\,k^2\,f\,x} + 4\,k^2\,x^2 + 4\,k^2\,y^2$$

da cui

$$k^2\,(k^2 - 4\,f^2) = 4(k^2 - 4\,f^2)\,x^2 + 4\,k^2\,y^2$$

e dividendo per il primo membro, rileggendo da destra a sinistra, si ottiene:

$$\frac{4}{k^2}\,x^2 + \frac{4}{k^2 - 4\,f^2}\,y^2 = 1$$

o meglio ancora:

$$\frac{x^2}{\frac{k^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{k^2 - 4\,f^2}{4}} = 1.$$

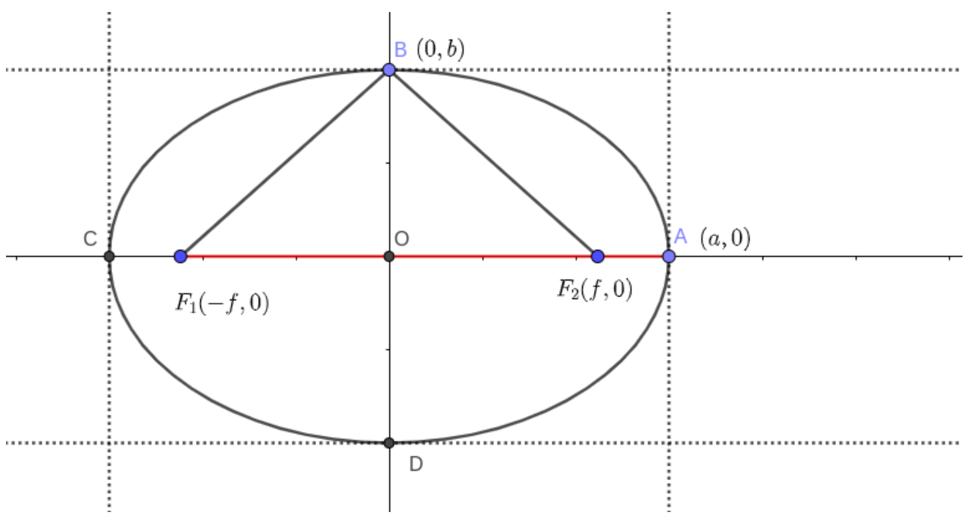
Detti a e b due parametri per i quali

$$a^2 = \frac{k^2}{4} \quad \text{e} \quad b^2 = \frac{k^2 - 4f^2}{4},$$

si ottiene, considerando [1] $a \geqslant b$, - l'**equazione standard dell'ellisse** [2]**:**

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

Intanto c'è da notare che l'espressione di a^2 è ben definita, dato che il rapporto $\frac{k^2}{4}$ è sicuramente positivo; d'altra parte $k^2 = 4a^2$ e quindi $b^2 = a^2 - f^2 = (a-f)(a+f)$. La seconda parentesi è positiva, essendo somma di due quantità positive. Ma anche la prima parentesi è positiva: ponendo $y = 0$ nell'equazione standard, si ottiene che i punti d'intersezione tra la curva e l'asse della ascisse sono dati da $(\mp a,\, 0)$, ma la somma delle distanze tra i due fuochi deve essere maggiore della distanza tra i fuochi stessi [3], allora il valore di a deve essere maggiore di f e questo significa che anche b^2 è ben definita. Ora, se poniamo $x = 0$ nell'equazione, troviamo i punti d'intersezione dell'ellisse con l'asse verticale: essi sono i due punti $(0, \mp b)$. I punti d'intersezione tra l'ellisse e gli assi coordinati si chiamano **vertici dell'ellisse** e sono dati da: $(\mp a,\, 0)$ e $(0,\, \mp b)$. Tutta l'ellisse è racchiusa in un rettangolo che ha i lati paralleli agli assi coordinati e passano dai vertici dell'ellisse [4].



[1] Senza ledere alla generalità del discorso.

[2] Centrata nell'origine del sistema di riferimento

[3] Altrimenti non si riuscirebbe a "girarci attorno ai due punti per creare la curva!

[4] Essendo i vertici i punti medi dei lati del rettangolo!

I segmenti $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ vengono detti, rispettivamente **semi-asse** maggiore e minore dell'ellisse. Ci si riferisce anche al semi-asse maggiore tramite la sua lunghezza a ed a quello minore, tramite la lunghezza b. Dalla relazione $k^2 = 4a^2$ ricaviamo che $k = 2a$. Nella figura si vede chiaramente che $k = d(F_1, A) + d(F_2, A) = a + f + a - f = 2a$, come già ricavato, precedentemente, per via algebrica. D'altra parte abbiamo scritto che $b^2 = a^2 - f^2$, per cui ricaviamo le coordinate dei fuochi, determinando il valore di f tramite la relazione: $f = \sqrt{a^2 - b^2}$. Questa stessa formula si può ricavare considerando il disegno ed imponendo:

$$d(F_1, B) + d(F_2, B) = k,$$

poiché si avrebbe anche:

$$2\,d(F_2, B) = 2a \quad \Leftrightarrow \quad d^{\,2}(F_2, B) = a^2$$

$$f^2 + b^2 = a^2$$

e quindi, come già affermato e ricavato per via formale algebrica:

$$f = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

1. L'eccentricità

Una quantità molto importante, che può essere definita per tutte le coniche [5], è il rapporto tra le distanze dei punti della conica dalla retta direttrice [6] e da un punto detto fuoco: questa quantità si definisce **eccentricità** della conica. Per l'ellisse questo rapporto esprime, in un certo senso, *quanto risulta schiacciata* e quindi "lontana dall'essere una circonferenza". Quindi possiamo dire che, in generale,

$$e = \frac{d(P, F)}{d(P, r)}$$

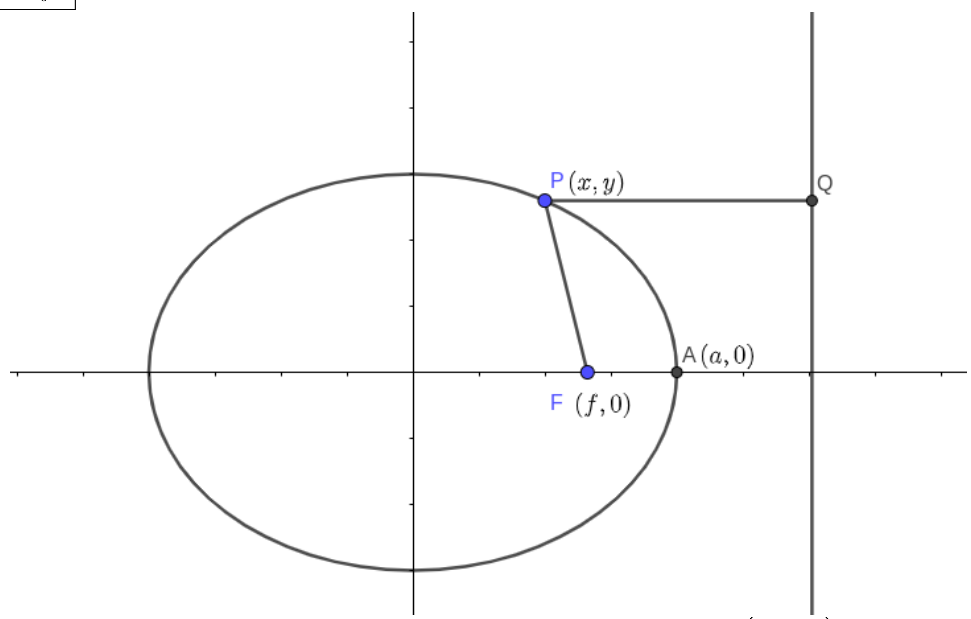
dove r è la retta direttrice, F il fuoco della conica [7] e P un punto generico della curva. Nel caso della **parabola,** evidentemente, tale rapporto è uguale ad 1 : per cui si può dire che tutte *le coniche di eccentricità* $e = 1$ *sono parabole.*

[5] E che le definisce a meno di similitudini!

[6] Dove la retta direttrice si determina come intersezione tra il piano di taglio che genera la curva, sezionando il cono ed il piano a cui appartiene la circonferenza ottenuta come come contatto tra la falda del cono e la sfera di Dandelin.

[7] Od uno dei fuochi, nel caso la conica ne avesse due.

1.1. L'eccentricità per le ellissi. Data un'ellisse di semi-asse maggiore a e un fuoco in $F(f,0)$, dimostriamo che la condizione $d(F,P) = e \cdot d(P,r)$ rappresenta l'ellisse standard se $\boxed{e = \frac{f}{a}}$, ovvero se **l'eccentricità coincide con il rapporto tra la semi-distanza focale ed il semi-asse maggiore** e la retta direttrice ha equazione $\boxed{x = \frac{a^2}{f}}$.



La proiezione di P sopra la retta r sia $Q = \pi_r(P) = \left(\frac{a^2}{f}\,,\, y\right)$, per cui $d^2(P,Q) = \left(\frac{a^2}{f} - x\right)^2$. D'altra parte $d^2(F,P) = (x-f)^2 + y^2$ e quindi, considerando l'espressione $d(P,F) = e \cdot d(P,r)$ ed elevandola al quadrato, si ottiene:

$$(x-f)^2 + y^2 = e^2 \left(\frac{a^2}{f} - x\right)^2$$

ergo, sviluppando i calcoli e considerando che $e = \frac{f}{a}$:

$$x^2 - 2f\,x + f^2 + y^2 = e^2\,\frac{a^4}{f^2} - 2\,e^2\,\frac{a^2}{f}\,x + e^2\,x^2$$

$$\left(1 - \frac{f^2}{a^2}\right) x^2 \cancel{-2\left(f - \frac{f^2}{a^2}\cdot\frac{a^2}{f}\right) x} + y^2 = \frac{\cancel{f^2}}{a^2}\cdot\frac{a^4}{\cancel{f^2}} - f^2$$

$$\frac{a^2 - f^2}{a^2}\,x^2 + y^2 = a^2 - f^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - f^2} = 1.$$

Supponendo $0 < e < 1$ si ha che $a > f$, per cui il secondo denominatore risulta essere una quantità positiva che possiamo indicare con $b^2 = a^2 - f^2$, si torna nuovamente all'espressione standard:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e, per altro, alla già determinata relazione $f = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Possiamo, per tanto, concludere che *le coniche con eccentricità* $e \in (0, 1)$ *rappresentano delle ellissi,* dove l'eccentricità coincide con il rapporto tra la semi-distanza tra i fuochi ed il semi-asse maggiore.

2. Mutua posizione tra ellisse e retta

Una retta può intersecare l'ellisse in due punti, un punto oppure in nessun punto: esattamente la stessa situazione già riscontrata con la parabola. Dato che l'ellisse presenta una equazione analitica che è un polinomio di secondo grado e la retta, invece una equazione di primo grado, la loro intersezione genera, mettendo a sistema le due equazioni e facendo una "banale" sostituzione, una equazione di secondo grado. Quest'ultima, dipendentemente dal discriminante Δ associato, può avere due soluzioni, una soluzione oppure nessuna: rispettivamente per i casi in cui le intersezioni sono due punti, un unico punto, oppure nessuno. Osserviamo che se la retta passa per un punto interno al pezzo di piano delimitato dall'ellisse, allora l'intersezione è sempre su due punti. Comunque, la posizione a cui si è sempre maggiormente interessati è quando l'intersezione tra le due figure consiste in un unico punto, ovvero quando la retta è *tangente* all'ellisse. Anche per l'ellisse vale quello che è stato detto per la parabola, ovvero che per determinare la retta tangente si può imporre la **condizione di tangenza,** consistente nel dire che, l'equazione corrispondente al sistema tra l'equazione della retta e quella dell'ellisse, ha $\Delta = 0$. Da questa condizione si ricava il valore della pendenza della retta e, successivamente, le coordinate del loro punto comune.

2.1. Formula di sdoppiamento. Anche per l'ellisse si può determinare la retta tangente in modo particolarmente semplice e veloce utilizzando una *formula di sdoppiamento,* se il punto di tangenza è noto. Infatti, detto $P(x_P, y_P)$ il punto in comune tra la retta di equazione $y - y_P = m\,(x - x_P)$ e l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, equivalentemente $b^2\,x^2 + a^2\,y^2 = a^2\,b^2$, possiamo dire che le coordinate del punto soddisfano ad entrambe le equazioni cartesiane, in particolare si ha

$$b^2\,x_P^2 + a^2\,y_P^2 = a^2\,b^2$$

e sottraendo questa equazione da quella dell'ellisse [8]:

$$(x^2 - x_P^2)\,b^2 + (y^2 - y_P^2)\,a^2 = 0,$$

ovvero

$$(x - x_P)\cdot(x + x_P)\,b^2 + (y - y_P)\cdot(y + y_P)\,a^2 = 0.$$

Osserviamo che $(y - y_P)$ è una espressione data dall'equazione della retta tangente in P, per cui possiamo sostituirla nell'equazione appena trovata, scrivendo:

$$(x - x_P)\cdot(x + x_P)\,b^2 + [m\,(x - x_P)]\cdot(y + y_P)\,a^2 = 0$$

che diventa, tramite opportuna messa in evidenza,

$$\cancel{(x - x_P)}\cdot\left[(x + x_P)\,b^2 + m\,(y + y_P)\,a^2\right] = 0$$

ovvero

$$(x + x_P)\,b^2 + m\,(y + y_P)\,a^2 = 0.$$

Determiniamo la pendenza della retta tangente, quindi, come

$$m = -\frac{(x + x_P)\,b^2}{(y + y_P)\,a^2}\,,$$

relazione che deve essere verificata, in particolare, per le coordinate del punto P, ergo:

$$m = -\frac{(x_P + x_P)\,b^2}{(y_P + y_P)\,a^2} = -\frac{x_P\,b^2}{y_P\,a^2}.$$

La retta tangente, quindi, ha equazione:

$$y - y_P = -\frac{x_P\,b^2}{y_P\,a^2}\cdot(x - x_P)$$

ovvero

$$y_P\,a^2\cdot(y - y_P) + x_P\,b^2\cdot(x - x_P) = 0$$

e, dopo semplici passaggi:

$$y_P\,a^2\,y + x_P\,b^2\,x - (y_P^2\,a^2 + x_P^2\,b^2) = 0.$$

Quanto scritto nella parentesi però, corrisponde al prodotto $a^2\,b^2$, dato che è proprio l'equazione dell'ellisse scritta per il suo punto particolare P, per cui l'ultima equazione si può riscrivere come:

$$a^2\,y_P\,y + b^2\,x_P\,x = a^2\,b^2$$

[8]Scritta senza denominatori.

ovvero anche, dividendo tutto per il secondo membro e riordinando gli addendi,

$$\boxed{\frac{x_P \cdot x}{a^2} + \frac{y_P \cdot y}{b^2} = 1}.$$

Questa nel riquadro prende il nome -giustamente- di *formula di sdoppiamento per l'ellisse* e si può ottenere semplicemente tramite le due trasformazioni seguenti:

$$\begin{cases} x^2 & \mapsto x_P \cdot x \\ y^2 & \mapsto y_P \cdot y \end{cases}$$

da applicare all'equazione standard dell'ellisse.

PROBLEMA 14. *Determinare l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa* 2, *di ordinata positiva, dell'ellisse di equazione* $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Soluzione: L'ordinata del punto P si ottiene risolvendo l'equazione

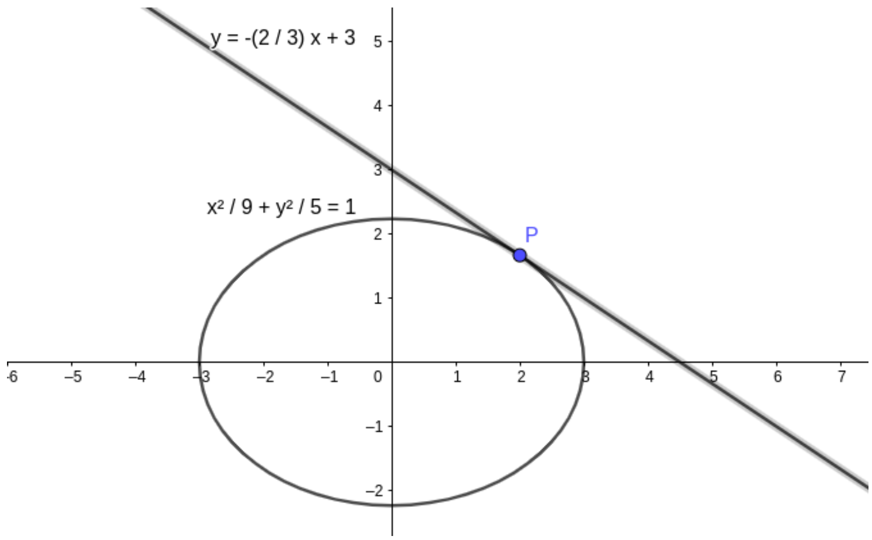
$$\frac{2^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 5 \cdot \left(1 - \frac{4}{9}\right), \quad \Leftrightarrow \quad y = \mp\frac{5}{3}.$$

Quindi il punto dell'ellisse in cui si cerca la retta tangente è $P = \left(2, \frac{5}{3}\right)$. Utilizziamo la formula di sdoppiamento e ricaviamo direttamente l'equazione della retta tangente:

$$\frac{2 \cdot x}{9} + \frac{\frac{5}{3} \cdot y}{5} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{9}\,x + \frac{1}{3}\,y = 1$$

che, scritta in modo esplicito "standard" diventa:

$$y = -\frac{2}{3}\,x + 3.$$



□

3. Proprietà focali

Anche l'ellisse gode di proprietà focali analoghe a quelle viste nel corso dello studio della parabola: se si "spara" un raggio laser da uno dei due fuochi e si suppone l'ellisse formata da specchi perfettamente riflettenti, allora quel raggio viene riflesso nell'altro fuoco. Di nuovo, se si parla da uno dei due fuochi e la voce rimbalza su una superficie a profilo ellittico, una persona posta nell'altra fuoco sente la voce come se le si stesse parlando di fronte [9]. La proprietà dipende dal seguente teorema, analogo a quello dimostrato per la parabola.

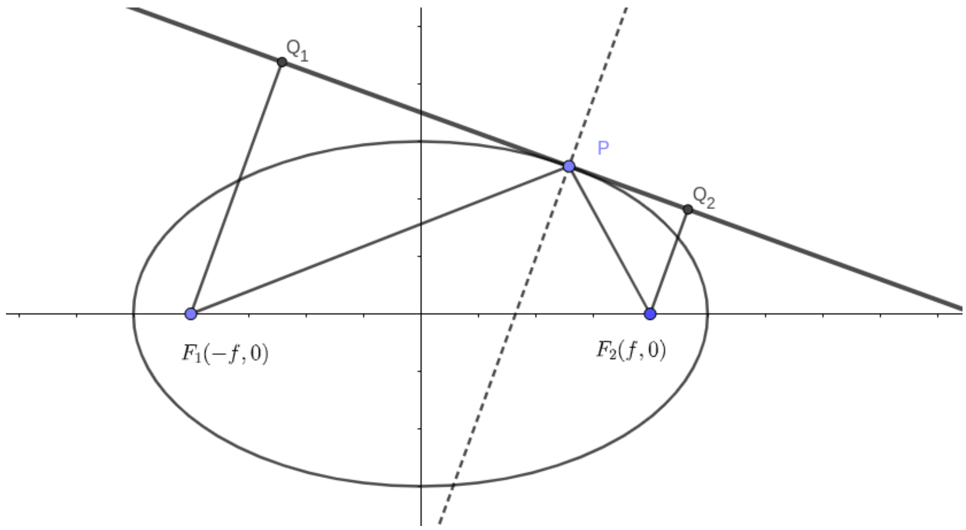
Teorema 2. *La normale in un punto dell'ellisse biseca l'angolo formato dalle semirette che originano nel punto e passano dai fuochi.*

Dimostrazione: Si consideri il punto P dell'ellisse di coordinate (x_P, y_P) e la retta tangente nel punto dato. Inoltre siano dati i due fuochi di coordinate $(\mp f, 0)$. Per dimostrare il teorema, faremo vedere che i due triangoli rettangoli ottenuti proiettando i fuochi sulla retta tangente sono simili [10]: da questo segue che gli angoli omologhi sono congruenti ovvero sono uguali gli angoli formati dalla retta tangente

[9] Questo, ad esempio, si può verificare nell'edificio di p.zza dei Mercanti a Milano, dove le volte sono ellittiche e fatte in modo che se due persone contrattavano un prezzo vicino ad una colonna del porticato, un indiscreto personaggio interessato avrebbe potuto carpire le informazioni mettendosi in un punto opportuno distante da loro, facendo credere di non sentire nulla ma, in effetti, sentendo tutto molto nitidamente.

[10] Dimostriamo che hanno i lati in proporzione

con le due semirette uscenti da P e passanti dai fuochi e, pertanto, sono congruenti anche i loro complementari, che sono quelli di cui parla la tesi del teorema.



Nelle ipotesi di cui prima, se l'equazione dell'ellisse è quella standard, allora la retta tangente in P ha equazione: $\frac{x_P\,x}{a^2}+\frac{y_P\,y}{b^2}=1$ che, riscritta in forma esplicita, diventa

$$r:\ y=-\frac{b^2\,x_P}{a^2\,y_P}\cdot x+\frac{b^2}{y_P}.$$

Detti Q_i le proiezione dei fuochi F_i sulla retta tangente, allora i lati $\overline{F_1Q_1}$ e $\overline{F_2Q_2}$ li determiniamo tramite la formula "distanza punto-retta", mentre le ipotenuse dei due triangoli rettangoli $\overline{F_1PQ_1}$ e $\overline{F_2PQ_2}$ tramite la formula della distanza tra due punti.

$$d(F_1,Q_1)=d(F_1,r)=\frac{\left|-\left(\frac{b^2\,x_P}{a^2\,y_P}\cdot f+\frac{b^2}{y_P}\right)\right|}{\sqrt{\left(\frac{b^2\,x_P}{a^2\,y_P}\right)^2+1}}$$

e

$$d(F_2,Q_2)=d(F_2,r)=\frac{\left|-\left(-\frac{b^2\,x_P}{a^2\,y_P}\cdot f+\frac{b^2}{y_P}\right)\right|}{\sqrt{\left(\frac{b^2\,x_P}{a^2\,y_P}\right)^2+1}},$$

pertanto

$$d(F_2,Q_2):d(F_1,Q_1)=\frac{\left|\frac{b^2\,x_P}{a^2\,y_P}\cdot f-\frac{b^2}{y_P}\right|}{\left|-\frac{b^2\,x_P}{a^2\,y_P}\cdot f-\frac{b^2}{y_P}\right|}=$$

$$= \frac{\cancel{\frac{b^2}{|y_P|}} \cdot \left|\frac{x_P}{a^2} \cdot f - 1\right|}{\cancel{\frac{b^2}{|y_P|}} \cdot \left|\frac{x_P}{a^2} \cdot f + 1\right|} = \frac{|x_P \cdot f - a^2|}{|x_P \cdot f + a^2|}.$$

D'altra parte $d(F_1, P) = \sqrt{(x_P + f)^2 + y_P^2}$ e $d(F_2, P) = \sqrt{(x_P - f)^2 + y_P^2}$, per cui:

$$d(F_2, P) : d(F_1, P) = \frac{\sqrt{(x_P - f)^2 + y_P^2}}{\sqrt{(x_P + f)^2 + y_P^2}} =$$

[11]

$$= \sqrt{\frac{x_P^2 - 2f\, x_P + f^2 + y_P^2}{x_P^2 + 2f\, x_P + f^2 + y_P^2}} = \sqrt{\frac{x_P^2 - 2f\, x_P + f^2 + b^2 \cdot \left(1 - \frac{x_P^2}{a^2}\right)}{x_P^2 + 2f\, x_P + f^2 + b^2 \cdot \left(1 - \frac{x_P^2}{a^2}\right)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2\, x_P^2 - 2a^2\, f\, x_P + a^2\, f^2 + a^2 b^2 - b^2\, x_P^2}{a^2\, x_P^2 + 2a^2\, f\, x_P + a^2\, f^2 + a^2 b^2 - b^2\, x_P^2}} =$$

[12]

$$= \sqrt{\frac{a^2\, x_P^2 - 2a^2\, f\, x_P + a^2\, (a^2 \cancel{- b^2}) + \cancel{a^2 b^2} - b^2\, x_P^2}{a^2\, x_P^2 + 2a^2\, f\, x_P + a^2\, (a^2 \cancel{- b^2}) + \cancel{a^2 b^2} - b^2\, x_P^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)\, x_P^2 - 2a^2\, f\, x_P + a^4}{(a^2 - b^2)\, x_P^2 + 2a^2\, f\, x_P + a^4}} =$$

[13]

$$= \sqrt{\frac{f^2\, x_P^2 - 2a^2\, f\, x_P + a^4}{f^2\, x_P^2 + 2a^2\, f\, x_P + a^4}} = \sqrt{\frac{(f\, x_P - a^2)^2}{(f\, x_P + a^2)^2}} =$$

$$= \frac{|x_P \cdot f - a^2|}{|x_P \cdot f + a^2|} = d(F_2, Q_2) : d(F_1, Q_1).$$

Dato che una coppia cateto/ipotenusa mantiene la proporzione con la coppia cateto/ipotenusa dell'altro triangolo (rettangolo), allora i due triangoli sono simili e da questo segue che gli angoli omologhi sono congruenti: in particolare risulta $F_1\hat{P}Q_1 \cong F_2\hat{P}Q_2$.

c.v.d.

[11] Sfruttando l'equazione dell'ellisse, si può ricavare y_P e sostituire nell'espressione sotto radice

[12] Si ricordi che $f^2 = a^2 - b^2$.

[13] Stessa osservazione della nota precedente...

CAPITOLO 5

L'iperbole

L'iperbole è il luogo geometrico dei punti **la cui differenza delle distanze da due punti prefissati è costante.** Anche in questo caso si ritiene utile iniziare a fare il discorso *considerando i Fuochi,* ovvero i due punti prefissati nel piano, *simmetrici rispetto all'origine del sistema di riferimento e sull'asse delle ascisse.* I calcoli da fare sono molto simili a quelli fatti per l'ellisse, anche perché l'unica cosa che cambia - tra le condizioni che le definiscono- è un segno! Quindi rifacciamo questi calcoli anche per l'iperbole. Posti i fuochi in $F_1 = (-f, 0)$ e $F_2 = (f, 0)$ e detto $P(x, y)$ un punto generico dell'iperbole, la condizione che la determina è

$$d(F_1, P) - d(F_2, P) = k,$$

essendo k il valore costante su cui soffermeremo l'attenzione successivamente. Effettuiamo qualche passaggio non troppo complicato:

$$\sqrt{(-f-x)^2 + (0-y)^2} - \sqrt{(f-x)^2 + (0-y)^2} = k$$

$$\sqrt{(f+x)^2 + y^2} = k + \sqrt{(f-x)^2 + y^2}$$

ed elevando al quadrato:

$$(f+x)^2 + \cancel{y^2} = k^2 + 2\,k\,\sqrt{(f-x)^2 + y^2} + (f-x)^2 + \cancel{y^2}$$

$$(f+x)^2 - (f-x)^2 - k^2 = +2\,k\,\sqrt{(f-x)^2 + y^2}$$

$$4\,f\,x - k^2 = 2k\,\sqrt{(f-x)^2 + y^2}$$

ed elevando nuovamente al quadrato:

$$k^4 - 8\,f\,k^2\,x + 16\,f^2\,x^2 = 4\,k^2\,(f-x)^2 + 4\,k^2\,y^2$$

$$k^4 \cancel{-8\,f\,k^2\,x} + 16\,f^2\,x^2 = 4\,k^2\,f^2 \cancel{-8\,k^2\,f\,x} + 4\,k^2\,x^2 + 4\,k^2\,y^2$$

da cui:

$$k^2\,(k^2 - 4\,f^2) = 4(k^2 - 4\,f^2)\,x^2 + 4\,k^2\,y^2$$

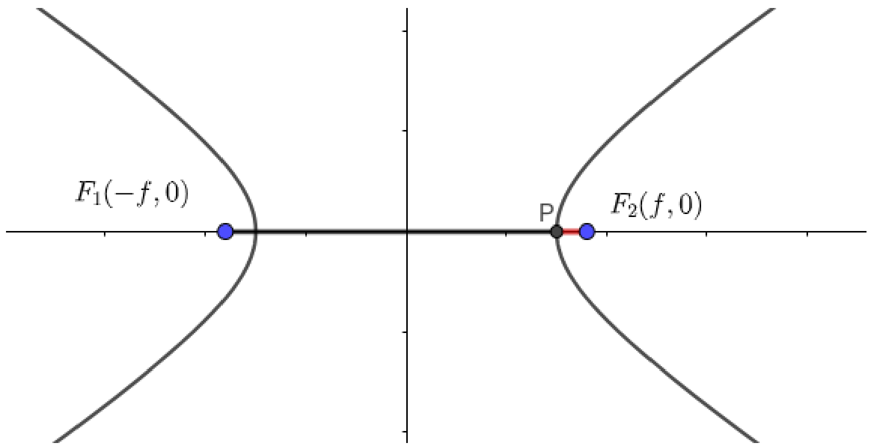
e dividendo per il primo membro, rileggendo da destra a sinistra, si ottiene:

$$\frac{4}{k^2}\,x^2 + \frac{4}{k^2 - 4\,f^2}\,y^2 = 1$$

o meglio ancora:

$$\frac{x^2}{\frac{k^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{k^2-4\,f^2}{4}} = 1.$$

Ora notiamo che la quantità $k^2 - 4\,f^2$ risulta negativa, infatti, osservando il disegno seguente,



è evidente che:

$$\overline{F_1P} - \overline{F_2P} = k \quad \Leftrightarrow \quad (\overline{F_1F_2} - \overline{F_2P}) - \overline{F_2P} = k$$

e quindi:

$$\overline{F_1F_2} - 2\overline{F_2P} = k$$

ed elevando al quadrato:

$$k^2 = \overline{F_1F_2}^2 - 4\overline{F_1F_2} \cdot \overline{F_2P} + 4\overline{F_2P}^2$$

e quindi, dato che $\overline{F_1F_2} = 2f$,

$$k^2 - 4f^2 = \cancel{\overline{F_1F_2}^2} - 4\overline{F_1F_2} \cdot \overline{F_2P} + 4\overline{F_2P}^2 - \cancel{\overline{F_1F_2}^2} = 4\overline{F_2P}(\overline{F_2P} - \overline{F_1F_2}) < 0$$

essendo $\overline{F_2P} < \overline{F_1F_2}$. Allora, detti a e b due parametri per i quali

$$a^2 = \frac{k^2}{4} \quad \text{e} \quad b^2 = -\frac{k^2-4f^2}{4} = \frac{4f^2-k^2}{4},$$

si ottiene, considerando [1] $a \geqslant b$, l'**equazione standard dell'iperbole** [2]**:**

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

Ponendo $y = 0$ nell'equazione standard, si ottiene che i punti d'intersezione tra la curva e l'asse della ascisse sono dati da $(\mp a,\, 0)$: essi sono detti i **vertici** dell'iperbole. D'altra parte, se si pone $x = 0$ l'equazione

[1] Senza ledere alla generalità del discorso.

[2] Centrata nell'origine del sistema di riferimento

risultante risulta senza soluzione, dato che il primo membro sarebbe un numero sicuramente negativo, mentre il secondo un numero positivo. Pertanto, come d'altra parte il disegno di prima lasciava intuire, l'iperbole non può intersecare l'asse delle ordinate. In verità c'è tutta una zona del piano a cui è preclusa l'iperbole: nei fatti, se consideriamo il fascio di rette centrato nell'origine $y = m\,x$ e cerchiamo l'intersezione si queste rette con l'iperbole, otteniamo l'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{m^2\,x^2}{b^2} = 1$$

da cui:

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) x^2 = 1$$

e quindi:

$$x^2 = \frac{a^2\,b^2}{b^2 - a^2\,m^2}.$$

Ora, affinché questa soluzione sia un numero reale, deve essere il denominatore maggiore di zero [3] ergo:

$$b^2 - a^2\,m^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b^2}{a^2} > m^2.$$

Questa disequazione è presto risolta per tutte le x indicate nell'intervallo seguente:

$$-\frac{b}{a} < x < \frac{b}{a}.$$

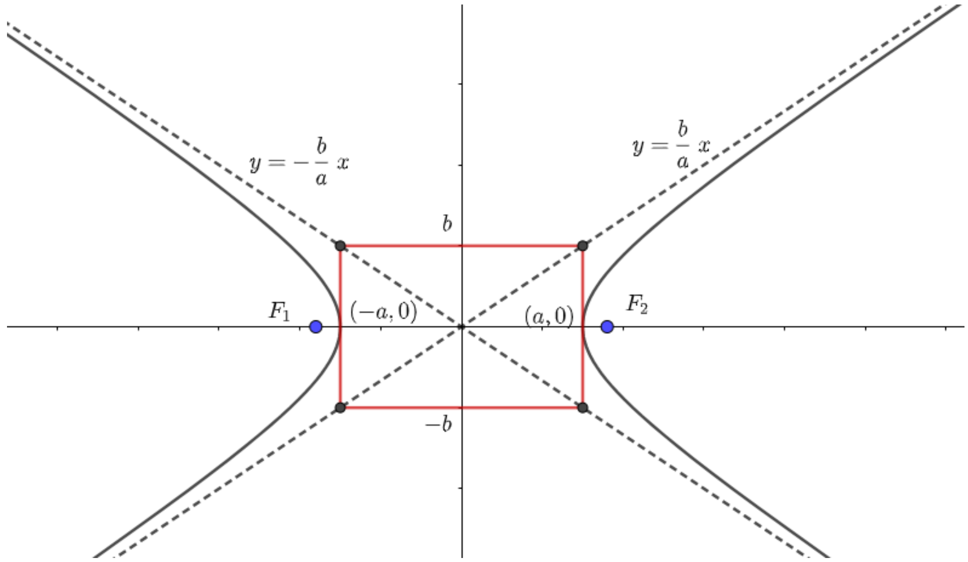
Le rette:

$$\boxed{y = \mp\frac{b}{a}\,x}$$

non intersecano ancora l'iperbole, ma definiscono due rette che si chiamano **assi asintotici** o semplicemente **asintoti** dell'iperbole. I "rami" della curva tenderanno ad avvicinarsi agli assi asintotici, mano a mano che le ascisse diventano vieppù grandi [4] e tutta l'iperbole è compresa tra la "croce" formata dagli assi asintotici. Per di più se consideriamo il rettangolo -come fatto per l'ellisse- con i lati paralleli agli assi coordinati e che passano per i quattro punti $(\mp a, 0)$ e $(0, \mp b)$, le diagonali stanno proprio sugli assi asintotici trovati testé e quindi possiamo tracciare l'iperbole semplicemente disegnandola compresa tra i prolungamento delle diagonali e passanti per i vertici $(\mp a, 0)$.

[3] Dato che il numeratore è sempre positivo, così come x^2.

[4] In negativo o in positivo.



Dalle relazioni $a^2 = \frac{k^2}{4}$ e $-b^2 = \frac{k^2-4f^2}{4}$ si ricava:

$$k = 2a \quad \text{e} \quad f = \mp\sqrt{a^2 + b^2},$$

che ci permette di determinare le coordinate dei fuochi a partire dalla conoscenza dei parametri numeri dell'equazione standard.

1. Mutua posizione tra parabole e rette

Tutto quello che è stato detto per la parabola e per l'ellisse, andrebbe ora riscritto qui: evitiamo. Ricordiamo solo, a grandi linee, che l'intersezione tra una retta ed una conica -espressa da una equazione di secondo grado- richiede sempre di risolvere un'equazione di secondo grado in una incognita. Dato che le soluzioni di queste ultime sono decise dal *discriminante* associato al polinomio dell'equazione, allora le posizione delle rette, rispetto all'ipebole, in questo caso, sono determinate dal segno del Δ. Sicuramente se $\Delta = 0$ la retta e l'iperbole risulteranno tangenti in un punto. Se invece dobbiamo determinare la pendenza della retta tangente in un punto della parbola, possiamo "imporre" la condizione di tangenza che è [5] $\Delta = 0$ e risolvere rispetto al coefficiente m, selezionando in tal modo, tra tutte le rette del fascio centrato nel punto di tangenza, proprio quella giusta. Ora, anche per l'iperbole, così come fatto per le altre due coniche studiate, sussiste la **formula di sdoppiamento:** non essendoci nulla di nuovo rispetto a quanto fatto per le ellissi, riportiamo la formula e scriviamo la trasformazione senza rifare tutti i passaggi di calcolo che, comunque, il

[5]Per tutte le coniche è!

lettore interessato può fare per proprio conto, sulla falsariga di quelli fatti nel capitolo precedente per l'ellisse. Sia P un punto dell'ellisse di coordinate (x_P, y_P) allora la retta tangente in P si determina come:

$$\boxed{\frac{x_P \cdot x}{a^2} - \frac{y_P \cdot y}{b^2} = 1}$$

che si può ottenere pensando di operare le seguenti sostituzioni [6]:

$$\begin{cases} x^2 & \mapsto x_P \cdot x \\ y^2 & \mapsto y_P \cdot y \end{cases}$$

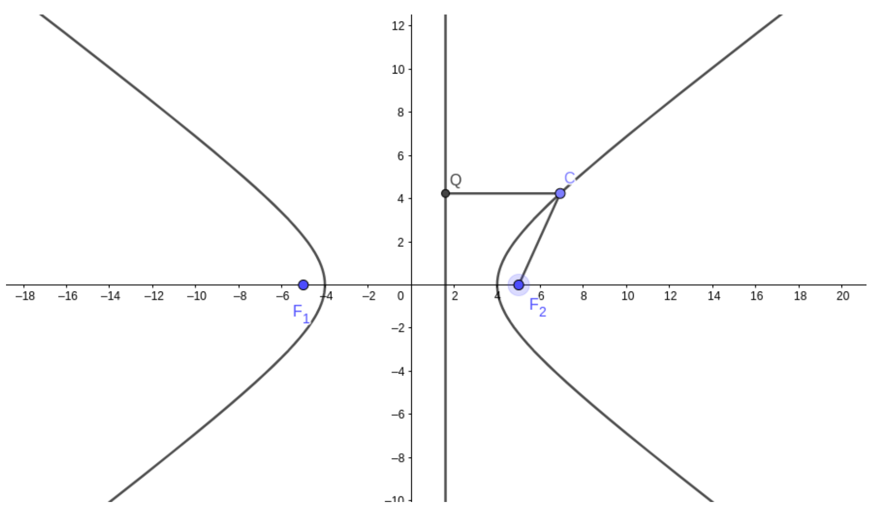
nell'equazione standard dell'iperbole.

2. L'eccentricità per l'iperbole

Come fatto per l'ellisse, anche per l'iperbole si trova che l'eccentricità si misura tramite il rapporto della distanza tra i fuochi e la distanza tra i vertici. Con le notazioni utilizzate finora, possiamo anche utilizzare le semi-distanze, ottenendo:

$$e = \frac{f}{a}.$$

Nel caso dell'iperbole, evidentemente, essendo $f > a$, l'eccentricità è maggiore dell'unità. Vediamo, con un calcolo analogo a quello fatto per l'ellisse, perché l'eccentricità maggiore di uno definisce un'iperbole.



[6]Qui è evidente che sono proprio le stesse che utilizziamo nel caso dell'ellisse.

Sia $r\,:\,x=\frac{a^2}{f}$ la retta direttrice e l'eccentricità data da $e=\frac{f}{a}$. Ora consideriamo il luogo dei punti per i quali $f(C,F)=e\cdot d(C,r)$. [7] Eleviamo al quadrato e troviamo:

$$(x-f)^2+y^2=e^2\cdot\left(x-\frac{a^2}{f}\right)^2$$

per cui

$$(1-e^2)\,x^2-\left(2\,f-\frac{2\,e^2\,a^2}{f}\right)\,x+y^2=e^2\,\frac{a^4}{f^2}-f^2.$$

Sostituendo il valore di e si ottiene ancora:

$$\left(1-\frac{f^2}{a^2}\right)\,x^2-\cancel{\left(2\,f-\frac{2\,f^2\,\cancel{a^2}}{\cancel{a^2}\,f}\right)\,x}+y^2=\frac{\cancel{f^2}}{a^2}\,\frac{a^4}{\cancel{f^2}}-f^2.$$

$$\frac{a^2-f^2}{a^2}\,x^2+y^2=a^2-f^2$$

e dividendo tutto per a^2-f^2

$$\frac{x^{\,2}}{a^{\,2}}+\frac{y^2}{a^2-f^2}=1$$

ma $f>a$ per cui, chiamando $a^2-f^2=-b^2$ si ottiene l'equazione standard:

$$\frac{x^{\,2}}{a^{\,2}}-\frac{y^{\,2}}{b^{\,2}}=1.$$

3. L'iperbole riferita ai propri asintoti

In verità, l'iperbole è collegata direttamente ad un discorso elementare, ma importantissimo, che è la **legge di proporzionalità inversa:** più una variabile x cresce, più quella ad essa "collegata" decresce e viceversa. In formule $y\propto\frac{1}{x}$ ovvero $y=\frac{k}{x}$ o, ancora $x\cdot y=k$. Come si arriva dall'equazione dell'iperbole alla legge di proporzionalità inversa o viceversa? Sembrano, in effetti, equazioni abbastanza diverse l'una dall'altra. In verità basta "operare una rotazione" della curva, oppure del sistema di riferimento, per vedere che le due figure si possono far coincidere: però questo richiederebbe preliminarmente lo studio delle matrici di rotazione, che sarà argomento di un prossimo capitolo di questo libro. Per ora ci limitiamo a fare delle osservazioni con quanto

[7] Consideriamo, per semplicità, la situazione data in figura, ma il discorso può essere fatto per ogni altra situazione.

già spiegato e dimostriamo con mezzi più elementari. Consideriamo l'equazione standard dell'iperbole

$$\frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$$

e scomponiamo il primo membro tramite il prodotto notevole "somma per differenza":

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\cdot\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=1.$$

Moltiplicando tutto per $a\,b$ si ottiene:

$$(b\,x+a\,y)\cdot(b\,x-a\,y)=ab.$$

Chiamiamo ora $X=b\,x+a\,y$ e $Y=b\,x-a\,y$. queste trasformazioni sono evidentemente invertibili, infatti sommando le due, membro a membro, si ottiene $X+Y=2b\,x$ e sottraendo $X-Y=2a\,y$. Quindi possimo scrivere le seguenti trasformazioni

$$\begin{cases} x \mapsto & \frac{x+y}{2b} \\ y \mapsto & \frac{x-y}{2a} \end{cases}$$

che, se applicate all'equazione standard, riscrivono l'equazione in

$$x\cdot y=k, \quad \text{essendo} \quad k=a^2\,b^2.$$

Ricordiamo ora che per l'equazione standard, le equazioni degli asintoti sono $y=\mp\frac{b}{a}\,x$. Applicando le trasformazioni a questi asintoti, rideterminiamo la posizione degli asintoti dopo la trasformazione che ha portato a riscrivere l'equazione dell'iperbole nella nuova forma.

$$\frac{x-y}{2a}=\mp\frac{\cancel{b}}{a}\cdot\frac{x+y}{2\cancel{b}} \quad \Leftrightarrow \quad x\,\pm\,x=y\,\mp\,y$$

che può si riscrivere tramite queste due equazioni:

$$2\,x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x\;=\;0$$

e

$$0=2\,y \quad \Leftrightarrow \quad y\;=\;0$$

ovvero **gli asintoti sono gli assi del riferimento cartesiano.**

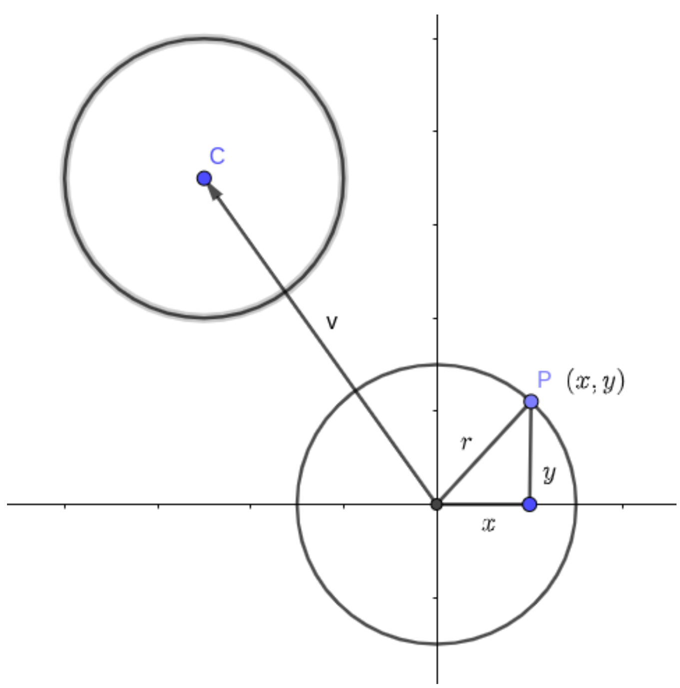
Ricapitolando, tramite le trasformazioni trovate prime stiamo riposizionando gli asintoti dell'iperbole lungo gli assi cartesiano e, pertanto, l'iperbole, che prima intersecava l'asse delle ascisse, viene conseguentemente ruotata e riposizionata in modo che i suoi rami diventino asintotici agli assi cartesiani. Per finire, ricordiamo che l'iperbole definita dall'equazione cartesiana $x\,y=k$ con $k\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ è conosciuta come *iperbole equilatera.*

CAPITOLO 6

La circonferenza

Dulcis in fundo parliamo della circonferenza: essa è definita come il luogo geometrico dei **punti equidistanti da un punto fisso** detto centro. La distanza dei punti dal centro viene detta *raggio*. Le proprietà della circonferenza sono tante e le abbiamo già studiate nel biennio [1] ed in questo capitolo ne sfrutteremo alcune per agevolare alcuni ragionamenti. Per ora determiniamone l'equazione analitica. Supponiamo, da principio, che la circonferenza sia con centro nell'origine del sistema di coordinate e di raggio pari ad r. Allora, detto P un punto di coordinate (x, y) generico appartenente a detta circonferenza, per il teorema di Pitagora deve essere:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}.$$



[1]Si spera.

Operiamo ora una traslazione della circonferenza tramite il vettore $\vec{t} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ che sposta, in particolare, il centro $O(0,0)$ nel punto C di coordinate (x_C, y_C) ed otteniamo l'equazione generica di una circonferenza di centro (x_C, y_C) e raggio r :

$$\boxed{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2}.$$

Sviluppando i quadrati di binomio e riordinando secondo potenze decrescenti, si ottiene l'**equazione analitica standard** della circonferenza:

$$x^2 + y^2 - 2x_C\, x - 2y_C\, y + x_C^2 + y_C^2 - r^2 = 0$$

ponendo:

$$\begin{cases} a &= -2x_C \\ b &= -2y_C \\ c &= x_C^2 + y_C^2 - r^2 \end{cases}$$

l'equazione prende la forma:

$$\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}.$$

Esempio: Determinare l'equazione della circonferenza centrata in $C(-3, 2)$ e di raggio 4.

Risposta: Si può procedere indifferentemente in due modi: il primo richiede di svolgere successivamente dei calcoli, il secondo fornisce direttamente l'equazione cercata. Nel primo modo scriviamo:

$$(x - (-3))^2 + (y - 2)^2 = 4^2$$

da cui:

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 + 4 - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 6x - 4y - 4 = 0.$$

Nel secondo modo invece, sapendo che a e b, nell'equazione standard, sono rispettivamente **il doppio cambiato di segno** delle coordinate del centro e che c è **la somma dei quadrati delle coordinate del centro diminuita del quadrato del raggio,** scriviamo subito:

$$a = 6, \quad b = -4 \quad \text{e} \quad c = 9 + 4 - 16 = -4$$

e quindi l'equazione cercata, come trovata prima, è:

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 4 = 0.$$

□

Osservazione: La circonferenza può anche essere vista come una ellisse particolare, per la quale i due fuochi coincidono in un unico punto, che è il centro della circonferenza stessa. Infatti, se si considera la somma delle distanze di un punto qualsiasi dell'ellisse con i due fuochi sovrapposti, per sua definizione, essa è costante: tale costante la indichiamo con $2r$ e, evidentemente, ogni punto dista da uno dei due fuochi, che però sono sempre sovrapposti, la metà, cioè r. Se consideriamo l'equazione standard dell'ellisse e poniamo che i due fuochi coincidono nel punto $(0,0)$, essendo $a = r$ allora essa prende la forma

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

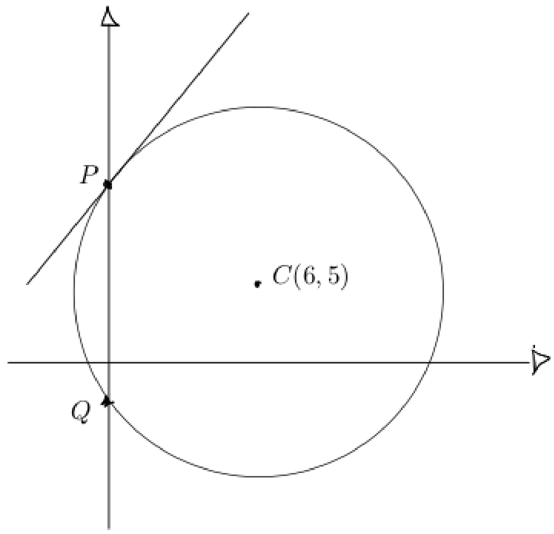
che equivale proprio alla prima forma dell'equazione trovata, in questo capitolo, per la circonferenza.

1. Questioni di tangenza

L'equazione della retta, tangente ad una circonferenza, può essere trovata in almeno tre modi differenti! Il primo è quello solito, ovvero si mette a sistema l'equazione del fascio di rette tra le quali dobbiamo individuare la tangente con l'equazione della circonferenza. Da questo sistema si deduce una equazione di secondo grado per la quale imponiamo la condizione di tangenza $\Delta = 0$ ecc... ecc... Ma la circonferenza, come dicevamo all'inizio di questo capitolo, gode di tante belle proprietà! una di queste è che *le rette tangenti sono perpendicolari ai raggi nel punto di tangenza.* Questa proprietà può essere sfruttata, ad esempio, per determinare la tangente qualora il punto di tangenza sia noto. Ma c'è anche di più: la retta tangente *dista dal centro della circonferenza quanto il raggio.* Anche questa proprietà può essere sfruttata, imponendo che la distanza punto-retta, nello specifico "retta del fascio - centro della circonferenza", sia uguale al raggio. Ancora, se il punto di tangenza è noto, si può sempre sfruttare la *formula di sdoppiamento.* Insomma, c'è solo l'imbarazzo della scelta! Procediamo con un esempio in cui utilizziamo i vari metodi presentati or ora.

PROBLEMA 15. *La circonferenza di centro $C(6,5)$ interseca l'asse delle ordinate in due punti la cui distanza è 16 unità. Dopo aver determinato l'equazione analitica della circonferenza, scrivi l'equazione della retta tangente nel suo punto di intersezione con l'asse delle ordinate più alto.*

Soluzione: Consideriamo il disegno approssimativo seguente, per fissare le idee su come meglio approcciare la soluzione.



Possiamo trovare il raggio, utilizzando la proprietà che l'asse del segmento passa dal centro della circonferenza e, pertanto, possiamo utilizzare il Teorema di Pitagora: se M_{PQ} rappresenta il punto medio di $\overline{PQ}$, allora:

$$d^2(C, M_{PQ}) + d^2(P, M_{PQ}) = d^2(P, C).$$

Dato che i punti P e Q sono allineati verticalmente, allora $d(P, M_{PQ}) = \frac{1}{2}\, d(P, Q) = 8$. D'altra parte $d(C, M_{PQ})$ è la distanza di C dall'asse delle ordinate, quindi ne è la sua ascissa: $d(C, M_{PQ}) = 6$. Chiaramente $d(P, C) = r$ è il raggio da trovare. Si ha, quindi,

$$64 + 36 = r^2 \quad \Leftarrow \quad 100 = r^2 \quad \Leftarrow \quad r = 10.$$

Conoscendo il raggio e le coordinate del centro, l'equazione della circonferenza si scrive immediatamente:

$$x^2 + y^2 - 12x - 10y - 39 = 0.$$

Rispondiamo ora alla seconda richiesta del problema, ovvero di scrivere l'equazione della retta tangente nel punto P. Per fare ciò si può procedere in diversi modi, che illustriamo qui di seguito. Dapprima però ricaviamo le coordinate di P. Ponendo $x = 0$ nell'equazione della circonferenza si ottiene la seguente equazione di secondo grado in y :

$$y^2 - 10y - 39 = 0.$$

Dato che $13 \cdot 3 = 39$ e $13 - 3 = 10$ allora le due soluzioni [2] sono 13 e 3. Il punto cercato è quello "più alto", quindi $P = (0, 13)$.

- $\boxed{Primo\,Modo:}$ Si considera il fascio di rette centrato in P e si interseca con la circonferenza, imponendo la condizione di tangenza $\Delta = 0$ per determinare la pendenza della giusta retta [3]. Il fascio di rette ha equazione

$$y = m\,x + 13.$$

Il sistema tra retta e circonferenza richiede la soluzione dell'equazione

$$x^2 + [m\,x + 13]^2 - 12x - 10\,[m\,x + 13] - 39 = 0.$$

Questa la riscriviamo sotto forma di equazione canonica di secondo grado, dopo qualche passaggio algebrico che non dovrebbe richiedere ulteriori chiarimenti.

$$(1 + m^2)\,x^2 + (26m - 12 - 10m)\,x + 169 - 130 - 39 = 0$$

ovvero

$$(1 + m^2)\,x^2 + (16m - 12)\,x = 0.$$

Imponendo la condizione di tangenza otteniamo:

$$\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (16m - 12)^2 - 0 = 0$$

ovvero $m = \frac{3}{4}$.
A questo punto l'equazione della retta tangente è

$$y = \frac{3}{4}\,x + 13.$$

- $\boxed{Secondo\,Modo:}$ La pendenza della retta passante da C e P è: $m_{PQ} = \frac{13-5}{0-6} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$. La retta perpendicolare ha pendenza antireciproca, per cui $m_\perp = \frac{3}{4}$ e questa è anche la pendenza della retta tangente [4]. Ergo la retta tangente ha equazione

$$y = \frac{3}{4}\,x + 13.$$

[2] C'è da notare che **il disegno**, fatto precedentemente per iniziare un ragionamento, **non è corretto**, infatti noi avevamo posto Q sotto l'asse delle ascisse, invece sta 3 unità sopra! ma, d'altra parte, il disegno sera solo una bozza per iniziare a ragionare: non aveva pretesa di correttezza assoluta. Ora, volendo, si può correggere la figura.

[3] Una persona sana di mente non utilizzerà mai un metodo del genere per la circonferenza! vedremo che è molto più "faticoso" di tutti gli altri.

[4] Evidentemente questo è un metodo molto veloce e "facile" da applicare.

- $\boxed{Terzo\, Modo:}$ Consideriamo la distanza punto-retta, tra la retta generica del fascio centrato in P ed il centro della circonferenza: essa deve essere uguale al raggio!
$$d(C,r) = \frac{|5-(m\cdot 6+13)|}{\sqrt{m^2+1}} = 10$$
ovvero:
$$|6\,m+8| = 10\sqrt{m^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad (6\,m+8)^2 = 100(m^2+1)$$
e quindi:
$$\cancel{4}\,(3m+4)^2 = \cancel{100}^{25}\,(m^2+1) \quad \Leftrightarrow \quad 9m^2+24m+16 = 25m^2+25$$
ed infine:
$$16m^2-24m+9=0 \quad \Leftrightarrow \quad (4m-3)^2=0$$
da cui [5] $m=\frac{3}{4}$ ergo l'equazione cercata è:
$$y = \frac{3}{4}x+13.$$
- $\boxed{Quarto\, Modo:}$ **tramite la formula di sdoppiamento.** Nei capitoli precedenti abbiamo trovato la formula di sdoppiamento, che può essere scritta semplicemente operando delle sostituzioni nell'equazione della conica, per la quale si cerca la retta tangente, in un punto dato: non andiamo ora a rifare tutti i calcoli per vedere che effettivamente questa formula funziona anche per la circonferenza, anche perché, considerando tale figura come una ellisse "degenere", dovrebbe bastare quello che abbiamo già detto quando si è parlato di ellisse. Ricordiamo piuttosto le sostituzioni:
$$\begin{cases} x^2 & \mapsto x_p\cdot x \\ y^2 & \mapsto y_p\cdot y \\ x & \mapsto \frac{x_p+x}{2} \\ y & \mapsto \frac{y_p+y}{2} \end{cases}$$
Nel nostro caso si ha:
$$0\cdot x+13\cdot y-12\,\frac{0+x}{2}-10\,\frac{13+y}{2}-39=0$$
da cui
$$13y-6x-65-5y-39=0$$

[5] Dato che la tangente in un punto della circonferenza è unico, ci aspettavamo che l'equazione risolvente per m avrebbe dovuto dare un'unica soluzione e, essendo un'equazione di secondo grado, questo significa che deve potersi riscrivere come un quadrato di binomio linerare uguagliato a zero!

$$8y - 6x - 104 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{4} + 13$$

2. Considerazioni sull'equazione della circonferenza

Se abbiamo centro e raggio, abbiamo visto come ricavare l'equazione della circonferenza -in fondo- applicando il teorema di Pitagora. Dopo qualche calcolo si è giunti all'equazione standard

$$x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0.$$

Ma se abbiamo una equazione di questa forma, siamo sempre sicuri che essa rappresenti una circonferenza? in fondo, tutte le rette hanno una equazione lineare in x e y ed ogni equazione di quel tipo rappresenta una retta. La stessa cosa vale per la parabola: ogni volta che le ordinate di una curva sono date da un polinomio di secondo grado nelle ascisse, allora quell'equazione rappresenta una parabola e viceversa, tutte le parabole hanno una rappresentazione di quel tipo [6]. Nel caso della circonferenza c'è un problema: essa può essere disegnata solo se si determina il centro ed il raggio. Sul centro non ci sono problemi: se $a = 2\,x_C$ allora $x_C = \frac{1}{2}\,a$. Stesso dicasi per la seconda coordinata: insomma "un possibile centro lo si determina sempre", è: $C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$. La difficoltà arriva sul raggio, infatti dalla relazione:

$$\boxed{c = x_C^2 + y_C^2 - r^2}$$

si ricava:

$$r^2 = [x_C^2 + y_C^2] - c$$

e questa relazione può fonire un valore reale per il raggio solo se:

$$\boxed{c < x_C^2 + y_C^2}.$$

Se questa disuguaglianza non è verificata, allora **l'equazione non rappresenta una circonferenza.** Più precisamente, se:

$$\boxed{c = x_C^2 + y_C^2}$$

il raggio dovrebbe risultare nulla, il ché significa che la circonferenza degenera in un unico punto che è il suo centro! in questo caso, quindi, tutta quell'equazione rappresenta un "misero" punto. Addirittura, se:

$$\boxed{c > x_C^2 + y_C^2}$$

il raggio non è reale [7] e quindi quell'equazione rappresenta l'*insieme vuoto.*

[6] Idem per ellissi ed iperboli.

[7] Si dice che è un numero immaginario.

Esempio: L'equazione $x^2+y^2-2x+4y+5=0$ è una circonferenza?

Risposta: Un punto che possa rappresentare il centro di una circonferenza si trova sempre, nel caso specifico, esso è $C=(1,-2)$. Ora $x_C^2+y_C^2=1+4=5$ che è proprio uguale a $c=5$. Quindi questa equazione non rappresenta una circonferenza, ma solo il punto C.

□

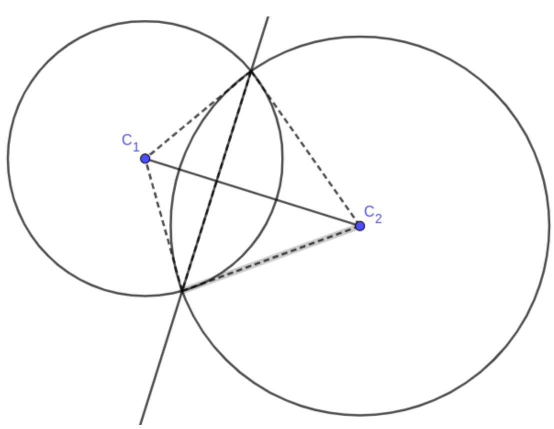
Altro Esempio: L'equazione $x^2+y^2+10x-y+30=0$ rappresenta una circonferenza?

Risposta: Troviamo $C=\left(-5,\frac{1}{2}\right)$. Calcoliamo $x_C^2+y_C^2=25+\frac{1}{4}$ che, evidentemente, è minore di $c=30$. Quindi quell'equazione rappresenta l'insieme vuoto e non certo una circonferenza!

□

3. Intersezione tra due circonferenze

L'idea generale, quando si cercano i punti di intersezione tra figure geometriche rappresentate da equazioni analitiche, è di mettere a sistema tali equazioni e risolvere -con qualche metodo- l'equazioni in una sola incognita che ne risulta. Avviene normalmente che intersecando rette con parabole, ellissi, iperboli, circonferenze, l'equazione che risulta dal sistema sia un'equazione di secondo grado che, a seconda del segno del discriminante associato, può avere due, una o nessuna soluzione: rispettivamente per i casi in cui le curve si "tagliano" in due punti, sono tangenti oppure non hanno punti in comune. Però, quando si mettono a sistema due circonferenze e si opera una sottrazione "membro a membro" delle due equazioni, la *parte quadratica* sparisce completamente e non risulta alcuna equazione di secondo grado, ma una sola di primo grado e, pertanto, l'equazione di una retta. Tale retta si chiama **asse radicale** ed è molto interessante da conoscere, dato che ha delle proprietà particolari.



Per fissare le idee siano date due circonferenze e cerchiamone i punti d'intersezione:

$$\begin{cases} \gamma_1 : \quad x^2 + y^2 + a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0 \\ \gamma_2 : \quad x^2 + y^2 + a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro si ottiene:

$$r : \,(a_1 - a_2)\,x + (b_1 - b_2)\,y + c_1 - c_2 = 0.$$

Questa è la famosa equazione dell'*asse radicale;* osserviamo che è una retta sempre *perpendicolare* [8] alla congiungente i centri delle circonferenze. Inoltre, se le circonferenze hanno effettivamente punti d'intersezione, allora questi si devono trovare mettendo a sistema l'equazione di una delle circonferenze con tale retta. Ma, considerazione altrettanto immediata, se le due circonferenze sono tangenti in un punto, l'asse radicale rappresenta proprio la retta tangente comune ad entrambe. In quest'ultimo caso, tra l'altro, la distanza tra i centri dell'asse radicale e le circonferenze sono uguali ai rispettivi raggi! anzi, di più: è proprio la distanza dell'asse radicale dal centro di una delle due circonferenze che decide se esse sono disgiunte, tangenti o s'incontrano in due punti. Nei fatti, se la distanza dell'asse radicale dal centro di una circonferenza è maggiore del raggio della circonferenza stessa, allora la stessa cosa si può dire rispetto all'altra circonferenza e, conseguentemente, le due circonferenze non hanno punti in comune! Nel caso delle circonferenze tangenti abbiamo già osservato che le distanze dai centri dell'asse radicale è proprio uguale ai raggi. In ultimo, se l'asse radicale dista dal centro di una circonferenza meno del raggio della circonferenza stessa, allora la stessa cosa succede "dall'altra parte" per l'altra circonferenza e quindi, esse, risultano secanti in due punti.

4. Osservazioni sulla determinazione della circonferenza

Nell'equazione analitica della circonferenza compaiono tre parametri: a, b e c. Per determinarli servono tre condizioni [9] Noi sappiamo che per tre punti non allineati passa una sola circonferenza e quindi impostare le condizioni di passaggio permette di determinare i tre parametri. In verità, però, possiamo anche utilizzare i tre punti per determinare l'intersezione degli assi di due segmenti che hanno come estremi una coppia di tali punti, determinando così il circocentro e, successivamente, ricavare il raggio come la distanza, del centro trovato,

[8] Come già dimostrato nel corso del primo biennio di studio.

[9] Ormai questo deve essere assodato! tre condizioni significa poter impostare tre equazioni.

da uno dei tre punti dati. Si può anche dare la condizione di passaggio per un punto, dicendo che in uno di essi la circonferenza è tangente ad una data retta: anche in questo caso si darebbero tre condizioni! Oppure dando la lunghezza di una corda e la sua distanza da centro... insomma: l'importante è poter scrivere tre equazioni dove compaiono i tre parametri [10] e risolvere il sistema così determinato. Seguono vari esempi problemi.

PROBLEMA 16. *Determinare la circonferenza passante per i punti* $A(-1,0)$, $B(3,2)$ *e* $C(2,-1)$. *Poi trovare le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza, condotte dal punto* $P(6,1)$ *e scrivere le coordinate dei punti di tangenza.*

Soluzione: Per determinare l'equazione della retta possiamo procedere in due modi differenti: si scelga quello che sembra più "simpatico".

- $\boxed{Primo\,Modo:}$ L'equazione standard è

$$x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0.$$

Possiamo imporre le condizioni di passaggio per i tre punti, ottenendo il seguente sistema (lineare):

$$\begin{cases} \text{Passaggio per A:} & 1 + 0 - a + 0 + c = 0 \\ \text{Passaggio per B:} & 9 + 4 + 3a + 2b + c = 0 \\ \text{Passaggio per C:} & 4 + 1 + 2a - b + c = 0 \end{cases}$$

Che si riscrive ordinatamente come:

$$\begin{cases} a \qquad - c & = 1 \\ 3a + 2b + c & = -13 \\ 2a - b + c & = -5 \end{cases}.$$

Eliminiamo c dalla seconda e terza equazione, semplicemente sommando la prima equazione, "membro a membro", a ciascuna di esse singolarmente:

$$\begin{cases} 4a + 2b & = -12 \\ 3a - b & = -4 \end{cases}$$

Ora, raddoppiando la seconda e sommandola alla prima si ottiene l'equazione nella sola a :

$$10a = -20 \quad \Rightarrow \quad a = -2.$$

[10] Non necessariamente tutt'e tre in ciascuna equazione!

Dall'equazione $a-c=1$ ricaviamo $c=-3$ e da $3a-b=-4$ troviamo $b=-2$. Siamo così arrivati a scrivere l'equazione della circonferenza:

$$x^2+y^2-2x-2y-3=0$$

inoltre, il centro è nel punto $C_0(1,1)$ ed il raggio vale $r=\sqrt{1^2+1^2-(-3)}=\sqrt{5}$.

- $\boxed{Secondo\,Modo:}$ L'asse del segmento $\overline{AB}$, determinato come luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi del segmento, ha equazione [11] :

  $$(x+1)^2+y^2=(x-3)^2+(y-2)^2$$

  [12] ovvero:

  $$2x+1=-6x+9-4y+4$$

  che, mettendo in ordine i termini, fornisce l'equazione:

  $$y=-2\,x+3.$$

  Per l'equazione dell'asse di $\overline{AC}$ operiamo nello stesso identico modo:

  $$(x+1)^2+y^2=(x-2)^2+(y+1)^2$$

  da cui:

  $$2x+\cancel{1}=-4x+4+2y+\cancel{1}$$

  ergo:

  $$y=3x-2.$$

  Il punto d'intersezione di queste due rette è il circoncentro [13]: uguagliamo i secondi membri delle equazioni degli assi si ottiene:

  $$-2x+3=3x-2$$

  $$5=5\,x \quad\Rightarrow\quad x=1.$$

  D'altra parte, sostituendo questo valore in una delle due equazioni, si ottiene l'ordinata del centro:

  $$y=3\cdot 1-2=1.$$

[11] Imponiamo che un punto P qualsiasi di coordinate (x,y) equidisti dagli estremi del segmento: insomma poniamo $d^2(P,A)=d^2(P,B)$.

[12] Giusto un'osservazione: l'asse del segmento è proprio l'asse radicale di due circonferenze, centrate negli estremi del segmento ed aventi raggio uguale!

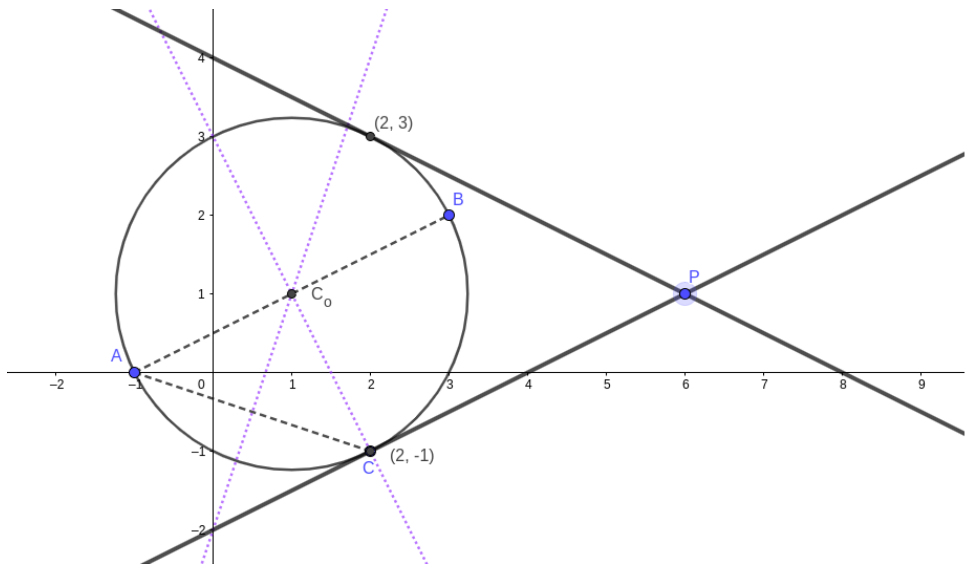
[13] Che ricordiamo essere in centro della circonferenza passante dai tre vertici del triangolo.

Quindi la circonferenza ha centro $C_0(1,1)$ ed il raggio lo si può trovare, ad esempio, tramite la distanza tra C_0 e A :

$$r = d(A, C_0) = \sqrt{(1+1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}.$$

Pertanto, come già trovato, l'equazione della circonferenza è:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0.$$



Per determinare le rette tangenti condotte da P, dapprima scriviamo l'equazione del fascio centrato in P.

$$f:\ y = m\,(x-6) + 1.$$

Ora si può procedere in due diversi modi: il primo, che indichiamo solo per completezza, è intersecare la retta generica del fascio con la circonferenza ed imporre la condizione di tangenza sull'equazione di secondo grado che risolve il sistema [14]. Illustriamo invece l'altro modo, che prende spunto dal fatto che la distanza delle rette tangenti dal centro della circonferenza è proprio il raggio.

$$d(C_0, f) = r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|y_{C_0} - (m_f \cdot x_{C_0} + q_f)|}{\sqrt{m_f^2 + 1}} = r.$$

Quindi, sostituendo i valori noti, eliminando la frazione ed elevando al quadrato:

$$[1 - (m \cdot 1 - 6\,m + 1)]^2 = (\sqrt{5})^2 \cdot (m^2 + 1)$$
$$(-5\,m)^2 = 5(m^2 + 1) \quad \Leftrightarrow \quad 20\,m^2 = 5$$

[14] Abbiamo già fatto notare che questo è il modo più noioso e, soprattutto, "faticoso" a livello di calcoli.

e quindi:

$$m = \mp\frac{1}{2}.$$

Le rette tangenti sono quindi:

$$y = -\frac{1}{2}\,x + 4 \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{2}\,x - 2.$$

Anche per determinare i punti di tangenza, si possono utilizzare varie strategie. Ad esempio, sapendo che il raggio è perpendicolare alla retta tangente nel punto di tangenza, si può trovare la retta su cui giace questo raggio e poi intersecarla con la retta tangente. Procedendo in tal guisa, sia ha: $m_\perp = \pm 2$ a seconda che consideriamo la prima o la seconda retta tangente trovata. Allora le rette passanti dal centro della circonferenza e perpendicolari a quelle tangenti hanno equazioni, rispettivamente:

$$y = 2(x-1) + 1 \quad \text{e} \quad y = -2(x-1) + 1.$$

Quindi:

$$y = 2x - 1 \quad \text{e} \quad y = -2x + 3.$$

Intersecando le rette corrispondenti, ovvero uguagliando i secondi membri delle rette che si incontrano nel punto di tangenza, si ottiene:

$$-\frac{1}{2}\,x + 4 = 2x - 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\,x - 2 = -2x + 3$$

ovvero:

$$\left(2 + \frac{1}{2}\right)\,x = 5 \quad \text{e} \quad \left(2 + \frac{1}{2}\right)\,x = 5$$

[15] da cui, per entrambi i punti, risulta l'ascissa uguale a $x = 2$. Sostituendo questo valore in una delle equazioni delle rette che passano per il dato punto di tangenza, si trova:

$$y = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \quad \text{e} \quad y = -2 \cdot 2 + 3 = -1$$

e quindi i due punti di tangenza sono:

$$T_1 = (2, 3) \quad \text{e} \quad T_2 = (2, -1).$$

Alternativamente, per determinare le coordinate dei punti di tangenza, si può direttamente utilizzare l'equazione d'intersezione tra ciascuna delle rette tangenti con la circonferenza: ci aspettiamo che essa debba potersi scrivere come una quadrato di binomio uguagliato a zero [16] e quindi, in fondo, la risoluzione non dovrebbe comportare particolari difficoltà. Proviamo a determinare, ad esempio, il punto T_1

[15]È un caso che i punti di tangenza siano incolonnati in verticale, per cui le equazioni per le ascisse escano identiche!

[16]Perché?

precedentemente trovato. Mettiamo a sistema la retta tangente con la circonferenza:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y-3 & =0 \\ y=-\frac{1}{2}\,x+4 \end{cases}$$

Sostituendo dalla seconda equazione nella prima, si ottiene l'equazione di secondo grado:

$$x^2+\left(-\frac{1}{2}\,x+4\right)^2-2x-2\left(-\frac{1}{2}\,x+4\right)-3=0$$

equivalente a:

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)\,x^2+(-4-2+1)\;x+16-8-3=0$$

$$\frac{5}{4}\,x^2-5\,x+5=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-4x+4=0$$

ovvero, come ci aspettavamo,

$$(x-2)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

e sostituendo nell'equazione della retta tangente $y=3,$ come avevamo già trovato con l'altro metodo.

□

PROBLEMA 17. *Determinare l'equazione della circonferenza centrata nel punto* $C(1,4)$ *e tangente alla retta* $y=2\,x+3$.

Soluzione: [17] Il raggio della circonferenza è dato dalla distanza "centro circonferenza"-"retta tangente", per cui ce lo troviamo applicando la solita formula:

$$r=\frac{|4-(2\cdot 1+3)|}{\sqrt{4+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Quindi la circonferenza ha equazione:

$$x^2+y^2-2x-8y+1+16-\frac{1}{5}$$

ovvero:

$$x^2+y^2-2x-8y+\frac{84}{5}=0.$$

□

[17]Invitiamo il lettore a sperimentare *altre strategie risolutive*, presentando, da qui in avanti, solo uno dei possibili approcci alla soluzione dei problemi proposti.

Parte 2

Goniometria e Trigonometria

(Un interesse antichissimo)

CAPITOLO 7

Goniometria... magica Trigonometria

Letteralmente la parola *goniometria* significa "misura degli angoli", derivando dall'unione di due termini greci: "gonios" (angolo) e "metros" (misura). La trigonometria, termine coniato nel 1595 dal matematico tedesco Pitiscus, significa propriamente "misura dei triangoli" nel senso, noti qualche angolo e qualche lato si riesce a risalire alle misure di tutti gli elementi. L'origine di questa parte della Matematica è antichissima, tanto quanto l'interesse dell'uomo per l'osservazione astronomica e la misurazione degli astri o di "parti" sulla Terra. Già i Babilonesi erano dediti all'osservazione degli astri ed alle misurazioni delle loro grandezze o distanze: quindi i greci, entrando in contatto con quel mondo dalla profonda cultura scientifica, impararono e rielaborarono i concetti in modo più preciso e razionale, collocando gli argomenti nei giusti ambiti. Sicuramente già Talete utilizzava conoscenze trigonometriche per le sue deduzioni di tipo astronomico [1]. Nel III secolo a.C. Eratostene basandosi su semplici considerazioni trigonometriche, con uno stratagemma che racconteremo a breve, riuscì a stimare il raggio della sfera terrestre con una precisione incredibile per l'epoca, dato che rispetto alle misure [2] che si fanno oggi, con strumenti tecnologici molto più evoluti, la differenza è di poche decine di chilometri! È sicuramente da ricordare, in periodo successivo, Ipparco di Nicea, vissuto nel II secolo a.C., che sviluppò molti ragionamenti sul discorso trigonometrico, tanto che qualche studioso gli attribuisce perfino l'invenzione del *teodolite,* uno strumento che viene tuttora utilizzato per misurare distanze "a distanza". In tempi più recenti un po' tutti i Matematici hanno contribuito alla crescita e sistemazione della teoria e fatto vedere numerose applicazioni, che vanno ben oltre il problema di misurare un triangolo. Basti pensare, ad esempio, già solo alla *Teoria di Fourier,*

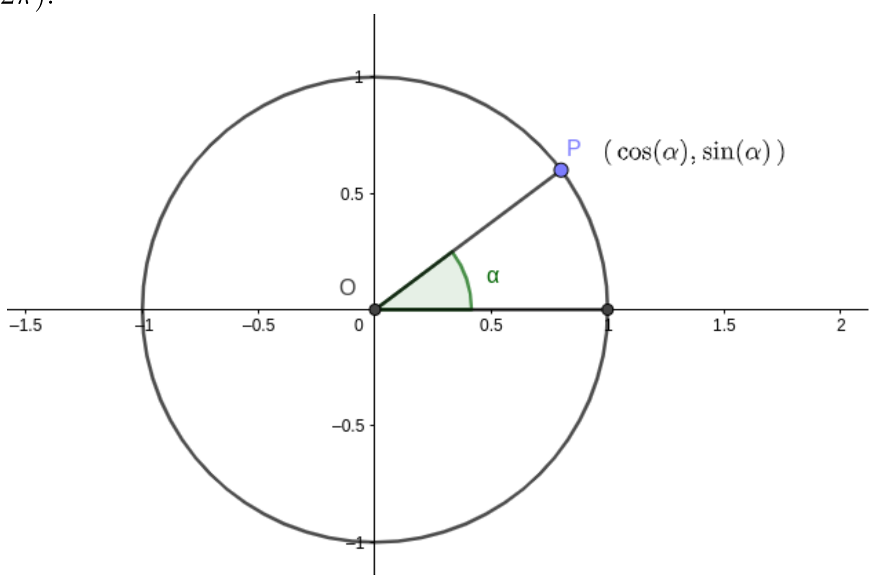
[1] Ricordiamo che Talete accrebbe moltissimo la propria fama quando riuscì a predire una eclisse solare durante una battaglia tra Medi e Lidi, che si impressionarono tanto, per come racconta Erodoto, che cessarono di combattere: Talete lo predisse, dicendo agli Ioni l'anno che sarebbe avvenuta.

[2] Del raggio medio, dato che ormai è assodato che la Terra non è perfettamente sferica.

che riguarda la rappresentazione di funzioni periodiche tramite combinazioni lineari di funzioni goniometriche: senza timore di esagerare, se non si fosse sviluppato abbastanza quel capitolo della Matematica, difficilmente oggi potremmo pensare di poter utilizzare televisori, radio, smartphone, internet, ecc [3]...

1. Le funzioni goniometriche elementari

Si consideri una circonferenza di raggio unitario, tipo $x^2 + y^2 = 1$, ed un suo punto P di coordinate (x_P, y_P). Se si congiunge il punto con il centro della circonferenza e si considera l'angolo che tale raggio forma con l'asse orizzontale [4], contando gli angoli a partire da tale asse, a destra, in senso antiorario, dovrebbe essere una immediata considerazione che in corrispondenza di ogni punto P si può associare un angolo (a meno di rotazioni complete attorno al centro della circonferenza) e, viceversa, in corrispondenza di ogni angolo, vi è un unico punto sulla circonferenza: insomma, si può stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti della circonferenza e gli angoli compresi nell'intervallo $[0, 2\pi)$.



In virtù di quanto detto poc'anzi, possiamo definire due funzioni che forniscano i valori delle coordinate del punto P dipendentemente dal valore dell'angolo α indicato: pertanto chiamiamo **coseno** dell'angolo α il valore dell'ascissa del punto P e **seno** dello stesso angolo, il valore

[3]Ogni segnale acustico è rappresentato da una funzione periodica, così come la luce, la corrente elettrica alternata, le onde radio...

[4]Passante dal centro: con la circonferenza data nell'esempio, evidentemente è l'asse delle ascisse.

dell'ordinata: esse si indicano, rispettivamente, con $\cos(\alpha)$ e $\sin(\alpha)$. Quindi P ha coordinate [5] espresse dalla coppia: $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.

Una applicazione diretta del Teorema di Pitagora fornisce la prima relazione importante della goniometria, tanto da essere denominata: "**Identità fondamentale della goniometria**":

$$\boxed{[\cos(\alpha)]^2 + [\sin(\alpha)]^2 = 1}.$$

Nel proseguo accetteremo il seguente *abuso di scrittura:* invece di scrivere $[\cos(\alpha)]^2$ non potendo fare confusione con altre interpretazioni, si scriverà $\cos^2(\alpha)$. Idem per $\sin^2(\alpha)$ e per tutte le altre "funzioni goniometriche" che troveremo lungo il cammino. Inoltre, dato che sposteremo l'attenzione sull'angolo α, a quest'ultimo ci riferiremo -per semplicità di scrittura- con l'incognita/variabile x.

1.1. Un appunto su come misurare gli angoli. Prima di proseguire con lo studio della goniometria, è bene ricordare le convenzioni per misurare gli angoli. Si suole considerare l'angolo piatto come punto di riferimento: il suo doppio si chiama angolo giro e la sua metà angolo retto. L'angolo giro viene diviso in 360 parti e ciascuna parte è detto **angolo grado.** Pertanto un angolo retto misura 90^o ed uno piatto 180^o. Angoli importanti sono quelli di 45^o, pari a metà angolo retto e quelli di 30^o e 60^o rispettivamente un terzo e due terzi dell'angolo retto. Ora, la lunghezza di una circonferenza di raggio unitario è 2π e c'è una corrispondenza biunivoca tra gli angoli e la lunghezza di questa circonferenza [6] compresa tra i lati dell'angolo: tale corrispondenza è una proporzionalità diretta! Quindi possiamo dire che, se con L_{arco} indichiamo la lunghezza dell'arco corrispondente all'angolo al centro,

$$360^o : 2\pi = \alpha_{\text{gradi}} : L_{\text{arco}}.$$

Definiamo **radiante** l'ampiezza dell'angolo al centro, che sottende sulla circonferenza un arco di lunghezza uguale al suo raggio. In tal modo la misura di un angolo in radianti è espressa dal rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza sotteso dall'angolo e il raggio della circonferenza stessa: se il raggio è unitario, come nel caso della circonferenza goniometrica, la misura dell'angolo in radianti non è altro

[5] A parte quelle del sistema di riferimento cartesiano di cui ci siamo occupati nella prima parte di questo libro.

[6] In verità la lunghezza di una qualsiasi circonferenza di raggio prefissato.

che la lunghezza della circonferenza compresa tra i lati dell'angolo [7]! Per quanto detto, l'angolo giro misura 2π radianti, l'angolo piatto π radianti; l'angolo retto $\frac{\pi}{2}$ radianti e così via: l'angolo di 45^o è pari a $\frac{\pi}{4}$ radianti e quelli di 30^o e 60^o rispettivamente a $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$ radianti. Il vantaggio di utilizzare la misura in radianti è che esso rappresenta un numero puro [8]. La conversione tra gradi e radianti si effettua dalla proporzione indicata prima. Ad esempio, si voglia sapere a quanti gradi corrispondono $\frac{3}{5}\pi$. Si scriverà all'uopo

$$360^o : 2\pi = \alpha_{\text{gradi}} : \frac{3}{5}\pi$$

da cui

$$\alpha_{\text{gradi}} = \frac{3\cancel{\pi}}{\cancel{5}} \cdot \cancel{360}^{36} \cdot \frac{1}{\cancel{2\pi}} = 108^o.$$

Si voglia altresì calcolare quanti radianti corrisponde l'angolo di 110^o. In questo caso si procederà con

$$360^o : 2\pi = 110^o : \alpha_{\text{rad}}$$

da cui

$$\alpha_{\text{rad}} = \frac{110}{360} \cdot 2\pi = \frac{11}{18} \cdot \pi.$$

2. Descrizione delle funzioni goniometriche elementari

Come prima immediata considerazione, dato che seno e coseno sono le coordinate dei punti di una circonferenza goniometrica, i loro valori sono sempre compresi tra zero ed uno. Inoltre, dopo un giro completo sulla circonferenza, evidentemente i valori ritornano ad essere sempre gli stessi: si dice che sono **funzioni periodiche di periodo** 2π, o, meglio ancora, sono 2π-periodiche [9]. Ad esempio:

$$\sin(405) = \sin(360^o + 45^o) = \sin(45^o)$$

In generale, se $f(x)$ è una data funzione [10], essa si dice periodica di periodo T, se esiste un valore T tale per cui, per ogni x del dominio,

[7] Da qui il motivo della denominazione "goniometrica": una circonferenza di raggio unitario misura, con la lunghezza dei suoi archi, gli angoli al centro sottesi dagli archi stessi.

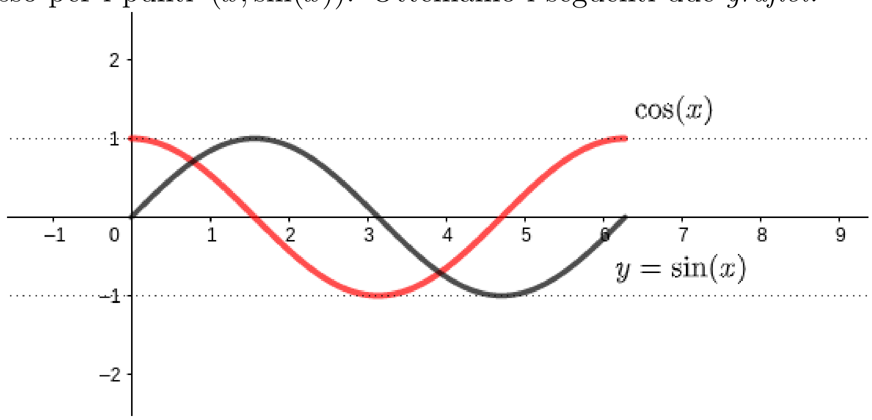
[8] Quindi *spalmabile* sulla retta reale, solitamente l'asse delle ascisse e confrontabile con i numeri che si ottengono come valori delle ordinate: la misura in gradi rappresenta l'ampiezza di un pezzo di piano e non ha senso confrontarla con i numeri che rappresentano i valori in ordinata delle funzioni goniometriche.

[9] Oppure *periodiche di* 360 *gradi.*

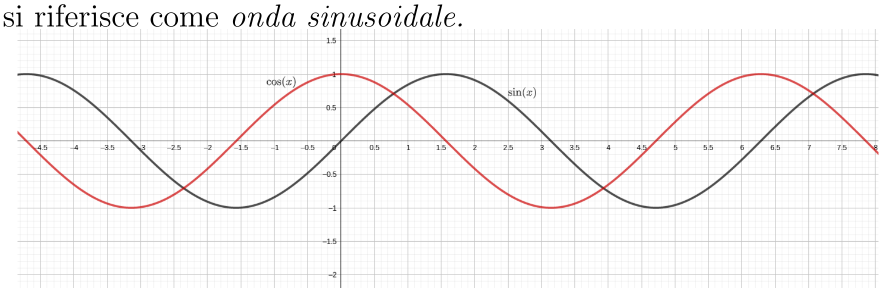
[10] Ricordiamo che per **funzione** si intende una legge associativa univoca, unitamente a due insiemi, detti **dominio** e **codominio**, tale che ad ogni elemento del dominio, corrisponde un (solo) elemento del codominio.

si abbia: $f(x+T) = f(x)$. Le funzioni goniometriche elementari, seno e coseno, sono le funzioni periodiche per antonomasia, ma ne incontreremo altre, in questo capitolo, che, sebbene definite tramite le due elementari, non sono $2\pi-$periodiche.

Ora immaginiamo di "stendere" gli archi da zero a 2π sull'asse delle ascisse e disegniamo i punti del tipo $(x, \cos(x))$ e poi facciamo lo stesso per i punti $(x, \sin(x))$. Otteniamo i seguenti due *grafici:*



Questi due grafici si prolungano, ripetendosi uguali a se stessi, sia prima che dopo l'intervallo di periodicità prescelto, quindi il grafico delle due funzioni elementari risulta [11] il seguente e, si osserva immediatamente, essi sono "sfasati" di $\frac{\pi}{2}$: ovvero, "spingendo in avanti" il grafico del coseno, si ottiene il grafico del seno oppure, "tirando indietro" il grafico del seno, si ottiene proprio quello del coseno. In tal senso, ad entrambe ci si riferisce come *onda sinusoidale.*

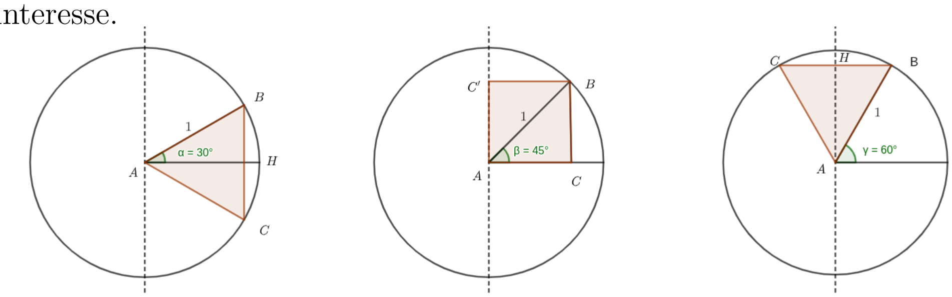


3. Archi notevoli

I valori delle funzioni seno e coseno, per alcuni angoli particolari, sono noti per semplici considerazioni di geometria euclidea. Tali archi sono quelli corrispondenti agli angoli di 30^o, 45^o e 60^o, ovvero

[11]In rosso il $cos(x)$ e in nero il $\sin(x)$.

[12] per gli archi $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, e $\frac{\pi}{3}$. Per ricavare i valori di questi *archi notevoli,* rappresentiamo una circonferenza goniometrica con i tre casi d'interesse.



Nel primo caso l'angolo di 30^o è $H\hat{A}B$; il punto simmetrico di B rispetto al raggio orizzontale AH è C e, dato che $B\hat{A}C$ è di 60^o e $\overline{AB} = \overline{AC}$ sono entrambi raggi (di lunghezza unitaria), allora il triangolo $\overline{ABC}$ risulta essere un triangolo equilatero. Considerando ora che $\cos(\alpha) = \overline{AH}$, ovvero è l'altezza del triangolo equilatero di lato unitario e $\sin(\alpha) = \overline{BH}$, ovvero è il semi-lato del triangolo equilatero, ricaviamo i primi due valori cercati:

$$\cos(30^o) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \sin(30^o) = \frac{1}{2}.$$

Nel secondo caso, la figura illustra chiaramente che il quadrilatero $\overline{ACBC'}$ è un quadrato di diagonale unitaria: è giusto un'osservazione che i lati di tale quadrato sono proprio il coseno ed il seno dell'angolo cercato. Per cui otteniamo gli altri due valori:

$$\cos(45^o) = \sin(45^o) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nell'ultimo caso si ha che il triangolo $\overline{ABC}$ costruito con il vertice C simmetrico rispetto all'asse verticale, passante dal centro della circonferenza, del punto B è esattamente il triangolo equilatero del primo caso. Pertanto i ruoli di seno e coseno si sono invertiti e possiamo scrivere i rispettivi valori come:

$$\cos(60^o) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \sin(60^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Questi valori sono tutti appartenenti al primo quadrante del sistema di riferimento e quindi del cerchio goniometrico e sono fondamentali,

[12]Da qui in avanti, la conversione angoli-radianti è intesa all'occorrenza, il ché significa che ci sentiremo liberi di utilizzare o l'una o l'altra delle rappresentazioni delle misure degli angoli.

non solo perché si sono saputi calcolare con considerazioni elementari di geometria euclidea [13], ma soprattutto perché a partire da essi si deducono i valori di altri angoli, anche non appartenenti al primo quadrante. Possiamo riassumere in una tabella sinottica i valori principali degli archi notevoli.

	$\cos(x)$	$\sin(x)$
0^o	1	0
30^o	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
45^o	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60^o	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
90^o	0	1
180^o	-1	0
270^o	0	-1
360^o	1	0

4. Archi associati

Si chiamano archi associati gli angoli complementari, supplementari, esplementari o che diano come somma $\frac{3}{2}\pi$. Osservando che gli angoli multipli di $\frac{\pi}{2}$ stanno sugli assi cartesiani, rispetto alla circonferenza goniometrica canonica di equazione $x^2+y^2=1,$ allora si può dire che sono archi associati quelli che, sommati o sottratti, portano il punto corrispondente sulla circonferenza, in uno dei quattro punti d'intersezione della circonferenza stessa con gli assi cartesini. Pertanto, sono associati, considerando un angolo $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,

$$\alpha \quad \text{e} \quad \frac{\pi}{2} \mp \alpha$$

e così pure

$$\alpha \quad \text{e} \quad \pi \mp \alpha,$$

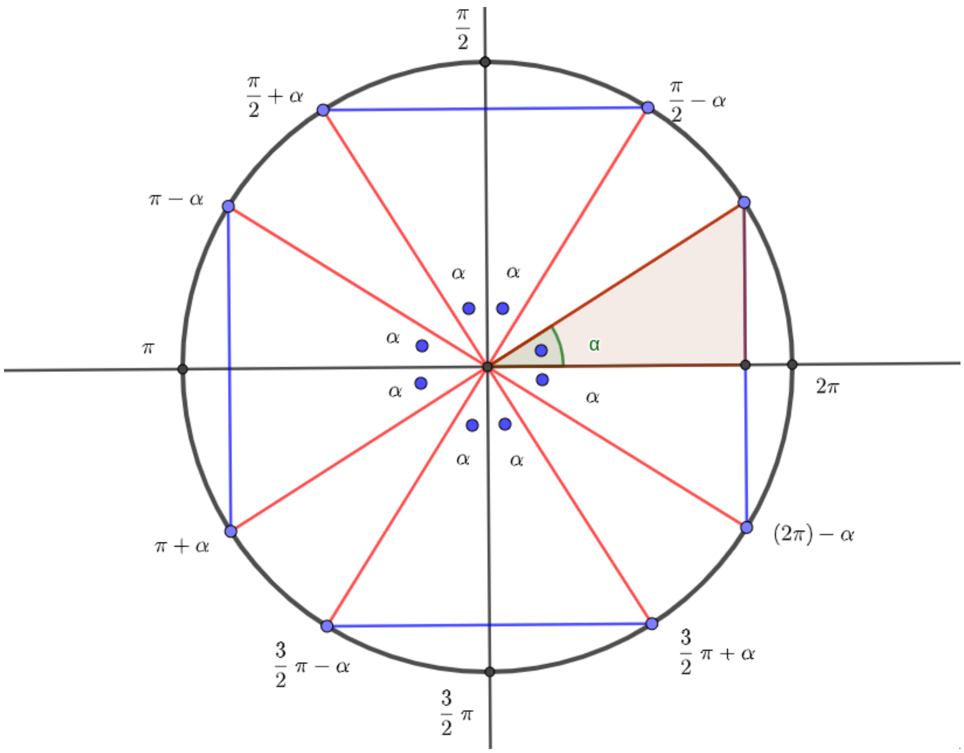
$$\alpha \quad \text{e} \quad \frac{3}{2}\pi \mp \alpha$$

e

$$\alpha \quad \text{e} \quad 2\pi - \alpha.$$

[13] Basta conoscere le proprietà dei triangoli rettangoli "30-60" o "45-45": sono le squadrette che normalmente si utilizzano in "disegno".

Il fatto principale, che salta subito all'occhio, è che tutti gli archi associati lo sono su un angolo α del primo quadrante: riuscendo a capire la relazione che sussiste tra archi associati, il calcolo delle funzioni in tutti gli angoli superiori ai 90^o si riconduce alla determinazione dei loro valori per angoli minori dell'angolo retto [14]. Osserviamo il seguente diagramma e cerchiamo di capirlo bene: tutta la goniometria, in fondo, si fa tramite un cerchio goniometrico come questo!



Osservando i triangoli rettangoli, si noterà che essi sono tutti congruenti: in quella "croce di Malta" ci sono quattro triangoli isosceli suddivisi in otto triangoli rettangoli. I cateti di questi triangoli sono, quelli orizzontali i valori del coseno, mentre quelli verticali i valori del seno degli angoli indicati sulla circonferenza goniometrica. Ad esempio, dall'uguaglianza del cateto orizzontale con quello verticale del triangolo di riferimento [15], si ottiene:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$$

oppure, ancora,

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\cos(\alpha).$$

[14]Ovvero per angoli del primo quadrante.

[15]Quello evidenziato nel primo quadrante.

Si invita lo studente a scrivere, come utile esercizio, tutt'e sette le formule di uguaglianza degli archi associati.

4.1. Primo utilizzo degli archi associati. Come prima immediata utilità delle formule discusse per gli archi associati, ricaviamo il valore delle funzioni elementari per l'angolo di 225^o. Quindi scriviamo [16]

$$\cos(225^o) = \cos(180^o + 45^o) \ = \ -\cos(45^o) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

$$\sin(225^o) = \sin(180^o + 45^o) \ = \ -\sin(45^o) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Oppure ancora, i valori delle funzioni elementari per l'angolo di 300^o.

$$\cos(300^o) = \cos(270^o + 30^o) \ = \ \sin(30^o) = \frac{1}{2}$$

e

$$\sin(300^o) = \sin(270^o + 30^o) \ = \ -\cos(30^o) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Altre utili applicazioni degli archi associati saranno viste per la risoluzione delle equazioni goniometriche elementari.

5. Altre funzioni goniometriche

A partire dalle due funzioni goniometriche elementari si definiscono queste altre quattro funzioni dell'angolo α, altrettanto utili ed importanti di quelle che abbiamo finora viste. La prima è la **tangente,** definita come il rapporto tra seno e coseno dello stesso angolo:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

Come prima osservazione diciamo che dove il coseno prende valore nullo, questa funzione non è definita. Inoltre i valori per gli archi notevoli vengono immediatamente ricavati dal rapporto dei valori scritti nella tabella per le funzioni goniometriche elementari [17]. La seconda funzione è definita come la reciproca della tangente e si chiama **cotangente:**

$$\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}.$$

[16]Abbiamo inteso $225 = 180 + 45$ ma lo stesso risultato si otterrebbe se considerassimo $225 = 270 - 45$.

[17]Scritte tutt'e quattro queste nuove funzioni, riportiamo una tabella sinottica con i valori -al primo quadrante- di tutte le funzioni goniometriche incontrate.

Questa, evidentemente, non è definita nei punti in cui il seno si annulla. La terza funzione goniometrica è definita come il reciproco del coseno e si chiama **secante:**

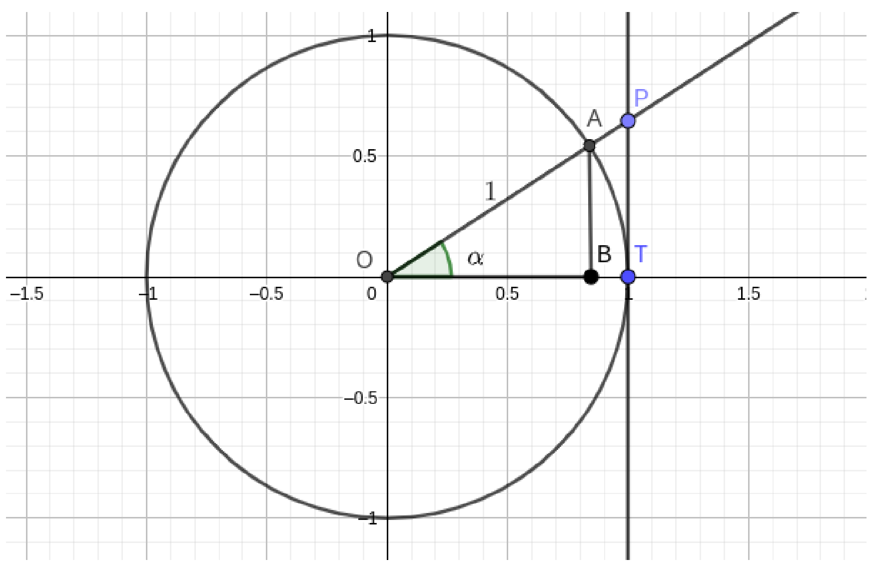
$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

e l'ultima funzione è la reciproca del seno e si chiama **cosecante:**

$$\csc(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)}.$$

Per tutte, non solo per tangente e cotangente, vale il fatto che dove si annullano i denominatori, le funzioni non sono definite.

5.1. Significato geometrico delle funzioni derivate. Come il coseno ed il seno di un angolo rappresentano ascissa ed ordinata di un punto che appartiene alla circonferenza goniometrica, così le quattro funzioni ricavate in questo paragrafo, hanno un importante significato geometrico che, tra l'altro, è appropriato al nome che portano.



I triangoli $\overline{ABO}$ e $\overline{PTO}$ sono simili, per cui hanno i lati in proporzione: possiamo scrivere

$$\overline{AB} : \overline{BO} = \overline{PT} : \overline{OT}.$$

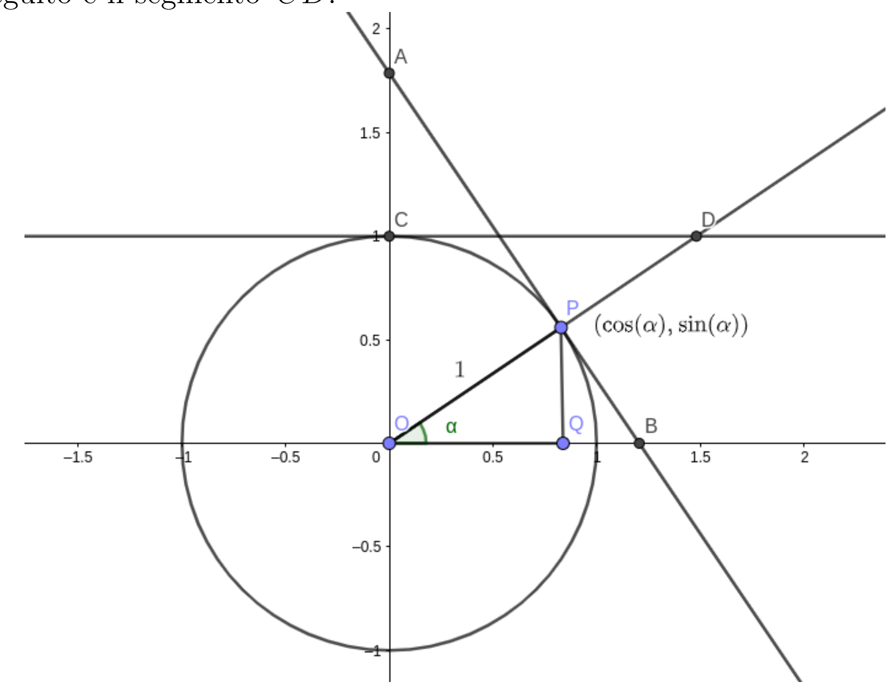
Ora ricordiamo che la misura di $\overline{OT}$ è 1, quelle di $\overline{AB}$ e $\overline{OB}$ sono rispettivamente $\sin(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$, passando alla proporzione tra le misure, si ottiene

$$\sin(\alpha) : \cos(\alpha) = \mu(\overline{PT}) : 1$$

da cui

$$\mu(\overline{PT}) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha),$$

ovvero il segmento $\overline{PT}$ rappresenta proprio $\tan(\alpha)$ [18]. Un discorso analogo può essere fatto per vedere che la cotangente rappresenta il segmento sulla retta tangente alla circonferenza goniometrica, che passa dal punto $(0,1)$ ovvero nel punto dell'arco pari a $\frac{\pi}{2}$, nella figura di seguito è il segmento $\overline{CD}$.



Dalla similitudine dei triangoli $\overline{PQO}$ e $\overline{PBO}$ si ricava la seguente proporzione:

$$\overline{OP} : \overline{OQ} = \overline{OB} : \overline{OP}$$

da cui

$$\mu(\overline{QB}) = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \sec(\alpha).$$

Quindi il segmento $\overline{OB}$ rappresenta proprio $\sec(\alpha)$. Un ragionamento analogo mostra [19] che il segmento $\overline{OA}$ rappresenta la cosecante dell'angolo α.

[18] Come avevamo anticipato, il nome è adeguato, dato che essa rappresenta la lunghezza di un segmento che si prende sulla retta tangente nel punto di origine degli archi sulla circonferenza goniometrica.

[19] Invitiamo lo studente volenteroso a svolgere tutti i passaggi.

5.2. I grafici delle funzioni derivate. Innanzitutto, dalla rappresentazione grafica del significato geometrico delle funzioni tangente e cotangente, osserviamo che esse sono periodiche di un angolo piatto, anziché dell'angolo giro come le funzioni goniometriche elementari: sono, si dice, π-periodiche. Inoltre entrambe non sono limitate: prendono tutti i valori che vanno da $-\infty$ a $+\infty$. Hanno anche un'infinità di punti di discontinuità: ovvero non possono essere disegnate, per intero, non staccando la penna dal foglio [20]. Diamo qui di seguito le rappresentazioni grafiche, invitando il lettore ad immaginare un punto che si muova sulla circonferenza goniometrica, partendo dal punto $(1,0)$ e ruoti in senso antiorario [21] un certo numero di volte, tracciando sulle rette tangenti i valori della tangente o della cotangente dell'angolo variabile e, sugli assi cartesiani, i valori della cosecante e della secante.

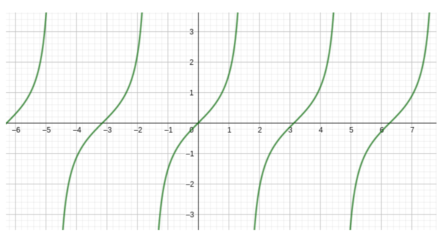


Grafico della Tangente

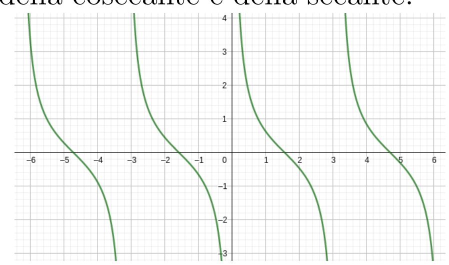


Grafico della Cotangente

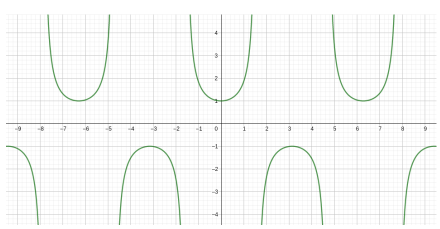


Grafico della Secante

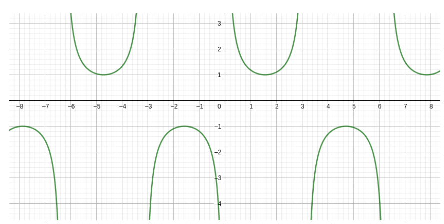


Grafico della Cosecante

5.3. Tabella sinottica dei valori nel primo quadrante. Questa che segue è la tabella riassuntiva dei valori delle sei funzioni goniometriche definite e discusse finora, con l'avvertenza che tramite "archi associati" per tutti gli altri valori, si può ricondurre il calcolo ad uno di questi casi.

[20] Della continuità e discontinuità delle funzioni ne parleremo più avanti.

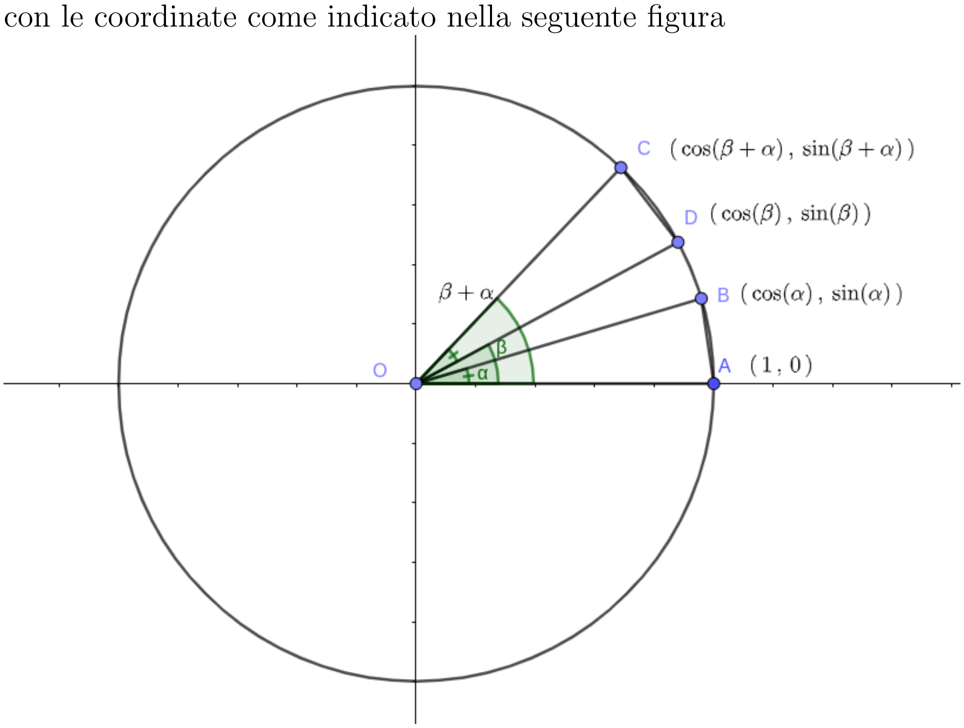
[21] Od orario.

	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$cot(x)$	$\sec(x)$	$\csc(x)$
0^o	1	0	0	/	1	/
30^o	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
45^o	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60^o	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
90^o	0	1	/	0	/	1

6. Qualche formula utile

Una delle cose che presto si impara della goniometria è che ha un considerevole numero di formule. Alcune sono effettivamente molto utili e frequentemente utilizzate, altre, in verità, basta sapere che esistono. Nella selezione di quelle che riteniamo più utili, terremo presente un criterio preciso: esse sono le formule da cui si possono far derivare le altre, qualora occorresse. Il primo gruppo di formule che presenteremo si chiamano di *addizione/sottrazione di archi.*

6.1. Formule di addizione/sottrazione di archi. Consideriamo un circonferenza goniometrica e su di essa i punti A, B, C e D con le coordinate come indicato nella seguente figura



I triangoli $\overline{AOB}$ e $\overline{COD}$ sono congruenti, pertanto $d(C, D) = d(A, B)$. Quadrando ed utilizzando le coordinate, si ottiene:

$[\cos(\beta + \alpha) - \cos(\beta)]^2 + [\sin(\beta + \alpha) - \sin(\beta)]^2 = [\cos(\alpha) - 1]^2 + \sin^2(\alpha)$

ovvero:

$$\cos^2(\beta + \alpha) - 2\ \cos(\beta + \alpha)\ \cos(\beta) + \cos^2(\beta) +$$
$$+ \sin^2(\beta + \alpha) - 2\ \sin(\beta + \alpha)\ \sin(\beta) + \sin^2(\beta) =$$
$$= \cos^2(\alpha) - 2\cos(\alpha) + 1 + \sin^2(\alpha).$$

Utilizzando l'identità fondamentale si ottiene:

$$2 - 2\ \cos(\beta + \alpha)\ \cos(\beta) - 2\ \sin(\beta + \alpha)\ \sin(\beta) = 2 - 2\cos(\alpha)$$

ovvero:

$$\cos(\beta + \alpha)\ \cos(\beta) + \sin(\beta + \alpha)\ \sin(\alpha) = \cos(\alpha).$$

Da questa, con una ri-parametrizzazione [22], ponendo $\beta + \alpha = x$ e $\beta = y$, da cui anche $\alpha = x - y$:

$$\boxed{\cos(x - y) = cos(x)\ \cos(y) + \sin(x)\sin(y)}.$$

Questa nel riquadro prende il nome di **formula di sottrazione di archi per il coseno.** Sostituendo a y l'angolo $-y$ e ricorrendo agli archi associati si ottiene:

$$\cos(x + y) = cos(x)\ \cos(-y) + \sin(x)\sin(-y)$$
$$\boxed{\cos(x + y) = cos(x)\ \cos(y) - \sin(x)\sin(y)}$$

Ovvero la **formula di addizione degli archi per il coseno.** Le due formule si uniscono, generalmente, in un'unica, che è la seguente:

$$\boxed{\cos(x \pm y) = cos(x)\ \cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)}.$$

In modo simile, si possono ricavare le due **formule di addizione** o **sottrazione di archi per il seno** [23] che riportiamo qui di seguito:

$$\boxed{\sin(x \pm y) = sin(x)\ \cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)}.$$

Per ricordare suggeriamo di considerare il coseno come una *funzione prepotente e dispettosa,* mentre la funzione seno come funzione *democratica e gentile:* con questo intendiamo che il coseno, nella formula che lo riguarda, pretende di "iniziare con un doppio coseno" e

[22] Ovvero con una sostituzione di variabili.

[23] Basta procedere con argomenti simili partendo dal punto $(0, 1)$ anziché da $(1, 0)$.

dispettosamente cambia il segno a quello che segue. D'altra parte, il seno si comporta democraticamente, affiancando a sé un coseno e, con gentilezza, lascia i segni per come li trova.

6.2. Formule di duplicazione e di bisezione. Se si considerano gli archi uguali $x = y$ nelle formule di addizione di archi per il seno od il coseno, si ricavano le due **formule di duplicazione** per seno e coseno. Per il coseno si ha:

$$\cos(x + x) = cos(x)\ \cos(x) - \sin(x)\sin(x)$$

ovvero

$$\boxed{\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)}$$

equivalentemente, utilizzando l'identità fondamentale, [24]

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)\ = 2\cos^2(x) - 1.$$

Per il seno, invece:

$$\sin(x + x) = \sin(x)\ \cos(x) - \cos(x)\sin(x)$$

e quindi

$$\boxed{\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)}.$$

Ora, da $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$, ricaviamo anche:

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Richiamando $2x = \alpha$ e quindi $x = \frac{\alpha}{2}$ ed estraendo la radice quadrata si ottiene la **formula di bisezione per il seno:**

$$\boxed{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}}.$$

Dall'identità fondamentale:

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1$$

ricaviamo, sostituendo l'espressione trovata per la bisezione del seno,

$$\frac{1 - \cos(\alpha)}{2} + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1$$

da cui:

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2}$$

[24] Si utilizza la formula che si ritiene più conveniente di volta in volta.

e con la sostituzione precedente, estraendo la radice quadrata, si può scrivere la seguente **formula di bisezione per il coseno:**

$$\boxed{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}}.$$

Ricordiamo, per citare, un altro gruppo di formule, alcune delle quali proporremo di dimostrare come esercizio: *Formule di prostaferesi, Formule di Werner, Formule di Briggs.*

Come esercizio, partendo dalle definizione delle altre quattro funzioni goniometriche presentate in questo capitolo, si determinino le formule di addizione/sottrazione, duplicazione e bisezione per la tangente, la cotangente, la secante e la cosecante.

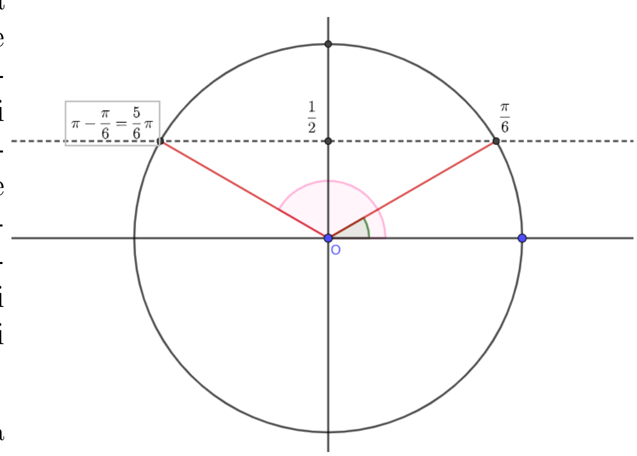
7. Equazioni goniometriche elementari

Le equazioni goniometriche elementari sono quelli per le quali una funzione goniometrica viene uguagliata ad un dato valore. Risolverle significa determinare tutti i valori degli archi che la soddisfano. Si raccomanda di disegnare sempre una circonferenza goniometrica per determinare gli angoli giusti: le equazioni diventano facili da risolvere se si ha ben chiaro come si utilizza la circonferenza goniometrica! Osserviamo, fin da ora, che essendo limitate e comprese tra -1 e 1, le equazioni del tipo $\sin(x) = N$ oppure $\cos(x) = N$ possono avere soluzioni solo per $N \in [-1.1]$. Vediamo ora come si risolvono, con degli esempi, vari tipi di equazioni elementari.

Esempio: Risolvere l'equazione $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Soluzione: Disegniamo la circonferenza goniometrica e fissiamo sull'asse delle ordinate [a] il valore $\frac{1}{2}$. Dopo di ché, anche tirando semplicemente un asse orizzontale per intercettare la circonferenza goniometrica, si riportino i due valori dell'arco di circonferenza corrispondenti al detto valore $\frac{1}{2}$.

[a] Ove si trovano i valori della funzione seno.



A questo punto abbiamo individuato i (primi) due angoli che corrispondono, come argomento, al valore del seno uguale ad un mezzo. Pertanto possiamo scrivere : [25]

$$2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi \quad \text{oppure} \quad 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\,\pi + 2\,k\,\pi$$

e quindi:

$$2x = -\frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi \quad \text{oppure} \quad 2x = \frac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{6}_{\,2}}\,\pi + 2\,k\,\pi$$

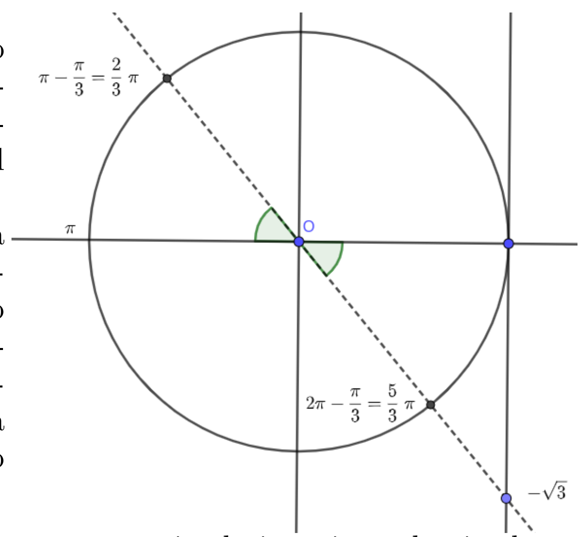
ed infine, utilizzando il fatto che $-\frac{\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\,\pi$,

$$x = \frac{11}{12}\,\pi + k\pi \quad \text{oppure} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

□

Esempio: Risolvere l'equazione $\tan\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{3}{2}\,x\right) = -\sqrt{3}$.

Soluzione: Anche in questo caso disegniamo la circonferenza goniometrica e fissiamo sull'asse tangente nel punto $(1, 0)$ il valore $-\sqrt{3}$. Dopo di ché, tracciando la retta passante dal punto sulla retta tangente e dal centro della circonferenza goniometrica, si riportino i due valori dell'arco di circonferenza corrispondenti al valore dato $-\sqrt{3}$.



Si nota subito che per la funzione tangente, i valori corrispondenti sull'arco goniometrico sono rappresentati da punti diametralmente opposti e quindi, dalla prima soluzione, aggiungendo la periodicità, si ottiene anche la seconda. Possiamo, pertanto, scrivere [26]

$$\frac{5}{6}\,\pi - \frac{3}{2}\,x = \frac{2}{3}\,\pi + k\,\pi$$

[25] Ricordiamo sempre di aggiungere i giri completi a partire dal primo angolo, per ottenere tutte le soluzioni a partire da quella "base".

[26] Si ricordi sempre di aggiungere i semi-giri a partire dal primo angolo, per ottenere tutte le soluzioni a partire da quella "base".

e quindi:

$$\left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right) \pi + k\,\pi = \frac{3}{2}\,x$$

[27] e quindi, infine:

$$x = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{6}\,\pi + k\,\pi\right] \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{9}\,\pi + \frac{2}{3}\,k\,\pi.$$

È giusto una verifica (banale) che le soluzioni date a partire dal valore $\frac{5}{3}\,\pi$ sono già incluse in quella trovata poc'anzi, nei fatti avremmo avuto:

$$\frac{5}{6}\,\pi - \frac{3}{2}\,x = \frac{5}{3}\,\pi + k\,\pi$$

da cui:

$$-\frac{3}{2}\,x = \left(\frac{5}{3} - \frac{5}{6}\right) \pi + k\,\pi.$$

Ancora:

$$x = -\frac{2}{3}\left[\frac{5}{3}\,\pi + k\,\pi\right] \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{5}{9}\,\pi + \frac{2}{3}\,k\,\pi$$

e, preferendo indicare come primo angolo sempre uno positivo, riportando $-\frac{5}{9}\,\pi = 2\pi - \frac{5}{9}\,\pi = \frac{13}{9}\,\pi$ avremmo scritto quest'altra [28] soluzione:

$$x = \frac{13}{9}\,\pi + \frac{2}{3}\,k\,\pi.$$

Ora, per $k = 2$ la prima soluzione trovata dà il valore:

$$x = \frac{1}{9}\,\pi + \frac{4}{3}\,\pi = \left(\frac{1}{9} + \frac{12}{9}\right) \pi = \frac{13}{9}\,\pi,$$

ovvero la "prima soluzione base" indicata da questa seconda soluzione, quindi questa seconda si trova già scritta nella prima, come avevamo affermato all'inizio della risoluzione!

□

[27] Nota che il segno di $k\,\pi$ sia al secondo che al primo membro lo mettiamo positivo, dato che il numero arbitrario $k \in \mathbb{Z}$ ingloba l'informazione sul segno stesso: insomma si tratterebbe solo di indicare il verso di percorrenza, antiorario od orario e null'altro e questo non cambia la sostanza della soluzione.

[28] Meglio ancora sarebbe dire "serie di soluzioni".

8. Equazioni risolvibili tramite archi associati

Tutte le equazioni del tipo:

$$\sin(\text{qualcosa}) = \sin(\text{qualcos'altro})$$

$$\cos(\text{qualcosa}) = \cos(\text{qualcos'altro})$$

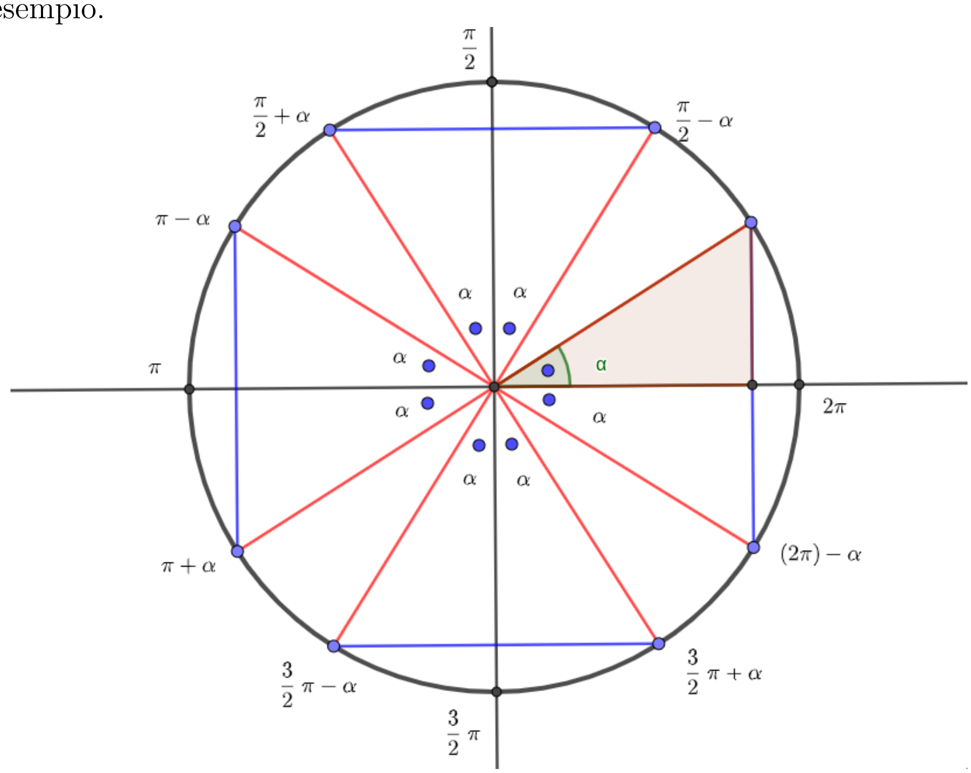
$$\sin(\text{qualcosa}) = \cos(\text{qualcosa})$$

$$\tan() = \tan() \quad \text{oppure} \quad \tan() = \cot()$$

e

$$\cot() = \cot()$$

si possono risolvere semplicemente utilizzando gli archi associati. Faremo il discorso in generale e, alla fine, risolveremo qualche esercizio d'esempio.



Riguardando la circonferenza con gli archi associati possiamo dire che se $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ allora $\sin(\beta) = \cos(\alpha)$ e lo stesso vale se $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$. Queste uguaglianze devono essere valide a meno di giri completi, ovvero, detto altrimenti, sono valide se ad uno dei due membri si aggiunge $2k\pi$ con k arbitrario in $\mathbb{Z}$. Quindi concludiamo che:

$$\boxed{\sin(\beta) = \cos(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \beta \pm \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}.$$

In modo analogo osserviamo che se $\beta = \pi - \alpha$ allora $\sin(\beta) = \sin(\alpha)$. Quindi possiamo dedurre che, oltre quando $\alpha = \beta + 2k\pi$, anche quando:

$$\boxed{\sin(\beta) = \sin(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta = \pi + 2k\pi}.$$

Invece $\cos(\beta) = \cos(\alpha)$ si ha quando $\alpha = \beta + 2k\pi$, oppure quando: $\beta = 2\pi - \alpha$ e quindi si ha:

$$\boxed{\cos(\beta) = \cos(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta = 2k\pi}.$$

Ricordiamo che quando due angoli hanno somma l'angolo retto, si diranno *complementari;* se la somma è un angolo piatto, *supplementari* e se sommano ad un angolo giro, si diranno *esplementari.* Possiamo perciò dire che due seni sono uguali se i loro argomenti [29] sono supplementari, due coseni se i loro argomenti sono esplementari ed un seno è uguale ad un coseno [30] se gli argomenti delle due funzioni sono complementari (oppure la loro diffenza è un angolo retto).

Si lascia come esercizio meditare e determinare le relazioni tra gli argomenti per le altre equazioni indicate all'inizio del paragrafo.

Esempio: Si risolva la seguente equazione:

$$\sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right).$$

Soluzione: Abbiamo appena detto che due seni sono uguali se i loro argomenti sono uguali o supplementari a meno di giri completi, per cui possiamo scrivere:

$$\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right) = \left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 2k\pi$$

ovvero:

$$3x = \pi + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}k\pi};$$

oppure:

$$\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right) + \left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \pi + 2k\pi$$

da cui:

$$x - \frac{1}{3}\pi = \pi + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi}.$$

[29] Per **argomento** di una funzione si intende la quantità considerata nel dominio: quella indicata tra le parentesi subito dopo la funzione... se la funzione è $f(x)$, l'argomento è x.

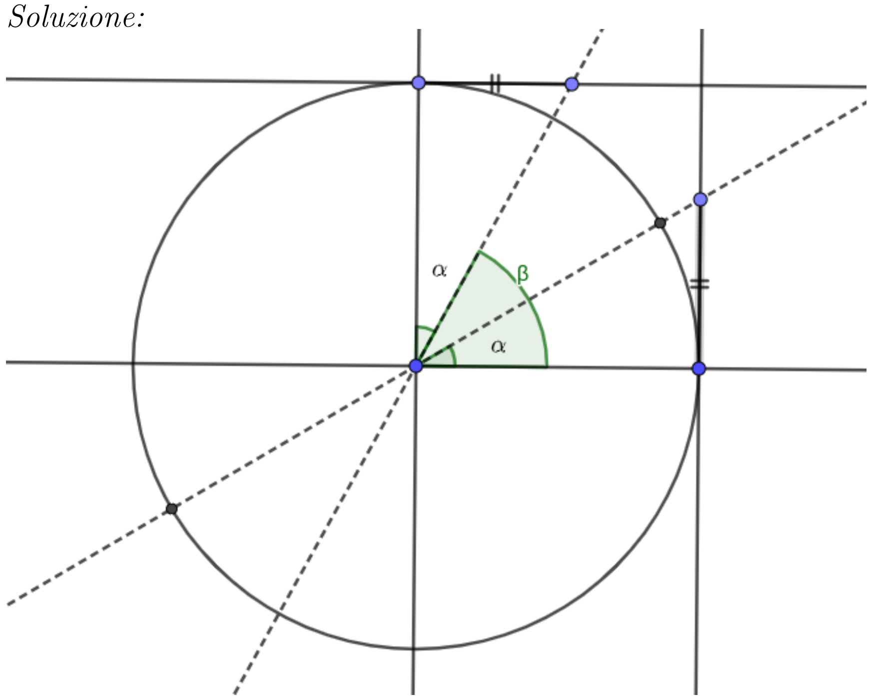
[30] In questo ordine!

□

Esempio: Risolvere l'equazione goniometrica [31]

$$\tan\left(\frac{1}{3}x\right) = \cot\left(x + \frac{2}{5}\pi\right).$$

Soluzione:



Osservando la figura, notiamo che la $\tan(\alpha)$ uguaglia la $\cot(\beta)$ quando $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ovvero quando gli angoli sono complementari [32] Per cui

$$\boxed{\cot(\beta) = \tan(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi}.$$

Da questa osservazione partiamo per la risoluzione dell'esercizio:

$$\left(\frac{1}{3}x\right) + \left(x + \frac{2}{5}\pi\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\frac{4}{3}x = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right)\pi + k\pi$$

[31] Si spera che si sia già meditato, per come richiesto di fare prima, sulle relazioni tra tangenti e cotangenti, sennò poco male, perché lo si farà assieme per risolvere questo esercizio.

[32] Chiaramente a meno della periodicità delle due funzioni, che è di un angolo piatto.

per cui

$$x = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{10}\,\pi + \frac{3}{4}\,k\,\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{3}{40}\,\pi + \frac{3}{4}\,k\,\pi}.$$

□

9. Equazioni riconducibili a forme elementari

Il punto di partenza per la risoluzione delle equazioni goniometriche è certamente di riportare la situazione ad una "equazione goniometrica elementare". A seconda della forma in cui ci si trova a risolvere l'equazione, si possono adottare vari trucchi: ad esempio, se formalmente l'equazione è di secondo grado in un'unica funzione goniometrica, allora la si risolve rispetto a tale funzione, in modo da determinare quali valori essa deve assumere e poi, scartando le soluzioni non ammissibili [33], ci si ritrova a dover risolvere un certo numero di equazioni tutte di forma elementare. Altri casi sono dati dalle **equazioni omogenee** [34], per le quali la riduzione a forma elementare si effettua tramite la divisione di tutti i termini con una stessa funzione goniometrica elevata al grado di omogeneità e, successivamente alla risoluzione dell'equazione che si determina, per come detto poc'anzi. Dato che questo caso considera entrambe le precedenti situazioni, diamo un esempio di come risolvere un'equazione omogenea.

Esempio: Risolvere l'equazione

$$\sqrt{3}\,\cos^2(x) + 3\cos(x)\sin(x) = 0$$

Soluzione: Quella data è una equazione omogenea di secondo grado. Per i valori nei quali $cos(x) \neq 0$, possiamo dividere tutti i termini per $\cos^2(x)$ ottenendo:

$$\sqrt{3} + \tan(x) = 0,$$

ovvero l'equazione elementare:

$$\tan(x) = -\sqrt{3}.$$

Abbiamo già incontrato, in un esempio precedente, i valori degli archi per i quali la tangente assume il valore $-\sqrt{3}$: essi sono $\frac{2}{3}\pi$ ed il suo

[33] Ad esempio, per seno e coseno quelle fuori dall'intervallo $[-1, 1]$, per tangente e cotangente, quelle che rendono nulli i denominatori.

[34] Una espressione si dice **omogenea di grado** n se tutti gli addendi sono di grado n se visti come monomi nelle rispettive quantità; ad esempio $x^2y + xy^2 + y^3$ è omogenea di grado tre. Se a posto di x o y compaiono seno e coseno, allora continua ad essere un'espressione omogenea di terzo grado in seno e coseno. Si può dire, molto semplicemente che **una equazione omogenea** è data da una espressione omogenea uguagliata a zero

diametralmente opposto valore $\frac{5}{3}\pi$.
Osserviamo ora che anche $\cos(x) = 0$ risulta soluzione dell'equazione di partenza, per cui sono soluzioni tutti gli archi seguenti:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi.$$

La risoluzione dell'equazione di partenza è quindi data dalle due soluzioni

$$x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{2}{3}\,\pi + k\,\pi.$$

□

Esempio: Risolvere l'equazione

$$2\sin^2(x) + 1 = 4\sin(x)\cos(x).$$

Soluzione: Questa è omogenea di secondo grado, atteso che, per l'identità fondamentale della goniometria $1 = \sin^2(x)+\cos^2(x)$. Pertanto abbiamo

$$2\sin^2(x) + \sin^2(x) + \cos^2(x) - 4\sin(x)\cos(x) = 0$$

ovvero

$$3\sin^2(x) - 4\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) = 0.$$

Sicuramente la soluzione non contempla il caso $\cos(x) = 0$ [35] per cui dividiamo ogni addendo per $\cos^2(x)$ ottenendo la seguente equazione di secondo grado in $\tan(x)$:

$$3\tan^2(x) - 4\tan(x) + 1 = 0.$$

Questa la risolviamo con la formula risolutiva (ridotta) delle equazioni di secondo grado:

$$\tan(x)_{1,2} = \frac{2 \mp \sqrt{4-3}}{3} = \frac{2 \mp 1}{3},$$

da cui deduciamo le seguenti due equazioni elementari:

$$\tan(x) = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \tan(x) = 1.$$

Notiamo che un valore dell'arco per il quale la tangente vale $\frac{1}{3}$ ci deve essere: infatti tutti i possibili valori per la tangente, vengono presi infinite volte, su tutto l'asse reale [36]. In questo caso diciamo che:

$$x = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + k\,\pi,$$

[35] Perché?

[36] Tranne per $x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ per i quali la tangente non è definita.

mentre l'altra equazione dà, come soluzione,

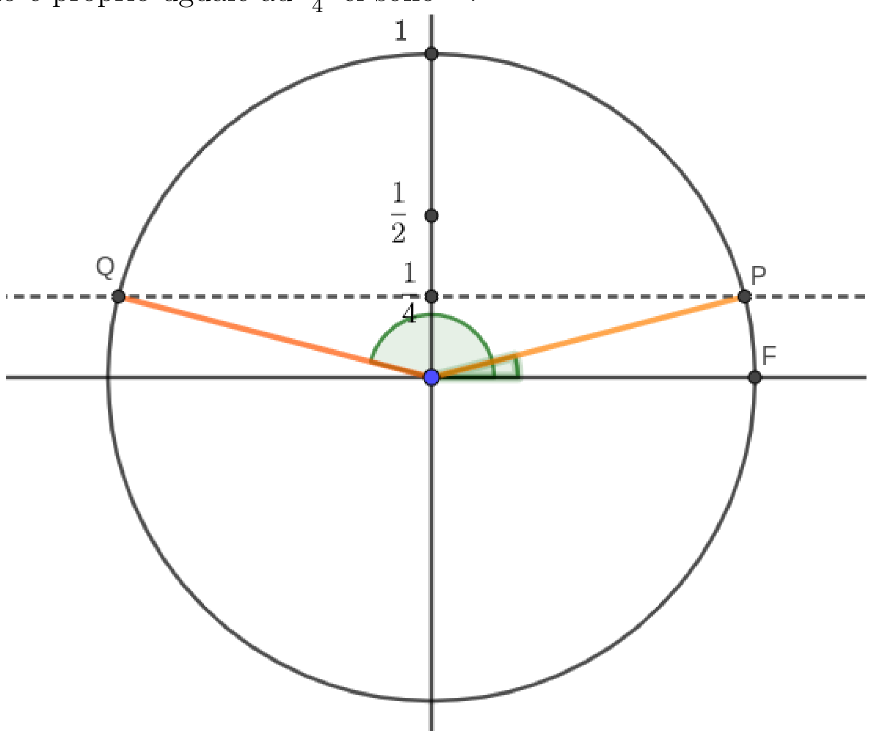
$$x = \frac{\pi}{4} + k\,\pi.$$

□

9.1. Le funzioni goniometriche inverse. Come è capitato con l'ultimo esercizio, può succedere -e accade di frequente- che i valori delle funzioni goniometriche, per i quali si devono calcolare gli angoli a cui sono associati, non si ritrovano nella tabella sinottica scritta in questo capitolo. In questi casi si lascia indicato quale deve essere, dicendo che è quel valore dell'arco per il quale quella data funzione goniometrica assume il dato valore.

Esempio: Trovare i valori di x per i quali $\sin(x) = \frac{1}{4}$.

Soluzione: Il valore $\frac{1}{4}$ non è presente in tabella e quindi non è tra gli archi noti, ma essendo tra -1 ed 1, due valori di x per i quali il seno è proprio uguale ad $\frac{1}{4}$ ci sono [37].



I due angoli indicati sono quelli richiesti, ma non hanno una rappresentazione facile, né in gradi, né in radianti, per cui si suole indicare il

[37] A meno di giri completi sulla circonferenza goniometrica.

primo [38] con

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$$

e le due soluzioni si scrivono come

$$x = \alpha + 2k\,\pi \quad \text{o} \quad x = \pi - \alpha + 2k\,\pi$$

intendendo con questo che il valore α rappresenta **l'arco sotto cui si legge il seno di valore** $\frac{1}{4}$.

□

Per ogni funzione goniometrica si può utilizzare questa strategia: se il valore non è noto, si lascia indicato che l'angolo è quello sotto cui si legge quel dato valore; per cui sussistono le scritture [39]

$$\arcsin(x),\ \arccos(x)\ \text{e}\ \arctan(x).$$

Queste tre scritture sono anche viste come le **funzioni inverse** delle rispettive funzioni seno, coseno e tangente. C'è da dire che l'invertibilità di queste ultime tre funzioni è possibile da attuare solo in un intervallo di periodicità: infatti una legge associativa, affinché rappresenti una funzione, deve essere univoca, mentre la periodicità delle funzioni goniometriche farebbero corrispondere ad un unico valore dato nel loro codominio, un'infinità di valori del dominio [40]. Sulle funzioni inverse torneremo quando parleremo più diffusamente, dedicando diversi capitoli, dello studio di funzione: per ora basti sapere ciò.

10. Equazioni goniometriche lineari

Le equazioni lineari sono quelle per le quali le funzioni goniometriche compaiono con massimo grado pari ad uno. In ultima analisi sono tutte quelle riconducibili alla forma

$$\boxed{a\cos(x) + b\sin(x) = c},$$

con a, b e c numeri reali. Se $c = 0$ l'equazione risulta anche omogenea di primo grado, per cui si può risolvere con lo stratagemma indicato nella precedente sezione, di dividere tutti gli addendi per una stessa funzione che compare nell'equazione: dividendo per $\cos(x)$ l'equazione che si ottiene è elementare del tipo $\tan(x) =$ "numero", se si divide per $\sin(x)$ si ottiene un'equazione del tipo $\cot(x) =$ "numero".

[38] Per intenderci: **il più piccolo** dei due

[39] Per la cotangente si prendono le frazioni reciproche, che la riportano alla scrittura della tangente e lo stesso vale per la secante e la cosecante, rispettivamente da riportare al coseno ed al seno.

[40] E quindi, un'associazione dal codominio al dominio, che restituisca l'angolo da cui proviene il dato valore, non sarebbe una funzione!

Diciamo che il caso più interessante è quando tutt'e tre i coefficienti sono diversi da zero. *Si può effettuare la risoluzione delle equazioni goniometriche elementari in almeno tre modi diversi!* Un primo modo consiste nell'aggiungere all'equazione stessa l'identità fondamentale della goniometria e pensare alla sostituzione:

$$\begin{cases} \cos(x) & \mapsto X \\ \sin(x) & \mapsto Y \end{cases}$$

per ricavare un sistema corrispondente all'intersezione di una retta con una circonferenza goniometrica, del tipo:

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 & = 1 \\ a\,X + b\,Y & = c \end{cases}$$

la cui soluzione fornisce i valori che devono assumere il coseno o il seno affinché risolvano l'equazione goniometrica iniziale e quindi, in fin dei conti, conduce alla soluzione di qualche tipo di equazione goniometrica elementare [41]. Un secondo modo è utilizzare le **formule parametriche,** che trasformano il problema goniometrico in un problema algebrico. Queste formule sono delle trasformazioni, che esprimono il seno ed il coseno di un angolo, tramite la funzione tangente. Di questo parleremo a breve, dato che le formule parametriche sono interessanti di per sé e saranno utilizzate anche più in avanti nel corso degli studi. Il terzo modo è piuttosto ingegnoso e lo descriviamo subito. Si osserva innanzitutto che una scrittura del tipo:

$$a\,\cos(\omega\,x) + b\,\sin(\omega\,x)$$

si può scrivere utilizzando unicamente una funzione seno. Infatti, moltiplicando questa espressione per un fattore A opportuno, che vogliamo determinare, essa assume la forma:

$$A\,b\,\sin(\omega\,x) + A\,a\,\cos(\omega\,x)$$

e questa ricorda la formula di addizione degli archi per il seno:

$$\sin(\omega\,x + \phi) = \sin(\omega\,x)\cos(\phi) + \cos(\omega\,x)\sin(\phi).$$

Per confronto si deve porre allora

$$A\,b = \cos(\phi) \quad \wedge \quad A\,a = \sin(\phi),$$

[41] Addirittura ci si può anche accontentare di determinare "graficamente" la soluzione di questo sistema che corrisponde, d'altra parte, alla soluzione dell'equazione goniometrica lineare iniziale.

se ora sommiamo i quadrati di queste ultime due espressioni otteniamo:

$$(A\,b)^2 + (A\,a)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A^2 = \frac{1}{a^2 + b^2}$$

e quindi, ponendo:

$$A = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad b = \frac{\cos(\phi)}{A} \quad \wedge \quad a = \frac{\sin(\phi)}{A}$$

possiamo scrivere:

$$A\,b\,\sin(\omega\,x) + A\,a\,\cos(\omega\,x) = \sin(\omega\,x + \phi).$$

Ora possiamo ritornare al problema della risoluzione dell'equazione lineare:

$$a\,\cos(x) + b\,\sin(x) = c$$

che si può scrivere come:

$$A\,a\,\cos(x) + A\,b\,\sin(x) = A\,c$$

e quindi, ponendo $\omega = 1$:

$$\sin(x + \phi) = A \cdot c, \quad \text{con} \quad A = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

riducendo -di fatto- l'equazione lineare ad una equazione elementare in modo istantaneo [42].

10.1. Formule parametriche. Per dedurre le formule parametriche, partiamo dalla formula di duplicazione per il seno:

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

possiamo immaginare che al secondo membro sia scritta una frazione con denominatore unitario ma, dato che l'unità è data dalla somma dei quadrati del seno e del coseno, possiamo ancora scrivere:

$$\sin(2x) = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x) + \cos^2(x)}.$$

Mettiamo in evidenza il $\cos^2(x)$ al denominatore ed effettuiamo successivamente la divisione con il numeratore [43]:

$$\sin(2x) = \frac{2\,\sin(x)\,\cancel{\cos(x)}}{\cos^{\cancel{2}}(x) \cdot \left(\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + 1\right)} = \frac{2\tan(x)}{\tan^2(x) + 1}.$$

[42] L'angolo ϕ detto **angolo aggiunto,** lo si può calcolare da una delle due relazioni date prima: $\cos(\phi) = A \cdot b$ oppure $\sin(\phi) = A \cdot a$.

[43] Supposto $\cos(x) \neq 0$.

Passando $2x \mapsto x$ si ottiene anche:

$$\sin(x) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1}.$$

In genere si pone $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$ da cui:

$$\boxed{\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}}$$

e questa nel riquadro viene indicata come **formula parametrica per il seno.** Per ricavare la formula parametrica per il coseno si procede in modo analogo, partendo dalla formula di duplicazione del coseno. Si invita il lettore a svolgere tutti i passaggi per arrivare alla seguente conclusione:

$$\boxed{\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}}.$$

Noi ci arriviamo ora per un'altra via: utilizzando l'identità fondamentale si può scrivere:

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$$

da cui, sostituendo la formula parametrica già trovata per il seno:

$$\cos^2(x) = 1 - \frac{4t}{(1+t^2)^2} = \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}$$

ed estraendo la radice quadrata:

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

□

Esempio: Risolvere la seguente equazione lineare:

$$\sqrt{3}\,\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{3}.$$

Soluzione: Utilizziamo tutt'e tre i modi.

- $\boxed{Primo\,Modo:}$ Mettiamo a sistema con la circonferenza goniometrica e risolviamo il sistema corrispondente all'intersezione tra la retta (rappresentata dall'equazione goniometrica) e la circonferenza (rappresentata dall'identità fondamentale della goniometria).

$$\begin{cases} \sqrt{3}\,Y + X &= \sqrt{3} \\ X^2 + Y^2 &= 1 \end{cases}$$

Dalla prima ricaviamo $X = \sqrt{3} - \sqrt{3}\,Y$ e sostituendo nell'equazione della circonferenza:

$$\left(\sqrt{3} \cdot (1 - Y)\right)^2 + Y^2 = 1.$$

Quindi deduciamo l'equazione:

$$4\,Y^2 - 6\,Y + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,Y^2 - 3\,Y + 1 = 0.$$

Questa ha soluzione:

$$Y_{1,2} = \frac{3 \mp 1}{4}.$$

Ricordiamoci ora che Y rappresenta la funzione $\sin(x)$, per cui ricaviamo le due equazioni goniometriche elementari:

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad \sin(x) = 1.$$

La prima equazione l'abbiamo già discussa in un esempio precedente [44] ed ha soluzione:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\,\pi, \quad \text{o} \quad \cancel{x = \frac{5}{6}\pi + 2k\,\pi}.$$

Ora, la soluzione [45] $\frac{5}{6}\,\pi + 2k\,\pi$ va scartata poiché se sostituita nell'equazione iniziale dà:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

che è evidentemente una scrittura sbagliata. La seconda ha soluzione immediata:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi.$$

Pertanto le uniche due soluzioni [46] sono:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\,\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{\pi}{2} + \,k\,\pi.$$

- $\boxed{\textit{Secondo Modo}:}$ Utilizziamo le formule parametriche. L'equazione si riscrive in quest'altro modo:

$$\sqrt{3} \cdot \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = \sqrt{3}$$

[44] E comunque la dovremmo già saper risolvere!

[45] Sempre controllare che le soluzioni che si trovano per via formale poi siano effettivamente accettabili!

[46] Infinità di soluzioni accettabili.

che, moltiplicando tutto per il denominatore comune e portando al primo membro, diventa:

$$2\sqrt{3}\,t + 1 - t^2 - \sqrt{3} - \sqrt{3}\,t^2 = 0.$$

Riscrivendo in ordine l'equazione di secondo grado da risolvere è:

$$(1+\sqrt{3})\,t^2 - 2\sqrt{3}\,t - 1 + \sqrt{3} = 0.$$

La risolviamo con la formula ridotta

$$t_{1,2} = \frac{\sqrt{3} \mp \sqrt{3-(3-1)}}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \mp 1}{\sqrt{3}+1}.$$

Ora ricordiamo che il parametro t è un'etichetta per la $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, per cui deduciamo le seguenti due equazioni di tipo elementare:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \quad \text{o} \quad \tan\left(\frac{x}{2}\right) = 1.$$

La prima, dopo aver razionalizzato il denominatore, diventa:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \tan\left(\frac{x}{2}\right) = 2-\sqrt{3}.$$

Il lettore può verificare, utilizzando le formule di bisezione che questo valore per la tangente è assunto a 15 ovvero a $\frac{\pi}{12}$ radianti. Per cui, la prima soluzione è:

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{12} + k\,\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\,\pi.$$

La seconda ha soluzione immediata $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\,\pi$ da cui

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi$$

come già trovato precedentemente.

- $\boxed{Terzo\,Modo:}$ Risolviamo l'equazione goniometrica elementare che ricaveremo successivamente con i parametri giusti:

$$\sin(x+\phi) = A \cdot c$$

dove $A = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e ϕ è tale che $\cos(\phi) = A \cdot b$. Nel nostro caso $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ e $c = \sqrt{3}$. Pertanto si ha $A = \frac{1}{2}$ e $A \cdot b = \frac{\sqrt{3}}{2}$. A questo punto, da $\cos(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ricaviamo $\phi = \frac{\pi}{6}$ e possiamo riscrivere finalmente l'equazione da risolvere come:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Questa si risolve tramite la nostra solita circonferenza goniometrica [47] ricavando i due "valori base" da cui originano le infinità di soluzioni. La prima equazione da risolvere è quindi:

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\,\pi$$

da cui

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\,\pi.$$

La seconda equazione è data da:

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi + 2k\,\pi$$

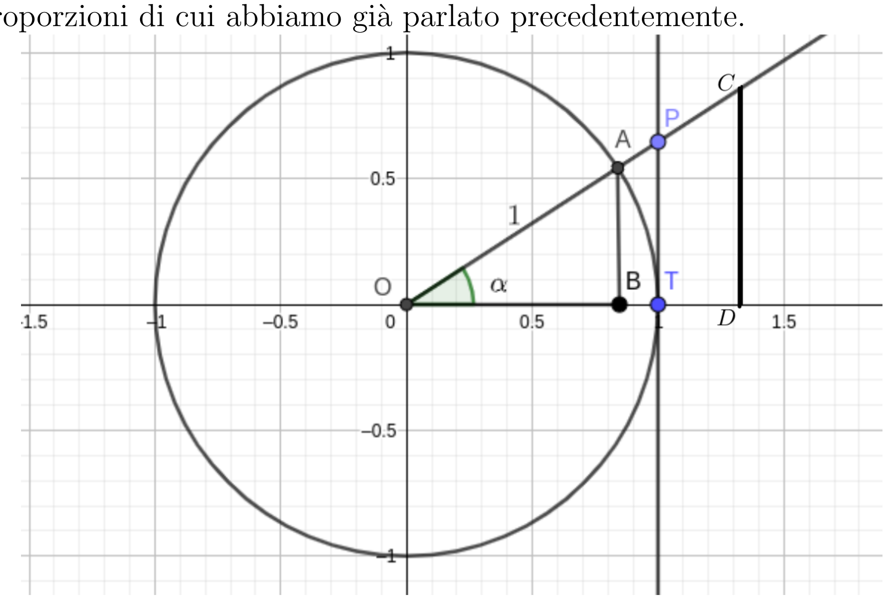
da cui si ricava:

$$x = \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{6}_{2}}\pi + 2k\,\pi.$$

11. Trigonometria: la goniometria applicata ai triangoli

Avendo introdotto "abbastanza tecniche" per gestire con disinvoltura quantità e funzioni relative agli angoli, è giunta l'ora di vedere un bel po' di utili e fondamentali conseguenze, che giustificano ampiamente la fatica di aver studiato e di studiare questo capitolo della Matematica.

11.1. Risoluzione dei triangoli rettangoli. Per iniziare, riprendiamo una figura già introdotta ad inizio capitolo e consideriamo delle proporzioni di cui abbiamo già parlato precedentemente.



[47] Si invita a farlo su un foglietto per convincersene.

Di questa figura avevamo già discusso quando abbiamo parlato, per la prima volta, della tangente. Inoltre avevamo anche detto che i triangoli $\overline{PTO}$ e $\overline{ABO}$ sono simili. Abbiamo solo aggiunto un altro segmento parallelo ad AB per individuare un triangolo rettangolo qualsiasi $\overline{CDO}$, che comunque risulta sempre simile agli altri due. Per la similitudine dei triangoli testé menzionata, scriveremo le seguenti proporzioni:

$$\overline{OB} : \overline{OA} = \overline{OD} : \overline{OC},$$

$$\overline{AB} : \overline{OA} = \overline{CD} : \overline{OC}$$

ed infine,

$$\overline{OB} : \overline{AB} = \overline{OD} : \overline{CD}.$$

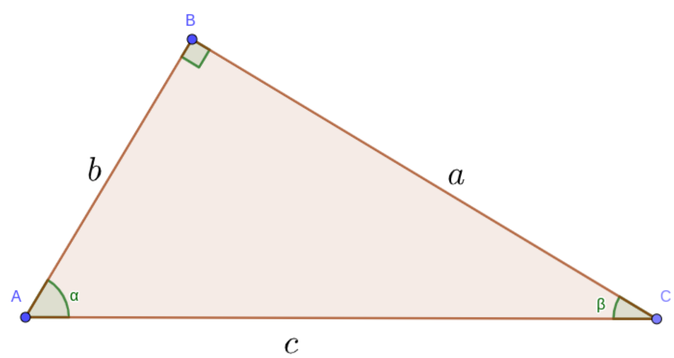
Passando ora alle misure di questi segmenti otteniamo il seguente gruppo di relazioni, che costituiscono la cosiddetta **risoluzione dei triangoli rettangoli:**

$$\cos(\alpha) : 1 = \mu(\overline{OD}) : \mu(\overline{CD}) \quad \Rightarrow \quad \mu(\overline{OD}) = \mu(\overline{OC}) \cdot \cos(\alpha).$$

$$\sin(\alpha) : 1 = \mu(\overline{CD}) : \mu(\overline{OC}) \quad \Rightarrow \quad \mu(\overline{CD}) = \mu(\overline{OC}) \cdot \sin(\alpha).$$

$$\cos(\alpha) : \sin(\alpha) = \mu(\overline{OD}) : \mu(\overline{CD}) \quad \Rightarrow \quad \mu(\overline{CD}) = \mu(\overline{OD}) \cdot \tan(\alpha).$$

Riscriviamo meglio queste formule in modo più amichevole: consideriamo all'uopo un solo il triangolo rettangolo $\overline{ABC}$ con le quantità indicate in figura.



Riportando le tre relazioni su questo triangoli si ottiene:

$$a = c \cdot \sin(\alpha), \quad b = c \cdot \sin(\beta), \quad a = b \cdot \tan(\alpha)$$

oppure ancora

$$a = c \cdot \cos(\beta), \quad b = c \cdot \cos(\alpha), \quad a = b \cdot \cot(\beta).$$

Detto a parole: *"Un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto od il coseno dell'angolo adiacente, oppure ancora all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto o la cotangente di quello adiacente."* C'è da osservare che il *Teorema di Pitagora* fornisce una relazione tra i tre lati del triangolo, mentre quelli di *Euclide* tra i lati del triangolo e l'altezza relativa all'ipotenusa o le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa. Finora non avevamo modo di risalire alla lunghezza dei lati, conoscendone un altro ed un angolo [48]

Esempio: Si voglia determinare il perimetro di un triangolo rettangolo in cui un cateto misura 10 unità ed il suo angolo opposto 15.

Soluzione: Sapendo che un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto, possiamo determinare l'ipotenusa stessa dividendo la lunghezza di quel cateto per il seno dell'angolo opposto, per cui, chiamando a, b e c rispettivamente di due cateti (il primo dei quali è noto) e l'ipotenusa, possiamo scrivere

$$c = \frac{a}{\sin(\alpha)}.$$

Sapendo che $\cos(30^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, utilizzando la formula di bisezione si ottiene il valore del seno per i 15 [49]:

$$\sin(15^o) = \sqrt{\frac{1-\cos(30)}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Quindi:

$$c = \frac{20}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = 20\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Ora si può procedere applicando il Teorema di Pitagora, oppure utilizzando l'altra formula di risoluzione dei triangoli rettangoli: un cateto è uguale all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente. Evidentemente, se l'angolo di 15^o era l'opposto al cateto a, allora sarà l'adiacente al cateto b. Il coseno di 15^o lo possiamo ricavare o tramite l'identità fondamentale, oppure applicando la formula di bisezione, o ancora utilizzando la formula di sottrazione degli archi $60-45$. Scegliamo, giusto per variare, l'identità goniometrica:

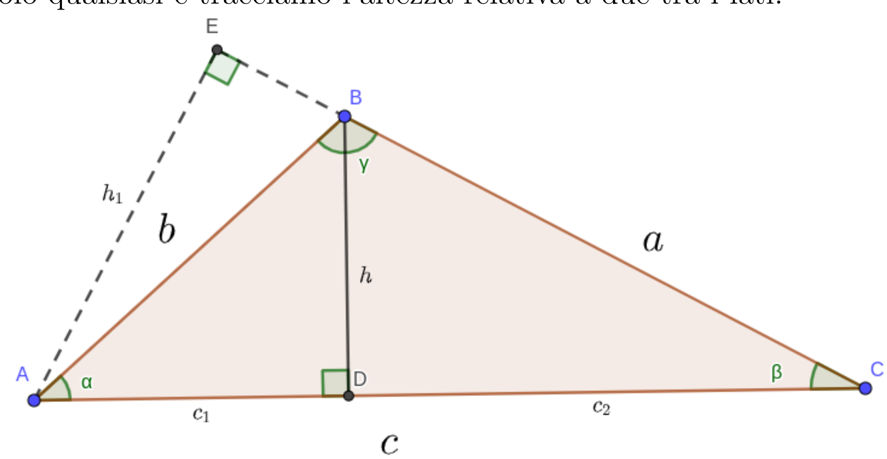
$$cos^2(15^o) = 1 - \sin^2(15^o) = 1 - \left(\frac{1}{4}\cdot(2-\sqrt{3})\right)$$

[48] Tranne per i due casi molto particolari dei triangoli con gli angoli acuti "45-45" o "30-60".

[49] Oppure si può utilizzare la formula di sottrazione, dato che $15 = 60 - 45$ e gli ultimi due sono archi noti.

da cui
$$\cos(15^o) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$
Deduciamo quindi che
$$a = c \cdot \cos(15^o) = 20\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = 10\,(2+\sqrt{3}).$$
A questo punto il perimetro è pari alla somma dei tre lati:
$$a+b+c = 10+10\,(2+\sqrt{3})+20\sqrt{2+\sqrt{3}} = 30+10\sqrt{3}+20\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$
□

11.2. Risoluzione dei triangoli qualsiasi. Consideriamo ora un triangolo qualsiasi e tracciamo l'altezza relativa a due tra i lati.



Applicando la risoluzione dei triangoli rettangoli ai due triangoli rettangoli cui rimase ripartito il triangolo di partenza, una volta tracciata l'altezza, si ricava:
$$\overline{BD} = b \cdot \sin(\alpha)$$
e, altresì,
$$\overline{BD} = a \cdot \sin(\beta).$$
Uguagliando i due membri, per transitività, si ha la notevole relazione:
$$b \cdot \sin(\alpha) \;=\; a \cdot \sin(\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}}.$$
D'altra parte è anche:
$$\overline{AE} = c \cdot \sin(\beta) = b \cdot \sin(\pi-\gamma)$$
ovvero:
$$c \cdot \sin(\beta) = b \cdot \sin(\gamma) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}}.$$

Abbiamo appena dimostrato il seguente importantissimo

TEOREMA 3 (Teorema dei seni). *In un triangolo qualsiasi il rapporto tra un lato ed il seno dell'angolo opposto è costante.*

□

Continuando ancora a ragionare sul triangolo disegnato, applicando il Teorema di Pitagora al triangolo $\overline{ADB}$ possiamo scrivere $b^2 = c_1^2 + h^2$, ma $c_1 = c - c_2$, $h = a \cdot \sin(\beta)$ ed inoltre $c_2 = a \cdot \cos(\beta)$. Sostituendo nell'espressione del teorema pitagorico, otteniamo:

$$b^2 = (c - a \cdot \cos(\beta))^2 + (a \cdot \sin(\beta))^2$$

e, sviluppando i calcoli,

$$b^2 = c^2 - 2a\,c\,\cos(\beta) + a^2\cos^2(\beta) + a^2\sin^2(\beta)$$

ovvero, ricordando l'identità fondamentale della goniometria,

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos(\widehat{ac})}.$$

Permutando le lettere si possono ricavare altre due uguaglianze del genere che, a ben guardare, esprimono una generalizzazione del Teorema di Pitagora: infatti se $a \perp c$ allora $\cos(\widehat{ac}) = 0$ e l'espressione ottenuta è esattamente il Teorema di Pitagora con b ipotenusa ed a, c cateti. Possiamo enunciare il seguente teorema, che esprime "a parole" quello che abbiamo dedotto con le formule

TEOREMA 4 (Teorema di Carnot). [50] *Il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due diminuita del doppio prodotto dei lati moltiplicato il coseno dell'angolo che essi formano.*

□

Osservazione: Questo teorema permette di calcolare la lunghezza della somma di due vettori qualsiasi anche se essi non sono applicati nell'origine del sistema di coordinate: la cosa notevole è che non c'è nemmeno bisogno di conoscere le componenti dei vettori da sommare, ma solo la loro lunghezza e l'angolo che essi formano!

In ultimo, consideriamo che l'altezza h del triangolo di prima, con le "etichette" date in figura, è data da $b \cdot \sin(\alpha)$ ovvero anche da $a \cdot \sin(\beta)$. L'area di un triangolo è, notoriamente, il semi-prodotto della

[50] È conosciuto anche con il nome di **Teorema del coseno,** in contrapposizione a quello precedente dei seni.

base per l'altezza, per cui possiamo scrivere, se S indica l'area del triangolo,

$$S = \frac{1}{2}\, c \cdot b \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2}\, b\, c\, \sin(\widehat{b\, c})$$

ma anche, con ragionamento analogo

$$S = \frac{1}{2}\, a\, c\, \sin(\widehat{a\, c}).$$

Si può verificare che una relazione del genere continua a sussistere per tutti i lati, considerati, di volta in volta, come le basi del triangolo e le relative altezze: abbia dimostrato, in altre parole, il seguente teorema:

PROPOSIZIONE 4. *L'area di un triangolo è il semi-prodotto di due lati per il seno dell'angolo che essi formano.*

□

12. Applicazioni

Avendo sviluppato tanti argomenti, ora li sfruttiamo per risolvere un bel po' di problemi. Iniziamo con l'argomentazione di Eratostene per calcolare il raggio della sfera terrestre. Egli sapeva che a Syene [51], a mezzogiorno del solstizio d'estate, il Sole si trova proprio sullo zenit: la luce entra dritta in un pozzo profondo e ne illumina il fondo e, ad ulteriore conferma, un bastone piantato a terra non proietta alcuna ombra. Invece ad Alessandria d'Egitto, città in cui operava come direttore della biblioteca, qualsiasi monumento, albero, persona o palo conficcato nel terreno un'ombra la proiettava sempre. Allora, supponendo che la terra fosse perfettamente sferica [52], che il sole fosse abbastanza lontano da far arrivare i propri raggi luminosi paralleli tra di loro e supponendo che Syene ed Alessandria stessero sullo stesso meridiano, misurò l'angolo di elevazione del Sole ad Alessandria durante il solstizio d'estate, determinando la lunghezza dell'ombra proiettata da un bastone piantato in terra e ricavando approssimativamente un valore di $\frac{1}{50}$ dell'angolo giro [53] Sapendo che l'andatura dei cammelli è costante, calcolò la distanza tra le città di Syene ed Alessandria, basandosi sui movimenti delle carovane, riuscendo a stimare una distanza di circa 5.000 "stadia", ovvero circa 800 km. Da questi due fatti dedusse che la circonferenza della Terra doveva essere di circa $50 \cdot 5000 = 250.000$ stadia, ovvero

[51] Che attualmente è identificata con la città di Assuan

[52] Cosa che nella cultura greca era un dato di fatto più che assodato e per lo più scontato!

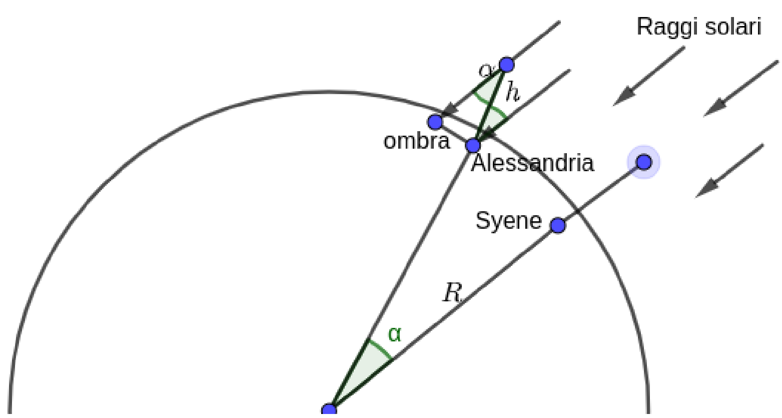
[53] Circa $7^o\, 12'$.

circa 40.000 km, [54]. Per trovare il raggio, utilizzò l'approssimazione $\pi \approx \frac{22}{7}$, nota fin dall'antichità e quindi trovò che il raggio è di circa:

$$r_{\text{Terra}} = \frac{40000}{2} \cdot \frac{7}{22} \approx 6363\,\text{km}.$$

Ma come ha fatto a stimare l'elevazione del sole a partire dall'ombra proiettata da un palo conficcato nel terreno? Fece una considerazione semplice: si osserva che, come nella figura seguente, l'angolo di elevazione del sole è l'angolo α che corrisponde anche all'angolo al centro corrispondente all'arco, sulla sfera terrestre, tra le due città. Inoltre, se h indica l'altezza del palo conficcato nel terreno, allora l'ombra ha una lunghezza $l = h \cdot \tan(\alpha)$, per cui

$$\alpha = \arctan\left(\frac{l}{h}\right).$$



Chiamata $d = d(\text{Alessandria}, \text{Syene})$ la distanza tra le due città, dalla proporzione

$$d : 2\,\pi\,R = \alpha : 360^o \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{360^o \cdot d}{2\,\pi\,\alpha},$$

sostituendo i valori stimati da Eratostene, si ottiene [55]

$$R \approx \frac{\cancel{2\pi} \cdot 5000}{\cancel{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{50}} \approx 250000\,\text{stadia} \approx 6363\,\text{km}.$$

[54]Un valore straordinariamente vicino a quello ottenuto con metodi moderni che è di 40.075 km.

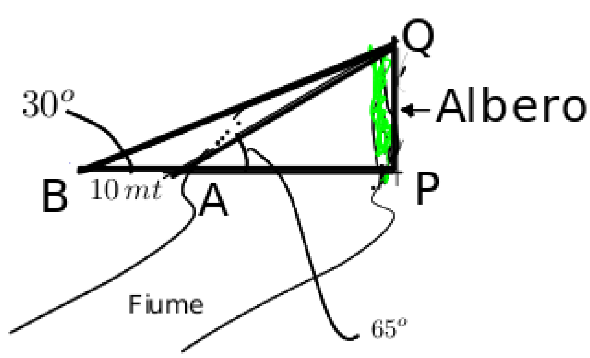
[55]In verità quanto misura uno *stadium* alessandrino non è dato di sapere per certo: si attribuisce ad Eratostene la stima del raggio pari a 6314.5 km, comunque sempre un'ottima approssimazione del raggio medio per come tutt'oggi viene indicato, con misurazioni più accurate e tecnologicamente avanzate, pari a circa 6373.04 km.

13. Misurazione di distanze... "a distanza"

Tra le applicazioni più interessanti della trigonometria è sicuramente la possibilità di misurare delle distanze senza doverle necessariamente percorrere e, soprattutto, anche se sono poste in punti inaccessibili! Nei prossimi esempi, daremo un po' di queste applicazioni [56]

Esempio: Una persona posta sulla riva di un fiume, vede sotto un angolo di 65 gradi un albero piantato sull'argine opposto e se si allontana di 10 metri, l'angolo si riduce a 30 gradi. Quanto è alto l'albero e quanto è largo il fiume, sapendo che la base dell'albero ed il punto di osservazione sono sullo stesso piano orizzontale?

Soluzione: Si tratta di risolvere dei triangoli, conoscendone un lato e degli angoli.



Il triangolo $\overline{ABQ}$ è risolvibile [57]: dato che $\hat{A}$ è esterno al triangolo e quello in $\hat{B}$ è interno non adiacente, allora l'angolo in $\hat{Q}$ deve essere di 35^o. Per il teorema dei seni [58] :

$$\frac{\overline{QA}}{\sin(30^o)} = \frac{\overline{BA}}{\sin(35^o)},$$

da cui

$$\mu(\overline{QA}) = \frac{10 \cdot \sin(30^o)}{\sin(35^o)} \approx 8,717.$$

[56]Soprattutto illustriamo il modo giusto di ragionare.

[57]Con ciò si intende che si possono trovare tutt'e sei le sue grandezza: le misure dei tre angoli e quelle dei tre lati.

[58]Ed utilizzando una calcolatrice "scientifica" per determinare un valore approssimato delle funzioni goniometriche in angoli non noti.

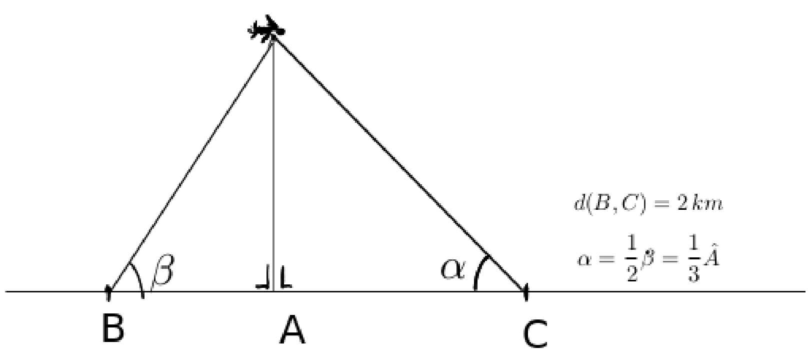
Ora si può applicare la risoluzione del triangolo rettangolo $\overline{APQ}$ per determinare sia l'altezza dell'albero, sia la larghezza del fiume.

$h = \mu(\overline{AQ})\cdot\sin(65^o) \approx 7,9\,\mathrm{mt}$ e $\mu(\overline{AP}) = \mu(\overline{AQ})\cdot\cos(65^o) \approx 3,684\,\mathrm{mt}.$

□

Esempio: Calcolare l'altezza di un aereo sapendo che esso si trova verticalmente sopra un punto A, che a terra si vedono altri due punti B e C allineati con A distanti tra loro 2 km e che l'elevazione angolare da C è la metà di quella da B ed un terzo di quella da A.

Soluzione: Dai dati si deduce che gli angoli di elevazione sono di 30^o e 60^o. Consideriamo la figura e risolviamo i triangoli.



L'angolo del triangolo in cui abbiamo posto l'aereo è retto, dato che gli altri due, in B e in C sono di 60 e 30 gradi rispettivamente. Possiamo trovare i cateti con la risoluzione dei triangoli rettangoli: essi sono [59] $\overline{BC}\cdot\sin(30^o) = 1$ e $\overline{BC}\cdot\sin(60^0) = \sqrt{3}$. In verità ne bastava trovare solo uno, comunque sia, utilizzando quello di lunghezza unitario, che è il cateto con un estremo in B e l'altro sull'aereo, si può risolvere l'altro triangolo rettangolo che considera la proiezione del cateto su $\overline{BC}$ e l'altezza dell'aereo come propri cateti: allora l'altezza dell'aereo risulta essere $1\cdot\sin(60^o) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 866$ metri. In generale, invece, se non si sa che il triangolo è rettangolo, ovvero se non si conoscono i rapporti tra gli angoli α, β e l'angolo retto in A si potrebbe procedere come segue. L'angolo tra le le direzioni che partono da B e C è $\pi-(\alpha+\beta)$. applicando il teorema dei seni si trova che la distanza dell'aereo dal punto B è data da

$$d = \frac{\overline{BC}\cdot\sin(\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

[59]Accettiamo anche per il seguito, onde non appesantire l'abuso di notazione, per il quale la misura $\mu(\overline{BC})$ è indicata con lo stesso segmento $\overline{BC}$.

Applicando la risoluzione dei triangoli rettangoli al "triangolo di sinistra" si ottiene

$$\text{Altezza aereo} = h \ = d \cdot \sin(\beta) \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\overline{BC} \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

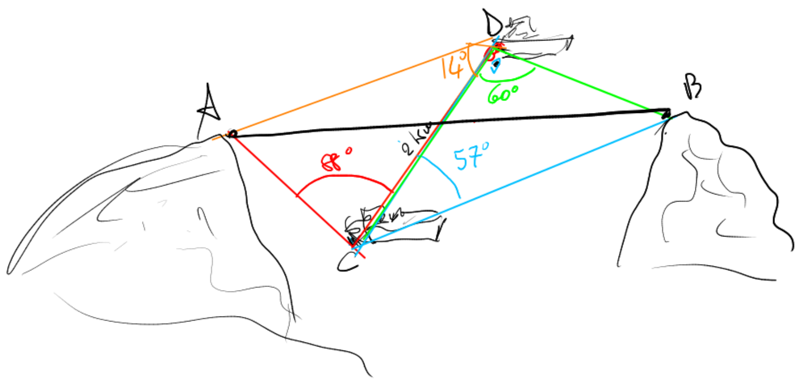
Ad esempio, se gli angoli di elevazione fossero stati $\alpha = 63^o$ e $\beta = 71^0$ allora avremmo determinato una altezza di

$$\frac{2 \cdot \sin(63) \cdot \sin(71)}{\sin(134)} \approx 2,342\,\text{km}.$$

□

Esempio: Calcola la distanza tra due promontori A e B sapendo che da due navi C e D distanti tra loro 2 chilometri, sono fatte le seguenti misurazioni: $A\hat{C}D = 88$ gradi; $B\hat{C}D = 57$ gradi, $B\hat{D}C = 60$ gradi e $C\hat{D}A = 14$ gradi.

Soluzione: Rappresentiamo la situazione su uno schemino, come nella seguente figura.



Possiamo risolvere separatamente i due triangoli $\overline{ACD}$ e $\overline{BCD}$ e, successivamente, conoscendo due lati e l'angolo compreso, con il teorema di Carnot determinare la distanza richiesta. Innanzitutto ricaviamo i due angoli $\hat{A} = (180 - 88 - 14)^o = 78^o$ e $\hat{B} = (180 - 57 - 60)^o = 63^o$. Poi applichiamo il teorema dei seni nel primo triangolo menzionato, trovando:

$$\frac{\overline{CD}}{\sin(\hat{A})} = \frac{\overline{AC}}{\sin(\hat{D})}$$

ovvero:

$$\overline{AC} = \frac{2 \cdot \sin(14)}{\sin(78)} \approx 0,495\,\text{km}$$

e, per il secondo triangolo,

$$\frac{\overline{CD}}{\sin(\hat{B})} = \frac{\overline{BC}}{\sin(\hat{D})}$$

ovvero:

$$\overline{BC} = \frac{2 \cdot \sin(60)}{\sin(63)} \approx 1,944\,\text{km}.$$

Applichiamo ora il teorema di Carnot sul triangolo $\overline{ABC}$, ottenendo:

$$\overline{AB}^{\,2} = \overline{AC}^{\,2} + \overline{BC}^{\,2} - 2\,\overline{AC}\,\overline{BC}\,\cos(\widehat{ACB})$$

ovvero:

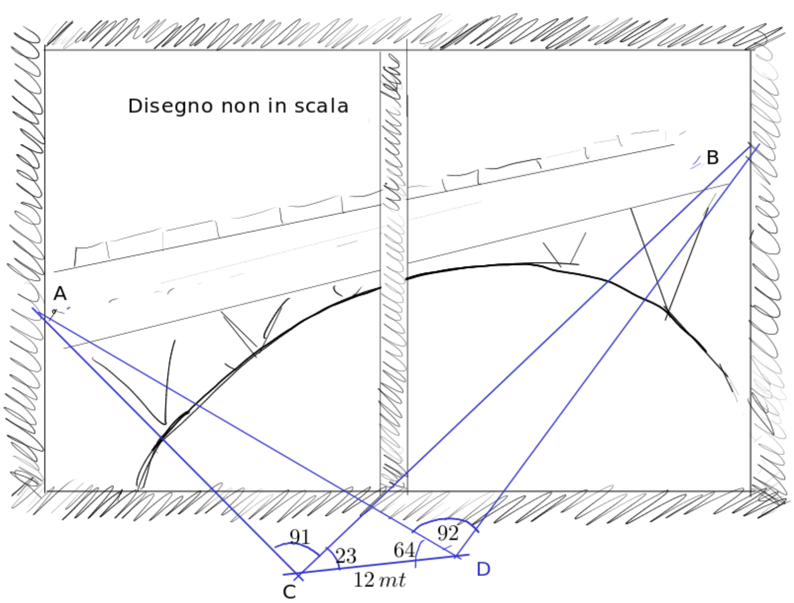
$$\overline{AB}^{\,2} = (0,495)^2 + (1,944)^2 - 2 \cdot 0,495 \cdot 1,944\,\cos(145)$$

e quindi:

$$\overline{AB}^{\,2} \approx 5,6 \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} \approx \sqrt{5,6} \approx 2,367\,\text{km}.$$

□

Esempio: Vogliamo calcolare la misura del ponte che si vede dalla finestra dell'aula di scuola. A tale fine ci poniamo in due punti sufficientemente distanti all'interno dell'aula, da cui si possa vedere bene il ponte e misuriamo gli angoli, per come indicati nella figura. Sapendo quanto sono distanti i punti di osservazione, "diciamo" 12 mt, queste informazioni ci permettono di dedurre la misura della lunghezza, approssimativa, quel ponte!



Soluzione: Nel triangolo $\overline{ACD}$ applichiamo il teorema dei seni per determinare la lunghezza:

$$\overline{AD} = \frac{\overline{CD} \cdot \sin(91+23)}{\sin(180-(91+23+64))} = \frac{12 \cdot \sin(114)}{\sin(2)} \approx 314,117\,\text{mt.}$$

Applicando sempre il teorema dei seni al triangolo $\overline{ABD}$ determiniamo la lunghezza:

$$\overline{BD} = \frac{\overline{CD} \cdot \sin(23)}{\sin(180-(23+64+92))} = \frac{12 \cdot \sin(23)}{\sin(1)} \approx 268,660\,\text{mt.}$$

Infine, applicando il teorema di Carnot, ricaviamo la lunghezza del ponte:

$$\overline{AB}^{\,2} = \overline{AD}^{\,2} + \overline{BD}^{\,2} - 2\,\overline{AD}\,\overline{BD}\,\cos(\widehat{\overline{AD},\overline{BD}})$$

e quindi:

$$\overline{AB}^{\,2} = (314,117)^2 + (268,660)^2 - 2 \cdot 314,117 \cdot 268,660 \cdot \cos(92) \approx 176738,069$$

da cui:

$$\text{Lunghezza}\quad\text{ponte} \approx \sqrt{176738,069} \approx 420,4\,\text{mt.}$$

□

14. Utilità in Fisica e per effettuare Rotazioni

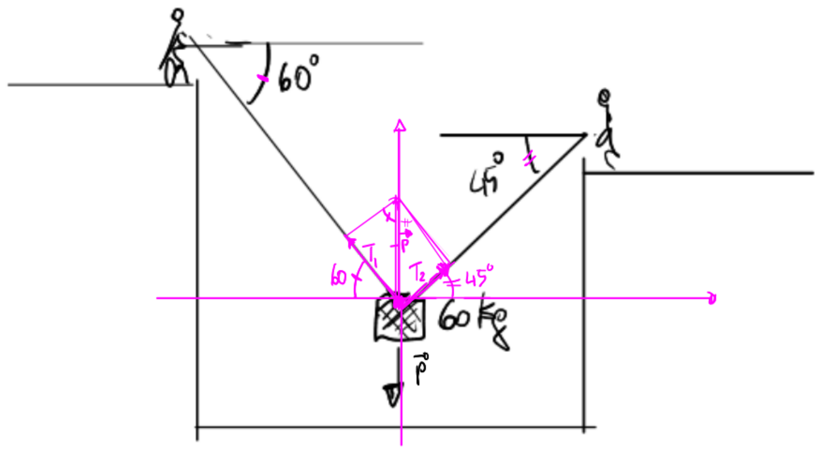
Molto importanti sono le applicazioni della trigonometria alla Fisica, dovendo -di necessità- decomporre le forze agenti sui corpi secondo date direzioni oppure per la propagazione dei segnali luminosi, impulsi elettromagnetici, onde radio ecc... ovunque ci sia un fenomeno "periodico" entrano in gioco le funzioni goniometriche! Ad esempio l'oscillazione di un pendolo, la posizione dell'estremo di una molla che sia libero di muoversi, la conduzione di una corrente elettrica alternata, vedremo -quando introdurremo la modellistica differenziale- che sono tutti fenomeni descritti da "onde sinusoidali". Nel seguito proponiamo un paio di esempi di utilizzo della trigonometria nella descrizione di fenomeni fisici o tecnici, rimandando a studi ulteriori l'approfondito sull'argomento. Dopodiché concluderemo il capitolo, parlando dell'ultima trasformazione euclidea [60] che manca per completare il discorso delle trasformazioni elementari del piano: le rotazioni.

Esempio: Due operai abbassano con due funi un carico di 60 kg, tenendolo sospeso con angoli di depressione rispettivamente di 60^o e

[60] Si chiamano **trasformazioni euclidee** le corrispondenze biunivoche tra figure che conservino le distanze: esse sono le *traslazioni* le *simmetrie* o ribaltamenti rispetto a punti o rette e, evidentemente, le *rotazioni*.

45^o. Determinare l'intensità delle due forze esercitate dagli operai sulle funi, sapendo che la pietra è in equilibrio.

Soluzione: Qui di seguito una rappresentazione della situazione.



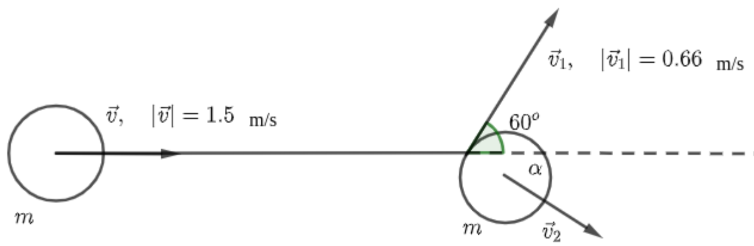
La forza applicata è, evidentemente, il peso del carico che si decompone lungo le direzioni date dalle due funi. Scegliamo un sistema di coordinate con l'origine nel baricentro del carico ed assi cartesiani paralleli alle pareti verticali ed ai pavimenti orizzontali. La forza peso deve essere controbilanciata, in caso di equilibrio, da una forza diretta verso l'alto di uguale intensità e stesso punto di applicazione. Questa forza viene ripartita sulle due funi in altrettanti forze che chiamiamo "di tensione" ed indichiamo con T_1 e T_2. Dalla risoluzione dei triangoli rettangoli si ha che $T_1 = |\vec{F}| \cdot \sin(60)$ e $T_2 = |\vec{F}| \cdot \sin(45)$. Per cui, senza scomodare Newton e misurando le forze in equivalente-peso, le due tensioni e quindi i pesi che dovranno sopportare i due operai, sono rispettivamente:

$$T_1 = 30\sqrt{3} \approx 51.96\,\text{kg e} \quad T_2 = 30\sqrt{2} \approx 42,43\,\text{kg}.$$

□

Esempio: Una palla da biliardo si muove con una velocità $\vec{v}$ di modulo 1.5 m/s e urta una seconda palla uguale ad essa, che si trova inizialmente ferma, rimbalzando (sul piano del biliardo) secondo una direzione che forma un angolo di 60^o lungo la direzione di incidenza e moderando la propria velocità a 0.66 m/s. La palla urtata che velocità acquista ed in quale direzione di muoverà?

Soluzione: Rappresentiamo graficamente le due palle da biliardo e le direzioni con cui si muovono prima e dopo l'urto. Nella figura seguente abbiamo indicato le due quantità incognite, che, trovate, forniscono le risposte alle domande poste, con $\vec{v}_2$ e α, essendo quest'ultimo l'angolo che il vettore velocità $\vec{v}_2$ della seconda pallina forma con la direzione lungo cui si muoveva la prima palla prima dell'urto. Dovrebbe essere risaputo che la *quantità di moto* è un invariante del fenomeno in esame [61]



Per il principio di conservazione della quantità di moto, allora, dovremmo scrivere

$$m\,\vec{v} = m\,\vec{v}_1 + m\,\vec{v}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Decomponiamo ora le due velocità lungo le direzioni date da un sistema cartesiano con asse delle ascisse sovrapposto alla direzione di $\vec{v}$ ed asse delle ordinate giacente nel piano su cui si muovono le palline [62]. Dunque l'equazione vettoriale si decompone nelle due seguenti:

$$|\vec{v}| = |\vec{v}_1| \cdot \cos(60^o) + |\vec{v}_2| \cdot \cos(\alpha)$$

e

$$0 = |\vec{v}_1| \cdot \sin(60^o) + |\vec{v}_2| \cdot \sin(\alpha)$$

rispettivamente lungo l'asse orizzontale e lungo l'asse verticale. Possiamo, da queste, ricavare il valore dell'angolo α :

$$|\vec{v}_2| \cdot \cos(\alpha) = |\vec{v}| - |\vec{v}_1| \cdot \cos(60^o)$$

$$|\vec{v}_2| \cdot \sin(\alpha) = -|\vec{v}_1| \cdot \sin(60^o)$$

e dividendo "membro a membro" la seconda per la prima, si ottiene

$$\tan(\alpha) = \frac{-|\vec{v}_1| \cdot \sin(60^o)}{|\vec{v}| - |\vec{v}_1| \cdot \cos(60^o)}$$

e sostituendo i valori noti:

$$\tan(\alpha) = \frac{-0.66 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{1.5 - 0.66 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{-0.33 \cdot \sqrt{3}}{1.55 - 0.33} = -\frac{33}{117}\sqrt{3} \approx 0,488527151$$

ergo:

$$\alpha \approx \arctan(0,488527151) \approx 26,036765033\,\text{gradi}.$$

[61]Si ricorda che la **quantità di moto** è definito come *"massa"* × *"velocità"*.

[62]E chiaramente ortogonale all'asse delle ascisse considerato precedentemente.

Un breve intermezzo: gli angoli, misurati in gradi, partono dalla considerazione che l'angolo giro viene diviso in 360 parti uguali e, per "scendere" ai sottomultipli dell'angolo grado, si suole suddividere non in parti decimali, ma in sessantesimi: pertanto, dopo la prima suddivisione in sessantesimi si ottengono i **minuti primi** e dopo un'ulteriore suddivisione in sessantesimi i **minuti secondi,** ovvero più brevemente *primi e secondi* indicati rispettivamente con un apice e due apici. Detto questo, bisogno riscrivere la parte decimale dell'angolo, trovato prima, in minuti primi [63]. All'uopo basta fare un proporzione $0.036 : 10 = x : 60,$ per ottenere la parte decimale in sessantesimi: in pratica basta moltiplicare per 60 per ottenere "i primi". Nel nostro caso si ottiene $0,216$ quindi circa $2'$.

Riprendiamo il discorso: l'angolo che la direzione della velocità della seconda palla forma con l'orizzontale di riferimento è di circa $26^o\,2'$. Per ricavare la velocità, si può utilizzare la seconda espressione:

$$|\vec{v}_2| \cdot \sin(\alpha) = -|\vec{v}_1| \cdot \sin(60^o)$$

da cui:

$$|\vec{v}_2| = -\frac{|\vec{v}_1| \cdot \sin(60^o)}{\sin(\alpha)}$$

e, sostituendo i valori noti,

$$|\vec{v}_2| - \frac{0.33}{sin(26^o\,2')}\sqrt{3} \approx 1,302\,\mathrm{m/s}.$$

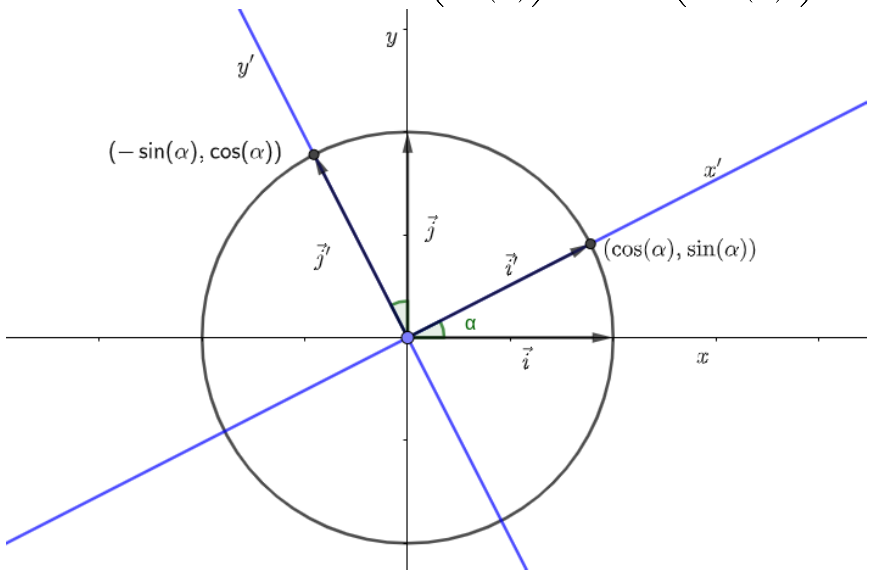
□

14.1. Rotazione di punti e sistemi di riferimento. Consideriamo una circonferenza goniometrica centrata nell'origine del sistema di riferimento e, lungo gli assi cartesiani, i *versori* [64] $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Consideriamo ora un altro sistema di riferimento cartesiano, con origine coincidente con quella del primo sistema di riferimento e gli assi che formano un angolo α con quelli "vecchi". Indichiamo questo sistema di riferimento con $< x'Oy' >$ mentre il precedente con $< xOy >$. I versori lungo gli assi cartesiani del sistema $< x'Oy' >$

[63] E se è opportuno, anche secondi.

[64] Ricordiamo che per **versore** si intende un vettore di lunghezza unitaria.

siano $\vec{i'}$ e $\vec{j'}$, anch'essi di componenti $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, che nel sistema $< xOy >$ si leggono [65] come $\vec{i'} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\\sin(\alpha)\end{pmatrix}$ e $\vec{j'} = \begin{pmatrix}-\sin(\alpha)\\\cos(\alpha)\end{pmatrix}$.



Dato che ogni altro vettore si può scrivere come una somma di multipli di $\vec{i}$ e $\vec{j}$ [66], allora sappiamo come riscrivere le coordinate/componenti di un punto/vettore qualsiasi dato in uno dei due sistemi di riferimento, con le coordinate/componenti nell'altro sistema di riferimento. In particolare, se $P(x_P, y_P)$ è dato con le coordinate nel sistema $< xOy >$, considerando un nuovo sistema di riferimento ruotato in senso antiorario di α rispetto al primo, possiamo scrivere:

$$\overrightarrow{OP} = x_P \cdot \vec{i} + y_P \cdot \vec{j}$$

ed anche:

$$\begin{cases} \vec{i'} &= \cos(\alpha) \cdot \vec{i} + \sin(\alpha) \cdot \vec{j} \\ \vec{j'} &= -\sin(\alpha) \cdot \vec{i} + \cos(\alpha) \cdot \vec{j} \end{cases}$$

Si può ora risolvere il sistema lineare in $\vec{i}$ e $\vec{j}$, per determinare le quantità da sostituire nella scrittura di $\overrightarrow{OP}$ e riscrivere lo stesso vettore con le componenti nel sistema ruotato; ma è molto più facile considerare che *se* $< x'Oy' >$ *è ruotato di un angolo* α *in verso antiorario rispetto al*

[65]Si noti che i versori che stiamo considerando, essendo vettori di lunghezza unitaria, sono tutti applicati nell'origine e con l'altro estremo sulla circonferenza goniometrica.

[66]Si dice come **combinazione lineare** dei due vettori dati, i quali, a loro volta si dicono formare **una base** per lo spazio (in questo caso *il piano*) che generano.

sistema $< xOy >$, *allora, tenendo fisso* $< x'Oy' >$, *possiamo immagina che il sistema che ruota è* $< xOy >$, *di un angolo* α *in senso orario* [67]. Possiamo perciò considerare la seguente trasformazione equivalente:

$$\begin{cases} \vec{i} & = \cos(\alpha) \cdot \vec{i'} - \sin(\alpha) \cdot \vec{j'} \\ \vec{j} & = \sin(\alpha) \cdot \vec{i'} + \cos(\alpha) \cdot \vec{j'} \end{cases}$$

e quindi concludere che le nuove coordinate di P nel sistema $< x'Oy' >$ [68] sono:

$$x_P \cdot [\cos(\alpha) \cdot \vec{i'} - \sin(\alpha) \cdot \vec{j'}] + y_P \cdot [\sin(\alpha) \cdot \vec{i'} + \cos(\alpha) \cdot \vec{j'}]$$

che, riordinando i termini, diventano:

$$\overrightarrow{OP}_{<x'Oy'>} = \begin{pmatrix} x_P \cdot \cos(\alpha) + y_P \cdot \sin(\alpha) \\ -x_P \cdot \sin(\alpha) + y_P \cdot \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Costruiamo ora la **matrice** 2×2 seguente [69] :

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

e *definiamo* la moltiplicazione tra due matrici "riga per colonna" in questo modo se $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$ allora:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{1,1} \cdot b_{1,1} + a_{2,1} \cdot b_{2,1} & a_{1,1} \cdot b_{1,2} + a_{2,1} \cdot b_{2,2} \\ a_{2,1} \cdot b_{1,1} + a_{2,2} \cdot b_{2,1} & a_{2,1} \cdot b_{1,2} + a_{2,2} \cdot b_{2,2} \end{pmatrix}$$

[70] In particolare, si può effettuare anche la moltiplicazione di una matrice 2×2 con un vettore colonna di due componenti, che viene visto, all'uopo, come una *matrice* 2×1 e, quindi ottenere:

$$R(\alpha) \cdot \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P \cdot \cos(\alpha) + y_P \cdot \sin(\alpha) \\ -x_P \cdot \sin(\alpha) + y_P \cdot \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Ovvero:

$$\overrightarrow{OP}_{<x'Oy'>} = R(\alpha) \cdot \overrightarrow{OP}.$$

La matrice $R(\alpha)$ si chiama **matrice di rotazione.** Osserviamo che essa riscrive le coordinate di P, se il sistema viene ruotato di un angolo

[67] E quindi ruota di $-\alpha$ in senso antiorario.

[68] Ovvero le nuove componenti del vettore $\overrightarrow{OP}$.

[69] Per **matrice** intendiamo una tabella di elementi ordinata secondo un doppio indice, che "indicano" la riga e la colonna di appartenenza dell'elemento considerato di volta in volta.

[70] Si noti che si stanno semplicemente effettuando dei *prodotti scalari*, tra i vettori della prima matrice, considerati in orizzontale, con i vettori della seconda matrice, considerati in verticale: quindi tra i "vettori riga" di A ed i "vettori colonna" di B, da cui la denominazione "prodotto riga per colonna".

α in senso antiorario. Se dovessimo trovare le coordinate del punto P, che viene ruotato esso stesso di un angolo α in senso antiorario, potremmo pensare di operare una rotazione in verso orario del sistema di riferimento dello stesso angolo, in tal caso dovremmo utilizzare la matrice $R(-\alpha)$ ovvero:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

per trovare le nuove coordinate del punto. Vediamo con un paio di esempi.

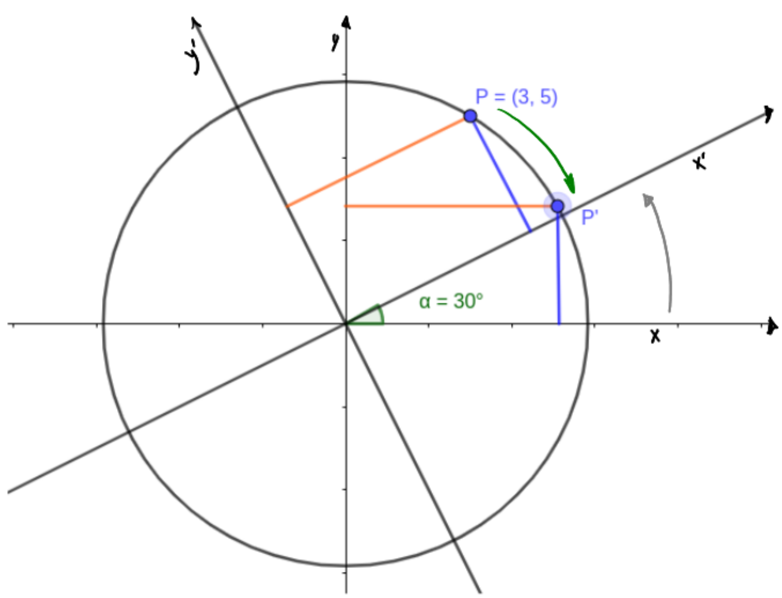
Esempio: Sia $P(3,5)$ e si ruoti il sistema di coordinate di 30^o in senso antiorario. Quali coordinate ha il punto P nel nuovo sistema di riferimento?

Risposta: La matrice di rotazione è

$$R = \begin{pmatrix} \cos(30) & \sin(30) \\ -\sin(30) & \cos(30) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Per cui le nuove coordinate saranno date da

$$P_{<x'Oy'>} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} + \frac{5\cdot\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\cdot\sqrt{3}+5}{2} \\ \frac{5\cdot\sqrt{3}-3}{2} \end{pmatrix}$$



Si noti che le nuove coordinate del punto possono essere pensate ottenute dalla rotazione in senso orario del punto P di un angolo di 30^o, mantenendo fisso il sistema di riferimento iniziale.

14.2. Sulle matrici ed i sistemi lineari. Sia data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Se noi si considera il vettore $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ed un vettore $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ allora la scrittura

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b},$$

che <u>formalmente</u> rappresenta una *equazione di primo grado*, è un modo compatto per scrivere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot x + a_{1,2} \cdot y = b_1 \\ a_{2,1} \cdot x + a_{2,2} \cdot y = b_2 \end{cases}.$$

Se si riuscisse a determinare una matrice A^{-1} tale che:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

allora la soluzione del sistema si determinerebbe come

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}}.$$

La matrice:

$$\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è chiamata **matrice identità** e A^{-1} **matrice inversa:** se si può determinare la matrice inversa, la matrice A è detta **invertibile.**

La nostra discussione, per ora, si limita al caso 2×2 e quindi possiamo rifarci immediatamente all'interpretazione geometrica [71] del sistema lineare: esso ha soluzione solo se le rette non sono parallele, il ché significa che i coefficienti delle incognite x e y non sono proporzionali [72]. Questo significa che, sulla matrice A, la condizione necessaria è che due righe non siano l'una multipla dell'altra. Ma ora vediamo di determinare, facendo due calcoli di facile comprensione [73], la matrice inversa nel caso 2×2.

Cerchiamo dunque una matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tale che

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[71] Nel piano.
[72] Altrimenti le due rette avrebbero la stessa pendenza!
[73] E come utile esercizio.

Svolgendo i prodotti "riga per colonna" ricaviamo il sistema:

$$\begin{cases} \text{I:} & a_{1,1}\, x + a_{2,1}\, y = 1 \\ \text{II:} & a_{1,2}\, x + a_{2,2}\, y = 0 \\ \text{III:} & a_{1,1}\, z + a_{2,1}\, t = 0 \\ \text{IV:} & a_{1,2}\, z + a_{2,2}\, t = 1 \end{cases}$$

Per eliminazione, sottraendo $a_{2,2}\, I - a_{2,1} II$ si ottiene:

$$x = \frac{a_{2,2}}{a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}},$$

analogamente si può operare $a_{1,2}\, II - a_{1,1}\, I$ per ottenere:

$$y = \frac{-a_{1,2}}{a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}}.$$

Si lascia come facile compito di verificare che le altre due incognite sono date da:

$$z = \frac{-a_{2,1}}{a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}}$$

e

$$t = \frac{a_{1,1}}{a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}}.$$

La prima cosa che salta all'occhio è che tutti i termini della matrice inversa di determinano dividendo uno degli elementi della matrice di partenza per la quantità:

$$a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}.$$

Notiamo che, partendo dalla matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ la quantità di cui stiamo parlando si ottiene moltiplicando i numeri che si trovano sulle due diagonali [74] della matrice e facendone la differenza: questa differenza è di fondamentale importanza e si chiama **determinante della matrice A.** Si indica, generalmente, il determinante con $\det(A)$ o anche con $|A|$. Pertanto possiamo scrivere

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

Introduciamo ora una operazione interessante, che spesso viene presa in considerazione quando si opera con matrici: la **trasposizione.** Si tratta di scambiare le righe con le colonne ed ottenere, così, una nuova matrice che viene detta **la trasposta di A.** Ad esempio, se

[74] La diagonale che "va a scendere" si chiama anche **diagonale principale.**

$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ allora la sua trasposta è $A^t = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}$. Osserviamo che la matrice trasposta di una matrice trasposta è la matrice di partenza, ovvero $(A^t)^t = A$. Se consideriamo la matrice che abbiamo scritto per determinare l'inversa, allora la trasposta risulta essere:

$$\begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{2,1} \\ -a_{1,2} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

e, in ultimo, questa matrice si ottiene dalla matrice A di partenza, eliminando riga e colonna degli elementi corrispondenti e prendendo l'elemento rimasto, con la regola di cambiargli il segno se la somma del numero della riga con il numero della colonna è un numero dispari. Questa matrice ha un nome, dato che anche essa è importante e si chiama **matrice dei cofattori** e la indichiamo con $\mathrm{Cof}(A)$. Quindi, data A come al solito, si ha:

$$\mathrm{Cof}(A) = \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{2,1} \\ -a_{1,2} & a_{1,1} \end{pmatrix}.$$

Ergo, possiamo riscrivere la formula per la matrice inversa come:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot \mathrm{Cof}(A)^t.$$

In ultimo, chiamiamo **matrice aggiunta** la matrice dei cofattori trasposta e la indichiamo con $A^* = \mathrm{Cof}(A)^t$ ed ultimiamo scrivendo la formula per la matrice inversa:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot A^*}.$$

Questo discorso si generalizzerà a dimensioni superiori successivamente nel corso degli studi.

Esempio: Si risolva il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2\,x + 4\,y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Soluzione: La matrice associata è $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, il suo determinante è $det(A) = -2 - 4 = -6$. La matrice dei cofattori è $\mathrm{Cof}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ e quindi la matrice aggiunta è $A^* = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, ergo, la matrice inversa è:

$$A^{-1} = \frac{1}{-6} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

La soluzione del sistema è data da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} + 2 \\ \\ \frac{1}{6} - 1 \end{pmatrix},$$

ovvero:

$$\begin{cases} x & = \frac{13}{6} \\ y & = -\frac{5}{6} \end{cases}$$

come si può verificare sostituendo questi due valori nelle equazioni che costituiscono il sistema.

14.3. Ancora sui vettori ed il prodotto scalare. Consideriamo due versori qualsiasi [75] $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Abbiamo imparato a determinare il prodotto scalare come la somma dei prodotti delle componenti omologhe:

$$< \vec{v}, \vec{w} >= \sum_k v_k \cdot w_k,$$

che, nel caso di due componenti, è esattamente:

$$< \vec{v}, \vec{w} >= v_1\, w_1 + v_2\, w_2.$$

Calcolando il prodotto scalare con le quantità indicate nella figura seguente, si ottiene:

$$< \vec{v}, \vec{w} >= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\beta - \alpha) = \cos(\widehat{u, w})$$

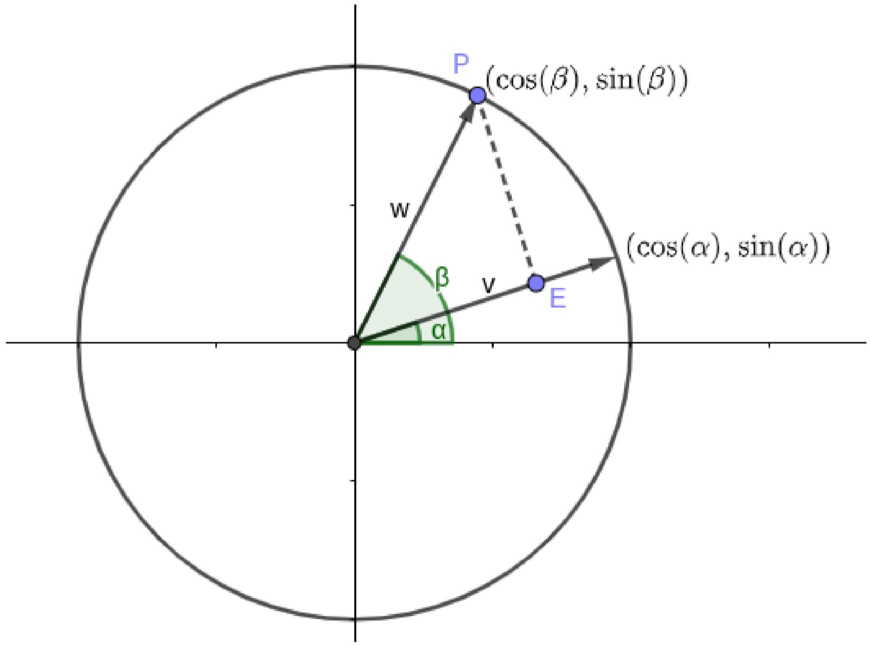
ovvero, il prodotto scalare tra due versori rappresenta il coseno dell'angolo che essi formano. Pertanto, dato che dividendo un vettore qualsiasi per la sua lunghezza, si ottiene sempre un versore con la direzione del vettore dato, allora possiamo scrivere:

$$< \frac{\vec{v}}{|\,\vec{v}\,|}, \frac{\vec{w}}{|\,\vec{w}\,|} >= \cos(\widehat{u, w})$$

da cui

$$\boxed{< \vec{v}, \vec{w} >= |\,\vec{v}\,| \cdot |\,\vec{w}\,| \cdot \cos(\widehat{u, w})}.$$

[75]Che quindi hanno il punto di applicazione nel centro di una circonferenza goniometrica e "la freccia" sulla circonferenza stessa.



Inoltre, per quanto imparato dalla trigonometria, indicando con il punto E la proiezione (otogonale) del punto P sulla retta a cui appartiene $\vec{v}$, $E = \pi_{\vec{v}}(\vec{w})$ si può scrivere, qualsiasi sia la lunghezza di $\vec{w}$:

$$\pi_{\vec{v}}(\vec{w}) = |\,\vec{w}\,| \cdot \cos(\beta - \alpha) = \cancel{|\,\vec{w}\,|} \cdot < \frac{\vec{v}}{|\,\vec{v}\,|}, \frac{\vec{w}}{\cancel{|\,\vec{w}\,|}} >$$

e, infine

$$\boxed{\pi_{\vec{v}}(\vec{w}) = \frac{< \vec{v}, \vec{w} >}{|\,\vec{v}\,|}}.$$

Quindi, il prodotto scalare tra due vettori ci permette, oltre che calcolare la lunghezza di un vettore, anche di determinare l'angolo che essi formano e la lunghezza della proiezione di un vettore lungo la direzione indicata da un altro. È giusto un'osservazione:

"Se il prodotto scalare è nullo, i vettori sono perpendicolari!"

14.4. Sulla matrice di rotazione. La matrice di rotazione, come abbiamo visto, ha la forma

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Il suo determinante è

$$\det(R\,(\alpha)) = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1.$$

Se, inoltre, consideriamo i vettori riga, oppure anche i vettori colonna, è facile convincersi che il loro prodotto scalare è sempre nullo! ad esempio:

$$< \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} >= -\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha) = 0.$$

Per questo motivo si dice che la matrice di rotazione è una **matrice ortonormale** [76].

15. La pendenza di una retta

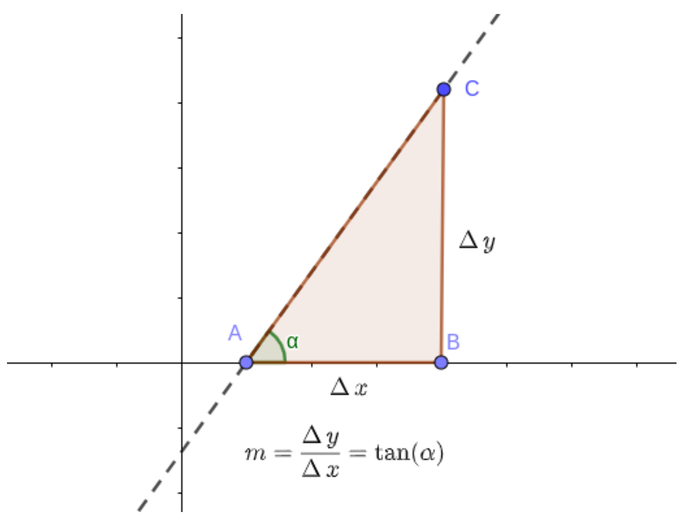
Ritorniamo per un attimo all'equazione esplicita della retta

$$y = m\,x + q$$

e, in particolare, alla pendenza rappresentata dal coefficiente m. Abbiamo ampiamente discusso sul fatto che la pendenza è definita come il *rapporto incrementale* $m = \frac{\Delta\,y}{\Delta\,x}$. Ora, considerando la risoluzione dei triangoli rettangoli, dato che $\Delta\,y$ e $\Delta\,x$ rappresentano due cateti del triangolo $\overline{ABC}$ in figura, si ottiene anche che

$$\tan(\alpha) = \frac{\Delta\,y}{\Delta\,x} = m.$$

Per tale motivo la pendenza è anche chiamata **coefficiente angolare:** esso rappresenta la tangente dell'angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse, essendo il verso degli angoli crescente, quello antiorario.



[76]Ortogonale, perché i vettori che la compongono sono ortogonali e normale, perché ha determinante pari a 1.

Parte 3

Successioni e funzioni esponenziali

(Le basi dei ragionamento sull'infinito)

CAPITOLO 8

Progressioni e funzioni esponenziali

Consideriamo un insieme di elementi, ad esempio di numeri naturali: $S = \{1, 3, 2, 5, 4, 7\}$. Come insieme, a patto di riscrivere tutti gli elementi e non aggiungerne altri, certamente non cambierebbe se riordinassimo l'elenco che lo costituisce. Se invece chiedessimo di osservare la "sequenza"

$$s_1 : 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7$$

e

$$s_2 : 3,\ 2,\ 1,\ 4,\ 5,\ 7$$

tutti direbbero che sono differenti poiché i primi tre elementi non sono elencati nello stesso ordine. Ci si domanda allora come si può *conservare l'informazione* sul posto con cui vengono elencati gli elementi di un insieme, pur potendo gli elementi essere gli stessi come nell'esempio di prima. Ebbene, l'idea è semplice: ricordando che *una funzione è una legge associativa* <u>univoca</u> che ad ogni elemento di un insieme [1] ne fa corrispondere un altro, in un altro insieme [2] : si può sfruttare l'ordinamento naturale dei numeri Naturali per associare "un posto" ad ogni elemento di una sequenza. In modo elementare, quindi, definiamo **successione** una *funzione* il cui dominio è $\mathbb{N}$ [3] ed il cui codominio è l'insieme in cui si considerano gli elementi della sequenza ordinata, che si vuole "costruire" o identificare. Pertanto è una *successione* una qualsiasi funzione di questo tipo:

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{N} \to S \\ & n \mapsto f(n) \end{aligned}$$

L'informazione sul posto è conservata dal numero naturale a cui viene associato l'elemento dell'insieme! Per "snellire" la scrittura, generalmente non si scrive $f(n)$ ma semplicemente f_n, non essendoci possibilità di fraintendimento. Inoltre, se A indica l'insieme degli elementi che si mettono in successione, la successione stessa viene indicata con $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ o, brevemente con a_n che, a sua volta, è chiamato *termine*

[1] Detto **dominio** della funzione.

[2] Possibilmente diverso, detto **codominio** della funzione.

[3] L'insieme dei numeri Naturali.

n-esimo della successione.

Esempi:

- La successione dei numeri pari, può essere indicata come $p_n = 2 \cdot n$ essendo ogni numero pari il doppio di un numero $n \in \mathbb{N}$ qualsiasi. In questo modo si può dire, ad esempio, direttamente quale sia il 31-esimo elemento della successione: $2 \cdot 31 = 62$.
- La successione dei quadrati dei numeri naturali è $q_n = n^2$. Anche in questo l'informazione sul posto è contenuta nella legge funzionale che permette, dando il posto occupato, di determinare il numero nella sequenza ordinata in considerazione.
- La successione dei numeri definita da $a_n = \frac{2 \cdot n+1}{n^2}$ ha come sesto termine il numero $\frac{2 \cdot 6+1}{6^2} = \frac{13}{36}$. Essa può essere scritta per esteso finché si voglia: i primi termini sono dati da

$$a_1 = 3, \; a_2 = \frac{5}{4}, \; a_3 = \frac{7}{9}, \; a_4 = \frac{9}{16}, \; \ldots .$$

□

Tra le successioni [4], particolare importanza assumono quelle per le quali si individuano delle regolarità nella costruzione dei numeri della sequenza. Si chiamano **progressioni aritmetiche** delle successioni per le quali la <u>differenza tra due termini consecutivi è costante</u>: tale numero costante prende il nome di **ragione** della progressione. Se, anziché la differenza, <u>rimane costante il rapporto</u>, allora la progressione si dirà **geometrica.** Anche in quest'ultimo caso il rapporto costante viene detto ragione della progressione (geometrica). Conoscendo un termine qualsiasi della progressione e la ragione, si conosceranno tutti i termini: in verità basta conoscere due termini qualsiasi [5] per avere una informazione completa sulla progressione stessa.

1. Le progressioni aritmetiche (P.A.)

Sia $d = a_{n+a} - a_n$ la ragione della progressione aritmetica e a_1 il primo termine; allora per ottenere a_2 si deve sommare ad a_1 una volta la ragione, per ottenere a_2 bisogna sommare due volte la ragione e via così per tutti gli altri termini. Possiamo pertanto scrivere:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}.$$

[4] Fermo restando che si possono considerare successioni di tutti i tipi, anche di portoni di case! noi ci limiteremo alle successioni numeriche, ovvero a quelle per le quali il codominio è un insieme opportuno di numeri.

[5] Ovvero il loro valore e la loro posizione nella successione dei termini.

D'altra parte, conoscendo il k-esimo termine, possiamo risalire al primo, sottraendo tante ragioni per quanto è $k-1$ e trovare i successivi come se il k-esimo fosse il primo termine della successione!

Esempio: Il sesto termine della progressione aritmetica è 42 e la ragione è 3. Qual è il 39-esimo termine?

Risposta: Possiamo procedere in due modi: il primo è trovare il primo termine e poi il trentanovesimo con la formula data prima. Utilizzando sempre la formula nel riquadro:

$$a_6 = a_1 + (5) \cdot d \quad \Rightarrow \quad a_1 = 42 - 15 = 27$$

e quindi

$$a_{39} = a_1 + (38) \cdot d = 27 + 114 = 141.$$

L'altro modo di procedere è molto più diretto (ed intelligente): dal sesto al trentanovesimo termine ci stanno $39 - 6 + 1 = 34$ termini; se noi immaginiamo una progressione il cui primo termine è il sesto quella data, allora il 34-esimo suo termine corrisponde al 39-esimo richiesto dall'esercizio. Per cui abbiamo, ponendo $A_1 = a_6$ con la stessa ragione:

$$a_{39} \;=\; A_{34} = A_1 + (33) \cdot d \;=\; a_6 + 33 \cdot d = 42 + 99 = 141.$$

□

Come affermato, basta conoscere anche soli due termini per determinare tutta la progressione: infatti la differenza tra il numero di posti, più uno, dà il numero dei termini tra essi e così risulta facile risalire alla ragione.

Esempio: L'undicesimo termine di una P.A. è 21 ed il ventinovesimo è 57, determinare il primo termine ed il quarantesimo.

Risposta: Si sa, quindi, $a_{11} = 21$ e $a_{29} = 57$. Dall' 11-esimo al 29-esimo ci stanno $29 - 11 = 18$ termini: questo significa che il ventinovesimo corrisponde all'undicesimo a cui sono stati aggiunte 18 ragioni [6]:

$$a_{29} = a_{11} + (18) \cdot d \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{57 - 21}{18} = \frac{36}{18} = 2.$$

A questo punto si sa tutto:

$$a_{11} = a_1 + 10 \cdot d \quad \Rightarrow \quad a_1 = 21 - 20 = 1$$

[6] Osserva che il pedice dell'elemento al primo membro corrisponde alla somma del pedice dell'elemento al secondo termine più il numero di ragioni sommate: $29 = 11+18$. Questo può servire per un controllo veloce, oppure come trucco per ricavare subito la formula nel caso si partisse da un termine qualsiasi e si volesse arrivare ad un altro termine che lo segue dopo un certo numero di posizioni.

e:

$$a_{40} = a_1 + 39 \cdot 2 = 1 + 78 = 79.$$

□

Altra interessante formula, che si può ricavare dall'informazione che un certo numeri di termini è in P.A. è quella della somma di tutti i termini, senza dover necessariamente fare la somma un termine appresso all'altro [7]. La formula proviene direttamente dal seguente lemma che è una generalizzazione di un ragionamento che un "bambino prodigio" di nome Carl Friedrich Gauss [8] fece all'età di circa 9 anni.

LEMMA 1. *In una progressione aritmetica, i termini equidistanti dagli estremi sono a somma costante e pari alla somma del primo e dell'ultimo termine.*

Dimostrazione: Consideriamo a_1 e a_n la cui somma è, evidentemente $a_1 + a_n$. Ora "scaliamo di una posizione" in avanti dalla prima e in dietro dall'ultima. Sia ha $a_2 = a_1 + d$ mentre $a_{n-1} = a_n - d$: sommando questi due termini si ottiene

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + \cancel{d} + a_n - \cancel{d} = a_1 + a_n.$$

Procedendo in questo modo è facile convincersi che la tesi sia esatta. Comunque, possiamo anche scrivere che due termini equidistanti si trovano a k posizioni di distanza dagli estremi, per cui $a_k = a_1 + (k - 1) \cdot d$ mentre $a_{n-k} = a_n - (k-1) \cdot d$ e sommando questi due termini si ottiene sempre $a_1 + a_n$, come affermato.

c.v.d.

PROPOSIZIONE 5. *La somma di n termini in P.A. è data dalla media aritmetica del primo e ultimo termine, moltiplicato il numero dei termini sommati. Scritto in modo più chiaro:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

[7] Si narra che un supplente della scuola elementare frequentata, da bambino, dal futuro grande -ma all'epoca, "piccolo"- Gauss, per tenere a bada i bambini piuttosto agitati, avesse chiesto loro di non muoversi finché non avessero calcolato la somma di tutti i primi 100 numeri naturali. Gauss, dopo un po' riprese ad "agitarsi" e rimproverato dal maestro, gli diede la risposta 5050. Al ché, sorpreso dalla prontezza della risposta, chiese a quel bambino come avesse fatto ed egli gli mostrò che aveva semplicemente notato che la somma a due a due dei termini, partendo dal primo e dall'ultimo, dava sempre 101: di queste somme se ne contavano 50, per cui la risposta doveva essere 5050.

[8] Ricordato con l'appellativo di *Princeps mathematicorum*, per la quantità di risultati che apportò a quasi tutte le discipline della Matematica.

Dimostrazione: Se s indica la somma $s = \sum_{k=1}^{n} a_k$ allora sommando i termini a due a due, partendo dal primo con l'ultimo, dal secondo con il penultimo e così via, per il lemma di prima si ha che queste somme sono tutte pari a $a_1 + a_n$. D'altra parte ne sono presenti in un numero pari alla metà del numero dei termini da sommare, ovvero ci sono $\frac{n}{2}$ addendi tutti uguali a $a_1 + a_n$ per cui

$$s = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

e questo dimostra la tesi.

Si sarebbe potuto anche procedere in modo diretto, come qui di seguito ragionato. Scriviamo la somma prima con i termini in ordine di posizione crescente e poi in ordine di posizione decrescente.

$$\begin{aligned} s =& a_1 + a_2 + \cdots + + a_{n-1} + a_n \\ s =& a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 \end{aligned}$$

Sommando membro a membro otteniamo:

$$2 \cdot s = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

ma queste in parentesi sono tutte uguali tra di loro, per il lemma, e pari alla prima parentesi: esse sono in numero di n. Quindi si può scrivere

$$2\,s = n \cdot (a_1 + a_n) \quad \Rightarrow \quad s = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

c.v.d.

Esempio: Sommare tutti i termini che vanno dal quinto al trentesimo di una progressione aritmetica il cui primo termine è 3 e la ragione è 4.

Risposta: Intanto troviamo il quinto ed il trentesimo termine:

$$a_5 = a_1 + 4\,d = 3 + 16 = 19, \quad \wedge \quad a_{30} = a_1 + 29\,d = 3 + 116 = 119.$$

Dal quinto al trentesimo termine ci stanno $30 - 5 + 1 = 26$ termini, per cui la somma cercata è

$$\sum_{k=5}^{30} a_k = \frac{(19 + 119) \cdot 26}{2} = 138 \cdot 13 = 1794,$$

come potete verificare "manualmente" se avete tempo da perdere!

□

2. Le progressioni geometriche (P.G.)

Chiamiamo q il rapporto tra due termini consecutivi [9], allora dato il primo termine a_1, il consecutivo si ottiene moltiplicando questo per la ragione: $a_2 = a_1 \cdot q$, il successivo moltiplicando per due volte la ragione e così via, fino ad ottenere la relazione

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}.$$

Analogamente a quanto fatto per le P.A., anche per le P.G., partendo da un k-esimo termine qualsiasi si può risalire a tutti i termini della progressione, conoscendone la ragione ovvero, conoscendo due termini [10] si può ricavare la ragione e qualsiasi altro termine d'interesse.

Esempio: Se il quarto termine di un progressione geometrica è 405 e la ragione è 3, qual è il 20-esimo termine?

Risposta: Anche per questo esempio si può procedere in due modi: uno è considerare quanti termini separano quello noto da quello incognito, in modo da determinare per quante volte si deve moltiplicare la ragione, l'altro è di determinare il primo termine e poi applicare la formula nel riquadro. Nel primo modo calcoliamo che tra il quarto ed il ventesimo termine passano $20-4+1 = 17$ termini, per cui il ventesimo termine è $a_{20} = a_4 \cdot q^{16} = 405 \cdot 3^{16} = 5 \cdot 3^4 \cdot 3^{16} = 5 \cdot 3^{20}$. Volendo ricavare invece il primo termine, possiamo utilizzare la formula nel riquadro

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{405}{3^3} = 15$$

e quindi

$$a_{20} = a_1 \cdot q^{19} = 15 \cdot 3^{19} = 5 \cdot 3^{20}.$$

□

Esempio: Il quinto termine di una P.G. è 648 ed il secondo è 3000, qual è il settimo termine?

Risposta: Dal secondo al quinto termine ci sono $5 - 2 + 1 = 4$ termini, per cui

$$a_5 = a_2 \cdot q^3 \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[3]{\frac{648}{3000}} = \sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot 3^4}{3 \cdot 10^3}} = \frac{\cancel{2} \cdot 3}{\cancel{10}_5} = \frac{3}{5}.$$

Conoscendo ora la ragione, per determinare il settimo termine, basta partire dal quinto (che è noto) e moltiplicare per due volte la ragione:

$$a_7 = a_5 \cdot q^2 = 648 \cdot \frac{9}{25} = 223,28.$$

[9] La ragione della P.G.

[10] Ovvero i valori ed i posti che occupano

□

Sapendo che un certo numero di addendi sono in progressione geometrica, è possibile determinarne la somma senza doverli aggiungere, consecutivamente, uno alla volta? La risposta è affermativa e segue da questa osservazione. Supponiamo di voler calcolare la seguente somma di n termini in progressione geometrica:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= \\ = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} &= \\ = a_1 \cdot (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}), \end{aligned}$$

basta, evidentemente, solo saper calcolare la somma racchiusa tra le parentesi tonde. All'uopo utilizziamo uno stratagemma: chiamiamo tale somma s e poi calcoliamo $s \cdot q$:

$$\begin{aligned} s &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} \\ s \cdot q &= q + q^2 + \cdots + q^n. \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro si ottiene la relazione:

$$s(1-q) = 1 - q^n$$

in quanto tutti i termini dal secondo all'$n-1$-esimo si eliminano tra le due scritture. Pertanto possiamo scrivere quella somma come:

$$s = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Ergo concludiamo che la somma di n termini in progressione geometrica è data da

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Questo risultato ci tornerà molto utile quando parleremo di serie numeriche, tra qualche capitolo. Per ora riassumiamo in una tabella sinottica i risultati trovati per i due tipi di progressione di cui ci siamo occupati.

	P.A.	P.G.
Termine generico	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Somma primi n termini	$\sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot \frac{a_1+a_n}{2}$	$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

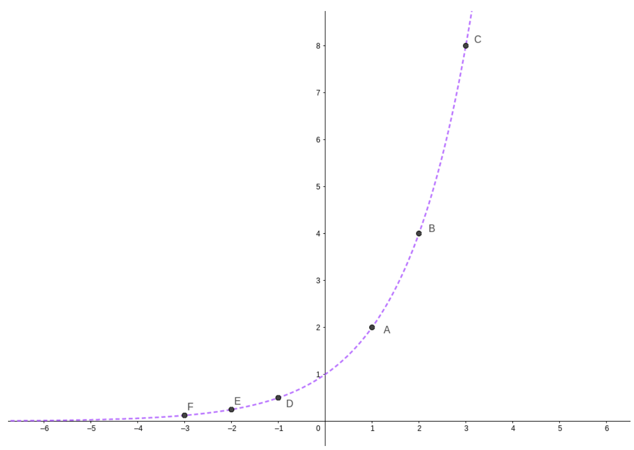
3. La funzione esponenziale

Una funzione si dice esponenziale quando l'incognita compare all'esponente di una data potenza. Ad esempio $f(x) = 2^x$ è una quantità che varia al variare di x e, dato che questa trovasi all'esponente del due, vista come "legge funzionale", rappresenta una funzione esponenziale. *Per convenzione ed utilità* non si considerano funzioni esponenziale con la base, della potenza, negativa. Quindi tutte le funzioni esponenziali sono del tipo

$$\boxed{a^x, \quad a > 0}.$$

Vogliamo rappresentare il grafico [11] di tale funzione, per avere una maggiore chiarezza di come si comporta. A tal fine calcoliamo qualche facile valore per la funzione 2^x e segniamo il punto corrispondente nel piano cartesiano.

	x	$f(x)$
	0	1
A	1	2
B	2	4
C	3	8
...	...	...
D	-1	$\frac{1}{2}$
E	-2	$\frac{1}{4}$
F	-3	$\frac{1}{8}$
...	...	...



Osserviamo innanzitutto che qualsiasi numero elevato a zero dà come risultato 1: per cui, qualsiasi sia la base che andremo a considerare, la funzione esponenziale passa sempre da $P(0, 1)$. Inoltre, se dovessimo tracciare il grafico della funzione $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, dato che l'esponente negativo "inverte la base", è come se scambiassimo la parte sinistra con quella destra del grafico: ovvero la funzione sarebbe rappresentata come nel grafico successivo. Questo, comunque, sarà verò per ogni coppia di numeri a, $\frac{1}{a}$ che possa essere considerata come base della funzione esponenziale. Premesso che chiamiamo **crescente** sull'intervallo

[11]Ricordiamo che il grafico di una funzione è l'insieme dei punti del piano in cui l'ordinata si trova in funzione dell'ascissa tramite la legge funzionale "f": ovvero è definito come l'insieme $\mathrm{Graf}(f) = \{(x, y) : y = f(x),\ x \in \mathrm{Dom}(f)\}$.

I ogni funzione per la quale [12]:

$$\forall x_1, x_2 \in I \subseteq \mathrm{Dom}(f), \quad \text{con} \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

e **decrescente** sull'intervallo I se vale invece:

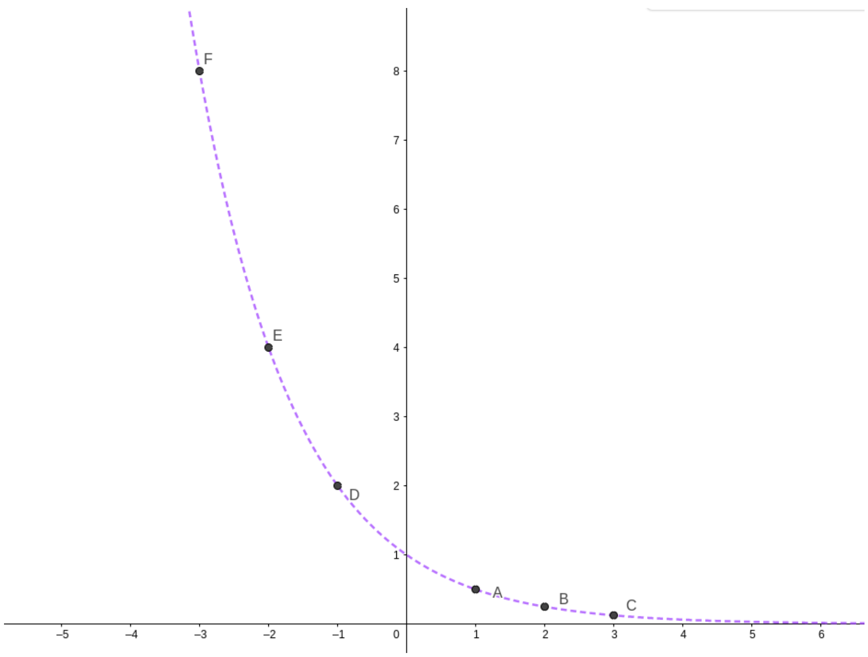
$$\forall x_1, x_2 \in I \subseteq \mathrm{Dom}(f), \quad \text{con} \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2),$$

allora possiamo osservare questo fatto:

$$f(x) = a^x, \quad a \in (0,1) \quad \text{è una funzione decrescente in tutto } \mathbb{R}$$

e quindi anche:

$$f(x) = a^x, \quad a > 1 \quad \text{è una funzione crescente in tutto } \mathbb{R}.$$



Inoltre osserviamo che, comunque si prenda la base, **la funzione esponenziale è sempre <u>strettamente</u> positiva** [13]. È giusto un'osservazione banale che più grande è la base e prima si raggiungono valori maggiori, a parità di esponente: ovvero la "crescita" di 3^x, ad esempio, è "più veloce" di quella di 2^x ma saranno comunque entrambe "meno

[12] L'idea è che muovendosi da sinistra a destra, ovvero da valori dell'ascissa inferiori a valori superiori, allora anche i valori della funzione passano da valori più piccoli a valori più gradi. Per le funzioni decrescenti avviene invece che i valori della funzione, calcolati in corrispondenza di ascisse minori, sono maggiori di quelli calcolati per ascisse maggiori!

[13] Ovvero è positiva e non si annullerà mai.

veloci" della crescita di 7^x [14]

Una funzione che presenti su tutto il suo dominio una unica caratteristica di crescenza o decrescenza viene definita **monotòna:** più precisamente se nella definizione di funzione crescente/decrescente data prima, l'intervallo I coincide con il $\mathrm{Dom}(f)$ allora la funzione si dirà *monotòna crescente* oppure, a secondo di quale tra le due definizioni è applicabile, *monotòna decrescente.* Possiamo dire quindi che, sia che la base sia compresa tra zero ed uno, sia che essa sia maggiore di uno, la funzione esponenziale è sempre una funzione monotòna, strettamente positiva.

3.1. Equazioni esponenziali. L'ultima osservazione è molto importante, poiché significa, tradotta in termini "pratici", che tutti i valori della funzione sono diversi se le x di partenza sono diverse! detto in altri termini, se dovessimo risolvere una **equazione esponenziale,** ovvero un'equazione in cui compaiono solo funzioni esponenziali, sapremmo che -a parità di base- due di esse sono uguali solo se hanno gli stessi esponenti.

Esempio: Risolvere l'equazione $2^x = 2^{5x+1}$.

Soluzione: Dato che hanno la stessa base, esse sono uguali solo se gli esponenti lo sono, ergo:

$$x = 5x + 1 \quad \Rightarrow \quad -1 = 4x \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{4}.$$

□

Esemio: Risolvere l'equazione $4^{x+1} = 8^{2x-3}$.

Soluzione: Anche in questo caso, poiché riusciamo a scrivere le due esponenziali con la stessa base, riusciamo a risolvere l'equazione in pochi passaggi:

$$2^{2\cdot(x+1)} = 2^{3\cdot(2x-3)} \quad \Rightarrow \quad 2(x+1) = 3(2x-3) \quad \Leftrightarrow \quad 2x+2 = 6x-9$$

da cui:

$$11 = 4x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{11}{4}.$$

□

Si possono ricondurre alcune equazioni esponenziali a "forme note", utilizzando trucchi vari.

[14] Questa osservazione tornerà utile quando dovremo calcolare i limiti delle funzioni all'infinito, confrontando le "velocità di crescita" o, come si dice più propriamente, gli *ordini d'infinito* delle varie funzioni.

Esempio: Risolvere l'equazione $4^x + 2^x - 2 = 0$.
Soluzione: Riscriviamo l'equazione in modo più conveniente:

$$2^{2\cdot x} + 2^x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2^x)^2 + (2^x) - 2 = 0.$$

Evidentemente questa equazione è una *equazione di secondo grado* nella quantità 2^x. Se risolviamo l'equazione di secondo grado -ad esempio utilizzando la formula risolutiva- [15] si ottengono le due soluzioni -3 e 1. Queste due "soluzioni" però lo sono rispetto alla quantità 2^x, mentre noi cerchiamo i valori di x che risolvono l'equazione di partenza, per cui scriviamo che

$$2^x = -3 \quad \text{o} \quad 2^x = 1.$$

La prima scrittura è sbagliata: una funzione esponenziale è strettamente positiva, per cui non esistono valori di x per i quali 2^x assuma il valore -3. La seconda, invece, può essere risolta banalmente considerando che ogni numero, elevato zero, fa uno. Per cui la soluzione è $x = 0$.

□

Il reale problema, a questo punto, è risolvere equazioni per le quali si uguagliano potenze con basi "realmente" diverse, scritture del tipo:

$$3^{\text{qualcosa}} = 5^{\text{qualcos'altro}} \quad \Leftrightarrow \quad a^{q_1(x)} = b^{q_2(x)},\ a \neq b.$$

Per risolvere questo tipo di equazioni abbiamo però ancora bisogno di sviluppare un po' di "teoria".

4. Legge degli esponenti: progressioni ed esponenziali

Sembrerebbe che il primo a notare un collegamento tra le progressioni e le funzioni esponenziali sia stato l'immenso Archimede nella sua opera l'*Arenario,* discutendo sulla possibilità di scrivere numeri "molto

[15] Oppure considerando che le soluzioni hanno somma -1 e prodotto -2.

grandi" in modo convenzionale [16]. Questa osservazione di Archimede fu ripresa da vari studiosi, che però non la utilizzarono nel pieno della sua potenzialità, finché Nepero, nel suo trattato "Rabdologiae, seu Numerationis per Virgulas" del 1617, riuscì a capire come alleggerire i calcoli, sfruttando la **legge degli esponenti** [17] e scoprendo, di fatto, l'esistenza della **funzione logaritmica,** ché oggi noi conosciamo quasi unicamente come *funzione inversa* di quella esponenziale. Per diversi secoli la funzione logaritmica o, come si dice abbreviandone il nome, i **logaritmi** hanno rappresentato la più potente *calcolatrice* a disposizione dell'uomo: solo l'avvento delle calcolatrici elettroniche, in particolare di quelle scientifiche, attorno agli anni '60/'70 del XX secolo, ha fatto cadere in disuso l'utilizzo delle "tavole logaritmiche" nell'effettuare calcoli, non riuscendo comunque a sminuire minimamente l'importanza dei logaritmi stessi, nel loro utilizzo in Matematica e nelle scienze applicate: nessuno più utilizza i logaritmi per calcolare, ma solo per determinare soluzioni di problemi più o meno complicati o per risultati teorici.

La **legge degli esponenti** si basa su una osservazione che consente di mettere in relazione le progressioni aritmetiche con quelle geometriche; siano $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ e $a_m = a_1 \cdot q^{m-1}$ due termini di una P.G. e, per comodità, "scaliamo ancora di una posizione" gli indici al secondo membro, considerando il "termine base" uguale ad a_0, scrivendo:

$$a_n = a_0\, q^n \quad \wedge \quad a_m = a_0\, q^m.$$

Allora, ammesso che $a_0 = 1$ il loro prodotto occupa la posizione $(n + m)$-esima nella progressione e quindi al <u>prodotto</u> tra i due termini a_n e a_m si può far corrispondere una <u>somma</u>: ovvero, ad una P.G. si può

[16] Nel mondo greco non era noto il sistema posizionale e ci si limitava, arrivati ad un numero molto grande, di utilizzare la **miriade.** A quei tempi, di una miriade di miriade significava esprimere il numero più grande noto, equivalente a 10^8. Però Archimede aveva bisogno di andare oltre, essendosi prefissato il compito di dimostrare che ci sono numeri che sono più grandi del numero dei granelli di sabbia non solo delle spiagge di Siracusa, non solo della Sicilia intera, ma addirittura di tutte le spiagge del mondo nel quale anche al mare fosse stato sostituto con sabbia per quanto ne occupasse il suo volume! questo è il passo citato: "Alcuni pensano, o re Gelone, che il numero dei granelli della sabbia sia infinito in quantità: dico non solo quello dei granelli di sabbia che sono intorno a Siracusa e nel resto della Sicilia, ma anche quello dei granelli di sabbia che sono in ogni regione, sia abitata sia non abitata" [...] Ma io tenterò di mostrarti [...] che, dei numeri da noi denominati [...], alcuni superano non soltanto il numero dei granelli della sabbia aventi nell'insieme grandezza uguale alla Terra [...], ma anche della grandezza uguale al cosmo intero." (Archimede, Arenario).

[17] Di cui parleremo a breve.

far corrispondere una P.A. Nei fatti

$$a_n \cdot a_m = q^n \cdot q^m \;=\; q^{n+m} \;=\; a_{n+m}.$$

Ad esempio, consideriamo la P.G. il cui "0-esimo" termine è 1 e la ragione è 4. Allora il $a_4 = 4^4 = 256$ e $a_6 = 4^6 = 4096$. Se ora calcoliamo $a_4 \cdot a_6 = 256 \cdot 4096 = 1048576$. si ottiene il valore corrispondente al decimo termine: $a_{4+6} = a_{10} = 4^{10} = 1048576$. Questa semplice legge degli esponenti permetteva di trasformare un prodotto tra numeri in una somma: l'idea fu pienamente sfruttata da Nepero, che lavorò su queste idee per vent'anni, prima di pubblicare i propri risultati. Il punto chiave, che era sfuggito fino ai suoi tempi, era che, per poter applicare efficacemente la "legge degli esponenti" ad un prodotto qualsiasi di due numeri, è necessario che i termini della successione geometrica siano molto vicini tra loro e pensò, giustamente, che ciò si potesse ottenere utilizzando come ragione della progressione un numero molto vicino ad 1. Nei suoi lavori decise di assumere $a_0 = 10^7$ e la ragione pari a $1 - 10^{-7}$ che è, evidentemente, molto vicina ad 1. La "furbata" nella scelta della ragione, gli permise di calcolare i termini successivi, semplicemente sottraendo al termine precedente il numero ottenuto spostando la virgola decimale, di quest'ultimo, di sette posti [18] e quindi potè agevolmente calcolare i termini della P.G.. Nepero stesso calcolò, di fatto, le prime cento potenze della ragione ed i primi cinquanta termini della progressione $a_0 \cdot q^n = 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^n$. Questa progressione gli permise di determinare, per tutti i numeri N da 5 a 10 milioni, il numero L che risolve l'equazione:

$$N = 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$$

e chiamò L il **logaritmo** di N, essendo la parola "logaritmo" composta da due termini di origine greca: *logos* (ovvero "ragione" [19].) e *arithmos* (ovvero "numero").

Continuiamo ora la presentazione dei *logaritmi* per come si fa oggigiorno, tramite l'impostazione data da Eulero.

5. I logaritmi

Ritorniamo al problema di determinare la soluzione di un'equazione per la quale due esponenziali, con base diversa, sono uguagliati tra loro,

[18] Ovvero $a_n = a_{n-1} - a_{n-1} \cdot 10^{-7}$.

[19] O anche rapporto

ad esempio, anche banalmente,

$$2^x = 3.$$

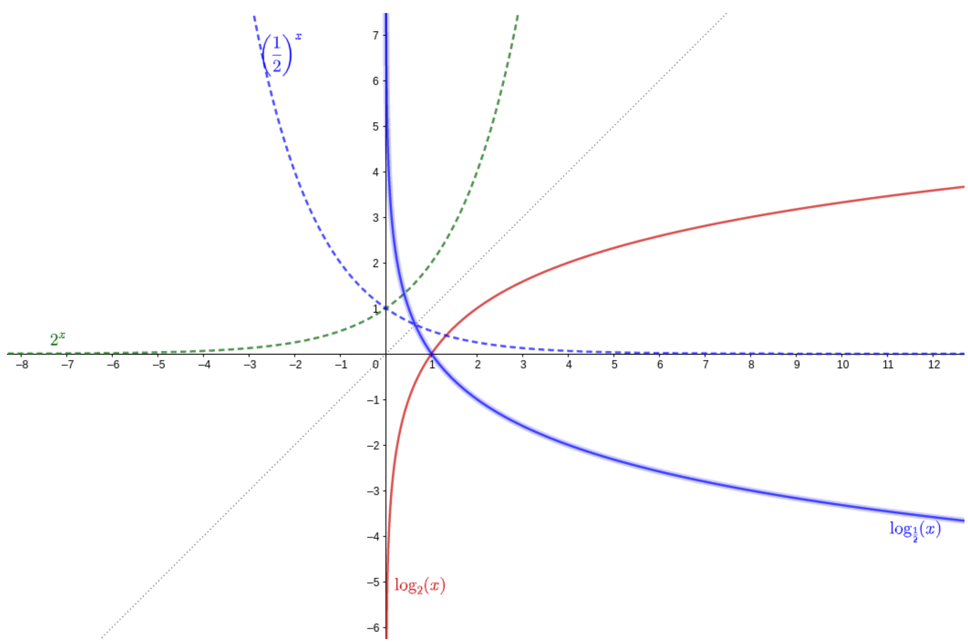
Sicuramente non si troverà alcun valore intero di x per il quale la potenza di due sia proprio tre. D'altra parte, dato che la funzione esponenziale $f(x) = 2^x$ è monotòna crescente e strettamente positiva, un *unico* valore di x per il quale essa assume il valore 3 deve esserci. Non potendo trovare tale valore con mezzi elementari, si conviene di indicarlo come "*quel numero che eleva* 2 *per ottenere* 3" e si indica con $\log_2(3)$. Per cui si ha $2^{\log_2(3)} = 3$ per definizione e tale numero prende il nome di **logaritmo in base due di tre.** In generale, si definisce il logaritmo di un numero, rispetto ad una base, come *quel numero che eleva la base per ottenere il numero dato:* è, in breve, l'elemento del dominio della funzione esponenziale a cui era stato associato il numero dato e letto nel codominio. Ovvero è proprio la *funzione inversa* della funzione esponenziale. Quindi riassumendo in formule:

$$\boxed{a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad \log_a(b) = x}.$$

Si osserva quindi che

$$a^{\log_a(b)} = b, \quad \text{ma anche} \quad \log_a(a^x) = x.$$

Osservazione: il logaritmo risponde affermativamente alla domanda: "Conoscendo il risultato di un elevamento a potenza e la base, si conosce anche l'esponente?"



Dato che la funzione logaritmica è inversa di quella esponenziale e quest'ultima è strettamente positiva, si deduce che non si possono calcolare logaritmi di numeri minori o uguali a zero. Inoltre, dato che l'esponenziale è monotona, anche la funzione logaritmica risulterà tale e tutte passeranno dal punto $(1, 0)$. Si noti la simmetria del grafico della funzione esponenziale e della sua inversa logaritmica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante [20].

Osservazione: Come abbiamo detto che la funzione esponenziale ha una "crescita molto veloce", la sua funzione inversa "invertirà" il comportamento: quindi la crescita delle funzioni logaritmiche sono *molto lente.* In verità, quando ci occuperemo di confrontare le velocità di crescita delle varie funzioni, vedremo che queste due funzioni, presentate in questo capitolo, rappresentano i comportamenti estremi: l'una la più veloce, l'altra la più lenta; tutte le altre funzioni si collocano tra la crescita logaritmica e la crescita esponenziale.

5.1. Proprietà dei logaritmi. Come abbiamo detto precedentemente, i logaritmi costituirono, per molto tempo, la calcolatrice più potente a disposizione per effettuare calcoli, specialmente prodotti e divisioni tra numeri "grandi". Questo fatto è dovuto alle *magiche proprietà* della funzione logaritmica che, tra le tante, hanno permesso anche di utilizzare una unica base per effettuare i calcoli partendo da una base qualsiasi [21]. Prima di illustrare tali proprietà e vedere qualche esempio di utilizzo, conviene ricordare le proprietà delle potenza, da cui dedurremo quelle dei logaritmi.

(1)
$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

(2)
$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

(3)
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

Intuitivamente, se la funzione "diretta" trasforma il prodotto in una somma, il quoziente in una sottrazione, allora la sua "inversa" dovrebbe trasformare la somma in prodotto e la differenza in quoziente: è quello che dimostreremo.

[20]Questo è sempre vero! tutte le funzioni inverse hanno il grafico che si può costruire da quello della funzione di cui sono l'inversa, semplicemente prendendone il grafico simmetrico rispetto alla retta $y = x$.

[21]Sarebbe stato inutilizzabile uno strumento di lavoro che avesse previsto una tabulazione di valori per ogni possibile base immaginabile di lavoro!

PROPOSIZIONE 6. *La somma di due logaritmi è il logaritmo del prodotto dei loro argomenti e la differenza è il logaritmo del quoziente degli argomenti. Inoltre il logaritmo di una potenza è il prodotto dell'esponente per il logaritmo della base di quella potenza* [22]*. In formule, dimostreremo queste tre proprietà, per una qualsiasi base* a *:*

(1)
$$\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(x \cdot y).$$
(2)
$$\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right).$$
(3)
$$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x).$$

Dimostrazione:

(1) Siano $a^b = x$ e $a^c = y$ equivalentemente $b = \log_a(x)$ e $c = \log_a(y)$. Allora $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ ovvero $x \cdot y = a^{b+c}$, equivalentemente $b + c = \log_a(x \cdot y)$ e quindi $\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(x \cdot y)$.

(2) Procedendo con passaggi analoghi a quanto fatto prima, l'unica cosa a cui dovremmo prestare attenzione è di scambiare il "$+$" con il segno "$-$" ed il prodotto con il quoziente: si invita il lettore a rifare tutti i passaggi per come indicato.

(3) Se y è un numero intero, la dimostrazione segue immediatamente dal punto primo, per y positivo; se invece y è negativo, segue dal punto secondo: ad esempio, $\log_a(x^3) = \log_a(x \cdot x \cdot x) = \log_a(x) + \log_a(x) + \log_a(x) = 3\log_a(x)$. Per $y \in \mathbb{Q}$, la dimostrazione segue dal fatto che ogni frazione $\frac{n}{m}$ si può vedere come il prodotto $\frac{1}{m} \cdot n$ per cui $\log_a(x^{\frac{n}{m}}) = \log_a(x^{\frac{1}{m}})^n = n\log_a(x^{\frac{1}{m}})$. Ma ora, se chiamiamo $y = \log_a(x^{\frac{1}{m}})$ allora [23] $m \cdot y = m\log_a(x^{\frac{1}{m}}) = \log_a(x^{\frac{m}{m}}) = \log_a(x)$ ergo: $\log_a(x^{\frac{1}{m}}) = \frac{1}{m} \cdot \log_a(x)$. Mettendo assieme questa uguaglianza con la precedente conclusione, per tutti gli esponenti razionali risulta verificata la proprietà. Per $y \in \mathbb{R}$ la dimostrazione la omettiamo, ma accenniamo al fatto che essa segue dalla *densità di* $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, ovvero dal fatto che ogni numero reale si può approssimare da due frazioni, una che l'approssima per difetto, l'altra per eccesso, la cui differenza può essere resa piccola a piacere.

c.v.d.

[22] Detta "terra-terra" l'esponente può essere "sceso" davanti al logaritmo.

[23] Dato che m è un intero.

Aggiungiamo ancora un'altra proprietà che chiameremo **cambio di base:** grazie alla possibilità di cambiare a piacimento la base, possiamo sceglierne una per effettuare le operazioni e convertire tutte le altre ad essa. Dato che il nostro sistema di numerazione è decimale, la base di riferimento, quando non è indicata, è **base** 10, però risulta molto conveniente utilizzare anche la base "e", che è un numero trascendente di cui discuteremo prossimamente, del valore approssimato di 2.7182, chiamato **numero di Nepero** [24]: quando viene scelta come base "e," al logaritmo si attribuisce anche il nome di **logaritmo naturale** e si indicherà con $\ln()$. Quindi $\ln(x)$ significa $\log_e(x)$.

PROPOSIZIONE 7 (Cambio base). *Volendo cambiare la base al logaritmo di una quantità, basta dividere il logaritmo nella nuova base, di quella quantità, per il logaritmo, nella nuova base, della base vecchia, in formule:*

$$\log_a(Q) = \frac{\log_b(Q)}{\log_b(a)}.$$

Dimostrazione: Partiamo dalla scrittura $x = \log_a(Q)$, equivalentemente $a^x = Q$, allora, applicando ad entrambi i membri il logaritmo in base b [25] si ottiene

$$\log_b(a^x) = \log_b(Q) \quad \Rightarrow \quad x \cdot \log_b(a) = \log_b(Q),$$

ma $x = \log_a(Q)$, e ciò basta per dimostrare la tesi.

c.v.d.

5.2. Risoluzione di equazioni esponenziali. Sfruttando le proprietà dei logaritmi e, in particolare, la loro monotònicità, possiamo risolvere equazioni esponenziali di tipo più generico. Ad esempio una del tipo di quelle lasciate in sospeso prima dell'introduzione dei logaritmi:

$$2^{x+3} = 3^{1-4x}$$

Applicando il logaritmo [26] ad entrambi i membri otteniamo

$$\log(2^{x+3}) = \log(3^{1-4x}) \quad \Leftrightarrow \quad (x+3)\cdot\log(2) = (1-4x)\cdot\log(3).$$

A questo punto l'equazione è diventata di primo grado in x e la risolviamo al solito modo, isolando l'incognita:

$$(\log(2) + 4\log(3)\,x = \log(3) - 3\log(2)) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\log(3) - 3\log(2)}{\log(2) + 4\log(3)}.$$

[24] Evidentemente ad onore dell'"inventore" dei logaritmi.

[25] Si ricordi che la funzione logaritmica è monotòna, il ché significa che due quantità uguali avranno anche gli stessi logaritmi e, viceversa, logaritmi uguali devono esserlo per quantità date uguali.

[26] Di base qualunque, quindi nemmeno la indichiamo!

Questo risultato si potrebbe ulteriormente "compattare" sfruttando le proprietà dei logaritmi al numeratore ed al denominatore, però poi la scrittura risulterebbe meno piacevole.

Si possono anche risolvere direttamente equazioni esponenziali di tipo logaritmico:

Esempio: Risolvere l'equazione

$$\log(3x+5) = \log(x^2+3x-4).$$

Soluzione: Sapendo che i logaritmi sono uguali solo se i loro argomenti lo sono, allora scriviamo

$$3x+5 = x^2+3x-4 \quad \Leftrightarrow \quad 9 = x^2,$$

da cui seguono due soluzioni

$$x_1 = -3 \quad \text{oppure} \quad x_2 = +3.$$

A questo punto ricordarsi sempre che i logaritmi di numeri negativi non possono essere trovati, quindi *bisogna controllare* che **gli argomenti** di tutti i logaritmi presenti nell'equazione iniziale **siano strettamente positivi:** evidentemente, per $x = x_1 = -2$ il primo argomento [27] risulta negativo e quindi questo valore deve essere scartato: non può essere soluzione dell'equazione di partenza. Per l'altro valore, invece, non ci sono problemi, quindi la soluzione è "solo" $x = 3$.

□

6. Disequazioni esponenziali

Per risolvere disuguaglianze tra quantità esponenziali, l'idea è sempre di sfruttare la monotònia delle funzioni e risolvere le uguaglianze associate: se si sa dove sono uguali due quantità, si saprà anche dove non lo sono e, in particolare, dove [28] una delle due è maggiore dell'altra, ovvero minore. Per lo studio del segno dei logaritmi ricordiamo solo che il punto $(1,0)$ è lo spartiacque tra i valori negativi ed i valori positivi della funzione: in particolare, con basi maggiori di uno, il logaritmo risulta negativo nell'intervallo $(0,1)$ e positivo per l'argomento maggiore di uno, per le basi comprese tra zero ed uno, la situazione si inverte. Quindi, per stabilire il segno delle funzioni logaritmiche, bisogna dapprima uguagliare l'argomento a 1, per sapere dove si annulla e poi, in base al valore che esce, testando l'argomento negli intervalli opportunamente individuati, si stabilisce il segno della funzione stessa.

[27] La quantità $3x+5$.

[28] Da tradurre "l'intervallo in cui".

Seguono alcuni esempi chiarificatori.

Esempio: Risolvere la disequazione:

$$3^x + 5 \cdot 3^{x+1} \geqslant 2^{2x+1}.$$

Soluzione: Intanto semplifichiamo la scrittura in modo di avere una potenza (dis)uguale ad un'altra:

$$3^x + 5 \cdot 3 \cdot 3^x \geqslant 2^{2x+1} \quad \Leftrightarrow \quad 16 \cdot 3^x \geqslant 2^{2x+1}.$$

Ora cerchiamo quando le due quantità sono uguali:

$$16 \cdot 3^x = 2^{2x+1} \quad \Rightarrow \quad \log(16) + \log(3^x) = \log(2^{2x+1})$$

da cui:

$$x\ \log(3) = (2x+1)\ \log(2) - \log(16) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\log(2) - 4\log(2)}{\log(3) - 2\log(2)}.$$

Quindi le due quantità risultano uguali per:

$$x = \frac{3 \cdot \log(2)}{2 \cdot \log(2) - \log(3)} \approx 7,228.$$

Ora testiamo la disequazione per $x = 0$, poscia per $x = 10$ [29]. Il primo membro, per $x = 0$ risulta essere $1 + 5 \cdot 3 = 16$, il secondo membro, invece, 2. Visto che la prima quantità è maggiore della seconda, allora la disuguaglianza è verificata per

$$x \leqslant \frac{3\ \log(2)}{2\log(2) - \log(3)}.$$

Giusto per controllare [30] in $x = 10$ il primo membro "viene" $16 \cdot 3^{10}$ il secondo 2^{21} : il primo membro è "sotto" il milione, mentre il secondo sopra i due milioni, quindi la disuguaglianza non è rispettata.

□

Esempio: Risolvere la disequazione:

$$15 \cdot 3^x + 3^{1-x} > 18.$$

Soluzione: Per risolvere la disequazione equivalente $15 \cdot 3^x + 3^{1-x} - 18 > 0$ cerchiamo i valori dell'incognita che risolvano l'equazione ottenuta cambiando il simbolo di disuguaglianza con quello di uguaglianza.

[29] Due valori qualsiasi uno prima e l'altro dopo il valore trovato come soluzione dell'equazione.

[30] Ma non ce ne sarebbe bisogno, avendo trovato un unico punto di separazione sulla retta numerica...

Pertanto, dopo semplici passaggi -che riportiamo di seguito- otteniamo:

$$15 \cdot 3^x + \frac{3}{3^x} - 18 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 15 \cdot (3^x)^2 + 3 - 18 \cdot 3^x = 0$$

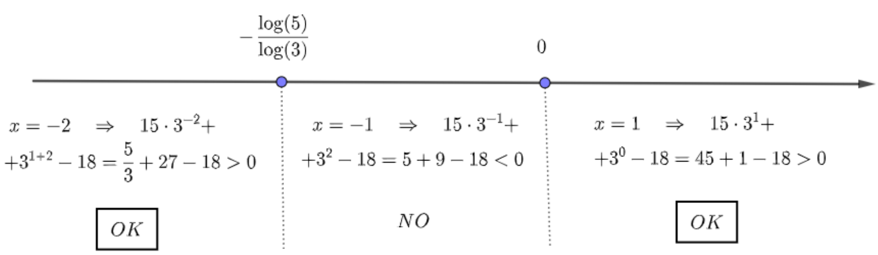
questa è una equazione di secondo grado in 3^x :

$$15 \cdot (3^x)^2 - 18 \cdot (3^x) + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3^x{}_{1,2} = \frac{9 \mp \sqrt{81 - 45}}{15} = \frac{9 \mp 6}{15}$$

quindi $3^x = \frac{1}{5}$ oppure $3^x = 1$ ergo [31] :

$$x = \frac{-\log(5)}{\log(3)} \approx -1,4649 \quad \text{oppure} \quad x = 0.$$

A questo punto dobbiamo testare la disuguaglianza prima di $-\frac{\log(5)}{\log(3)}$, tra questo valore e 0 e poi per $x > 0$. Procediamo scegliendo i tre valori $x = -2, x = -1$ e $x = 1$. Su una retta sistemiamo valori e calcoli effettuati, per rendere più comprensibile la situazione.



Pertanto la soluzione è:

$$x < -\frac{\log(5)}{\log(3)} \quad \vee \quad x > 0.$$

oppure, scritta in forma intervallare:

$$x \in (\,-\infty, -\frac{\log(5)}{\log(3)}\,) \cup (\,0, +\infty\,).$$

□

Esempio: Si studi il segno della funzione [32] :

$$f(x) = \log\left(\frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1}\right)$$

Soluzione: Per determinare il segno di una qualsiasi espressione dipendente da una o più variabili, bisogna trovare dapprima dove essa

[31] Si noti che $\log\left(\frac{1}{5}\right) = -\log(5)$.

[32] Ovvero indicare gli intervalli dove essa è positiva e gli intervalli dove invece è negativa.

non ha segno e ci sono solo due motivi per i quali una funzione non ha segno:

(1) Non ha segno perché non si può calcolare;
(2) Non ha segno perché vale zero [33].

Ora, quella funzione non si può calcolare se il suo argomento è minore o uguale a zero e, dato che l'argomento stesso è una frazione, anche se il denominatore di quella frazione si annullasse. Altresì possiamo dire che quella funzione si annulla se il suo argomento è uguale ad 1. Pertanto dobbiamo risolvere le seguenti tre equazioni:

$$\begin{cases} \text{Per annullare l'argomento:} & x^2+3x+1=0 \\ \text{Affinché esista la frazione:} & x^2-1=0 \\ \text{Affinché si annulli il logaritmo:} & \frac{x^2+3x+1}{x^2-1}=1 \end{cases}$$

La prima equazione fornisce i valori:

$$x_{1,2}=\frac{-3\mp\sqrt{5}}{2}.$$

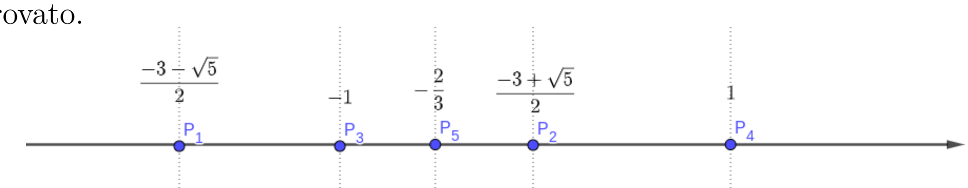
La seconda equazione i valori:

$$x_{1,2}=\mp 1$$

e, per risolvere l'ultima, ricordando che una frazione è uguale ad uno se e solo se numeratore e denominatore sono uguali [34], allora scriveremo:

$$\cancel{x^2}+3x+1=\cancel{x^2}-1 \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{2}{3}.$$

Riportiamo tutti i valori su una retta e poi ragioniamo su quanto trovato.



Considerando che $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\approx -2,618$, iniziamo col testare l'argomento per $x=-3:$ esso diventa:

$$\frac{(-3)^2+3(-3)+1}{(-3)^2-1}=\frac{1}{3}<1$$

da questo concludiamo, dato che l'argomento è tra zero ed uno, che quella funzione è negativa nell'intervallo delle x minori di P_1. Tra P_1

[33] E zero non ha segno.

[34] E diversi da zero.

e P_3 scegliamo $x = -2:$ in questo caso avremo l'argomento pari a:

$$\frac{(-2)^2 + 3(-2) + 1}{(-2)^2 - 1} = \frac{-1}{3} < 0$$

e quindi nell'intervallo considerato il logaritmo non può essere calcolato, ovvero non ha segno perché non esiste! Proseguiamo scegliendo $x = -\frac{5}{6}$, che corrisponde al punto medio tra P_3 e P_5. L'argomento risulta pari a:

$$\frac{\left(-\frac{5}{6}\right)^2 + 3\left(-\frac{5}{6}\right) + 1}{\left(-\frac{5}{6}\right)^2 - 1} = \frac{29}{1} > 1$$

ergo la funzione risulta in quell'intervallo positiva. Considerato che $\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \approx -0,381$, possiamo scegliere come valore della x appartenente all'intervallo P_5, P_2 il valore $x = -\frac{1}{2}:$ per tale valore l'argomento del logaritmo prende valore:

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = \frac{1}{3} < 1$$

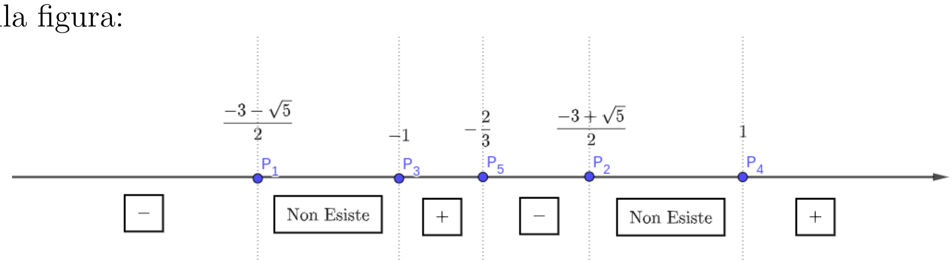
ergo la funzione risulta negativa. Mancano ancora due intervalli: per il penultimo intervallo scegliamo il valore $x = 0:$ l'argomento assume valore:

$$\frac{1}{-1} < 0$$

ergo la funzione non esiste nell'intervallo che va da P_2 fino a P_4. In ultimo, scegliamo $x = 2$ ed otteniamo l'argomento uguale a:

$$\frac{2^2 + 3 \cdot 2 + 1}{2^2 + 1} = \frac{11}{5} > 1$$

e quindi la funzione risulta positiva. Aggiungiamo al diagramma precedente i risultati trovati, in modo da leggere la situazione direttamente sulla figura:



Possiamo, pertanto, concludere:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \quad \text{per} \quad x \in (-1, -\frac{2}{3}) \cup (1, +\infty) \\ f(x) < 0 \quad \text{per} \quad x \in (-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}) \cup (-\frac{2}{3}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}) \end{cases}$$

e altrove o non esiste, oppure si annulla (per cui non ha segno).

□

Esempio: Risolvere la disequazione

$$\log_4(9x) - \log_{\frac{1}{4}}(x+1) < \log_2(3) + \log_4(x^2+1).$$

Soluzione: Intanto portiamo tutto alla stessa base per poi applicare le proprietà dei logaritmi e, all'uopo, osserviamo che $\log_a(b) = \log_{a^n}(b^n)$ e $\log_a(b) = -\log_{\frac{1}{a}}(b)$ [35].

$$\log_4(9x) + \log_4(x+1) < \log_4(9) + \log_4(x^2+1)$$

quindi

$$\log_4(9x \cdot (x+1)) < \log_4(9(x^2+1)).$$

Essendo logaritmi con le stesse basi, affinché il secondo sia maggiore del primo, deve essere [36] l'argomento del primo logaritmo minore di quello del secondo. Ergo:

$$\cancel{9x^2} + 9x < \cancel{9x^2} + 9 \quad \Rightarrow \quad x < 1.$$

Si osservi ora che non tutti i valori minori di uno possono essere accettati come soluzione di quella disequazione, infatti dando uno sguardo alla traccia dell'esercizio, evidentemente numeri inferiori a zero non sono ammessi [37]! pertanto la soluzione della disequazione è $x \in (0, 1)$.

□

[35] Provare a dimostrare entrambe le osservazioni (sono facili-facili).
[36] Questo è dovuto alla monotònia crescente del logaritmo in base 4.
[37] Si dica il perché!

CAPITOLO 9

Le successioni numeriche

Riprendiamo il discorso sulle successioni numeriche, iniziato nel precedente capitolo ed approfondiamone lo studio. Ricordiamo che una successione è semplicemente definita come una funzione da $\mathbb{N}$ ad S, dove il codominio S è un insieme di oggetti, elementi, numeri, quello che più ci fa piacere: la cosa importante è che $\mathbb{N}$ ha un ordine naturale che viene riportato, tramite la funzione, tra gli elementi dell'insieme S che risultano, conseguentemente, assegnati di posto. La notazione più comune, usata per indicare una successione di numeri è:

$$\begin{aligned} a_n : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto a_n \end{aligned}$$

Diremo che una **proprietà è <u>definitivamente verificata</u>** se essa vale per tutti i termini della successione a partire da un certo punto in poi: tradotto in termini simbolici, se P indica una qualche proprietà e con $a_n \in P$ intendiamo che il termine a_n gode della proprietà P, allora si scriveremo

$$\exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad a_n \in P.$$

Detto in questi termini significa che la proprietà è goduta dalla "maggior parte degli elementi" ovvero che solo "finitamente molti elementi" non godono di quella data proprietà. Quando si parla di qualche caratteristica degli elementi di un insieme, evidentemente è desiderabile che tale caratteristica sia presente nella maggior parte degli elementi dell'insieme stesso, ad eccezione di un numero esiguo di essi: ebbene, il concetto che abbiamo appena introdotto serve proprio a questo! un numero finito di elementi, a confronto di un'infinità di altri, è sempre comunque un numero "piccolo di elementi" che potrebbero essere esonerati dall'avere una data proprietà [1].

Esempio: La successione $1, 3, 2, 4, 4, 4, 4, 4\ldots$ che rimane sempre 4 in quei puntini sospensivi è *definitivamente constante:* infatti a partire dalla terza posizione, tutti i termini sono uguali a 4.

[1] Fossero anche un miliardo di elementi, sono sempre pochi rispetto all'infinità di elementi che sono presenti in una successione numerica.

Esempio: La successione $5, 4, 3, 4, 5, 6, \dots$ e poi continua con tutti i numeri naturali successivi è *definitivamente crescente,* dato che dal terzo termine in poi è costituita dalla successione dei numeri naturali.

Esempio: La successione dei reciproci dei numeri naturali $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ è *definitivamente positiva* [2] ed è anche *definitivamente minore di* $\frac{1}{10}$ dato che dall'undicesimo termine [3] tutti i termini sono minori di un decimo.

Osservazione: il fatto che si dica "esiste un indice a partire dal quale vale la proprietà" non significa che deve necessariamente essere individuato il più piccolo indice a partire dal quale la data proprietà è verificata (da tutti gli elementi seguenti): significa solo che da un certo punto in poi si può dire che quella proprietà è sempre vera! [4]

Prima di procedere oltre, introduciamo un po' di idee e terminologia della *topologia insiemistica* [5]

1. Intorni, insiemi aperti ed insiemi chiusi

Il discorso è molto più generale di quello che riguarda ed interessa le successioni e quindi consideriamo un insieme S, che potrebbe benissimo essere l'insieme dei valori nel codominio di una successione, ma in generale è solo un dato insieme. Un **intorno** dell'elemento $p \in S$ è un insieme $I \subseteq S$ tale che $p \in I$. Quindi, un intorno è semplicemente *un insieme che contiene p come suo elemento.* Se consideriamo S sottoinsieme della "retta numerica" $\mathbb{R}$, allora un modo semplice per trovare un intorno di p è di *aumentarne* un po' il valore e *diminuirlo* un po', per determinare un intervallo di valori al cui interno si trova proprio p : detto "ϵ" una quantità **piccola a piacere,** possiamo porre $I = (p - \epsilon, p + \epsilon)$ e questo è un intorno di p; anzi, visto che è "bello simmetrico" rispetto a p, lo chiamiamo **ϵ-intorno centrato in** p e lo indichiamo con $I_p(\epsilon)$ [6]. Il concetto di intorno, sebbene molto semplice,

[2] Lo è fin dal primo elemento!

[3] Ma anche dal 30-esimo termine!

[4] Giusto per fare una battuta, ma si potrebbe ben dire che, ad esempio, "ogni persona è definitivamente morta", dato che per ciascuno di noi arriverà il momento della morte e sopraggiunta la stessa, per la successione dei tempi successivi essa rimarrà una caratteristica definitivamente verificata!

[5] La **Topologia** è un importantissimo settore di studi della Matematica moderna; il suo nome deriva dall'unione di due temirni greci: topos e logos. Il primo termine significa "luogo" e il secondo "discorso" o "ragionamento". Quindi è quella "branca" della Matematica che si occupa di studiare le proprietà intrinseche dei luoghi/delle figure. Noi non approfondiremo il discorso topologico, ma utilizzeremo le idee base, da cui principia lo studio della Topologia e preciseremo alcune nozioni con la terminologia che in Topologia si utilizza di frequente.

[6] Diremo anche che ϵ è il "raggio" dell'intorno I.

è di fondamentale importanza per tutto quanto diremo dopo.

Esempio: Dato il punto 2 sulla retta numerica, allora un suo intorno potrebbe essere $I = (0, 10)$. Ma anche $(1.5, 2.1)$ o ancora $(1.99, 2.01)$ ecc...

Un insieme si dirà **aperto** se è possibile trovare, per ogni suo punto, un intorno tutto contenuto nell'insieme stesso. Questa definizione è abbastanza delicata, per cui ci soffermeremo un po' a chiarirne il significato. Consideriamo un intervallo estremi inclusi $[a, b]$, per tutti i punti dell'intervallo, ad eccezione di a e b un intorno che sia completamente contenuto nell'intervallo lo si riesce a trovare: basta pensare che un punto p, pur "vicinissimo" ad a, [7] comunque ha una distanza non nulla da a, essendo distinto da a stesso, ergo si può scegliere [8] $\epsilon = \frac{a+p}{2}$ e sicuramente l'intervallo $(p - \epsilon, p + \epsilon)$ sarà tutto incluso in $[a, b]$. Però per i punti a e b si pone il problema che un loro qualsiasi intorno mai sarà interamente contenuto nell'intervallo di cui sono gli estremi: infatti non appena si diminuisca a di pochissimo o si aumenti b di pochissimo, si esce dall'intervallo stesso. Quindi possiamo dire che $[a, b]$ *non è* un insieme aperto. Se però eliminiamo gli estremi e considerassimo l'insieme dei valori che vanno da a a b esclusi questi due punti, allora l'intervallo (a, b) risulta aperto! nei fatti, per quanto ci spostassimo a ridosso di a o di b, non essendo questi due valori/punti inclusi nell'intervallo, tra essi ed il punto che andassimo a considerare si potrebbe sempre trovare un altro punto -corrispondente, ad esempio, al punto medio tra l'estremo in considerazione ed il punto prescelto- che possiamo utilizzare a mo' di "ϵ" per trovare un intorno completamente incluso nell'intervallo [9]. Quindi (a, b) rappresenta un insieme aperto. Un elemento si chiama **punto di accumulazione** per l'insieme S se ogni suo intorno contiene elementi di S oltre, possibilmente, se stesso. Attenzione che non è scritto da nessuna parte che il punto di accumulazione debba appartenere all'insieme! Questo è un altro dei concetti fondamentali che è bene chiarire con un esempio.

Esempio: Si consideri l'insieme aperto (a, b). Abbiamo già visto che a e b non ammettono intorni completamente contenuti nell'intervallo stesso. Però hanno la caratteristica che, qualsiasi loro intorno

[7] O di b per il quale vale lo stesso discorso.

[8] Il valore medio tra p e a.

[9] Esattamente come fatto precedentemente.

intersecherà l'intervallo (a, b), pur non essendo loro dentro tale intervallo: ad esempio, se l'intorno di a è $I_a(\epsilon)$ allora la parte dell'intervallo da a fino a $a+\epsilon$ è sempre dentro l'intervallo (a, b) e quindi, qualsiasi sia ϵ, punti di (a, b) che stanno in tale intorno si troveranno sempre! idem succede per qualsiasi intorno di b, per la "parte sinistra", ovvero per tutti gli elementi dell'intervallo $(b-\epsilon, b)$, che sono necessariamente elementi dell'intervallo (a, b) [10].

Elementi, per i quali esiste un intorno completamente contenuto nell'insieme S, si chiameranno **punti interni** all'insieme. È giusto una banale osservazione che tutti i punti interni sono anche punti di accumulazione dell'insieme stesso [11]. Siamo di fronte ad un fatto interessante: l'intervallo (a, b) è costituito tutto da punti interni, gli estremi dell'intervallo a e b sono punti di accumulazione che non appartengono all'intervallo stesso, mentre tutti gli altri punti (interni) sono anche punti di accumulazione di (a, b). La differenza tra l'intervallo $[a, b]$ e (a, b) è essenzialmente che il primo contiene tutti i suoi punti di accumulazione, mentre il secondo no. Spinti da questa osservazione definiamo **chiuso** un insieme a cui appartengono tutti i propri punti di accumulazione, mentre l'insieme è aperto -per come già detto, ma lo diciamo altrimenti- se tutti i propri punti sono punti interni.

Se S è un insieme, allora con S° indichiamo l'insieme dei punti interni, detto anche l'**apertura** di S. Con S' indichiamo l'insieme dei punti di accumulazione di S, detto **insieme derivato** e con $\bar{S} = S \cup S'$ definiamo la **chiusura dell'insieme** S, ovvero l'unione tra S e l'insieme di tutti i suoi punti di accumulazione. I punti corrispondenti alla differenza tra la chiusura e l'apertura di un insieme vengono definiti **punti di frontiera** o **bordo** dell'insieme: esso si indica con $\partial S = \bar{S} \setminus S^\circ$. Tra gli elementi di un insieme S, possono esserci degli elementi, per i quali esistono degli intorni che, dell'insieme di partenza, non contengono altri elementi se non quello preso in considerazione: questi si chiamano **punti isolati.** Un insieme i cui elementi sono solo punti isolati si chiama **insieme discreto.** Osserviamo che i punti isolati non possono essere interni, né di accumulazione e, pertanto, sono "confinati" direttamente sul bordo dell'insieme. Finiamo la nostra brevissima introduzione alla topologia insiemistica definendo **maggiorante** di un

[10] Chiaramente per ϵ arbitrariamente, ma sufficientemente, piccolo.
[11] Perché?

insieme S ogni elemento che sia "più grande" [12] di ogni altro elemento dell'insieme S e **minorante** ogni elemento che sia "più piccolo" di tutti gli elementi di S. Un insieme per il quale si possa esibire un maggiorante [13] è detto **superiormente limitato,** altresì si dice che l'insieme è **inferiormente limitato** se si può trovare almeno un minorante. Se un insieme è limitato superiormente ed inferiormente, lo si chiamerà **limitato** tout-court. Il più piccolo dei maggioranti prende il nome di **estremo superiore** dell'insieme e si indica con $\mathrm{Sup}(S)$, mentre il più grande dei minoranti viene chiamato **estremo inferiore** ed è indicato con $\mathrm{Inf}(S)$. Se $\mathrm{Sup}(S) \in S$ esso prenderà il nome di **elemento massimo,** se invece è $\mathrm{Inf}(S) \in S$, l'estremo inferiore si chiamerà anche **elemento minimo** [14]. *È bene meditare su cosa significhi realmente essere estremo superiore o inferiore:* dire che, ad esempio, il $\mathrm{Sup}(S)$ è il più piccolo dei maggioranti significa che "diminuendolo" di una quantità piccola a piacere, esso non è più un maggiorante, ovvero debbonsi avere elementi dell'insieme che siano più grandi della quantità trovata. Affermazione analoga vale per l'altro estremo, aumentandolo di poco e trovando elementi dell'insieme che siano più piccoli della quantità determinata con quell'aumento. Un esempio chiarirà la situazione.

Esempio: Dare una descrizione "topologica" dell'insieme definito come segue:

$$S = (-5, 1] \cup \{2, 3, 4\} \cup [10, 15].$$

Risposta: Una descrizione topologica consiste nel rispondere ad una serie di domande: è un insieme limitato [15]? quali sono l'$\mathrm{Inf}(S)$ e il $\mathrm{Sup}(S)$? Ha elemento massimo o minimo? quale è l'insieme dei punti interni S°? quale quello dei punti di accumulazione S'? quale è la chiusura $\bar{S}$? ed il bordo ∂S? quali sono i punti isolati? Nel caso dell'esempio possiamo dire:

- Un maggiorante è 30 ed un minorante è -10 quindi l'insieme è limitato sia superiormente che inferiormente [16] ovvero è un **insieme limitato.**
- Il più piccolo dei maggioranti è 15 : infatti diminuendo di una quantità piccola a piacere ϵ questo numero, ci saranno elementi di S che sono maggiori di $15-\epsilon$. D'altra parte il più

[12] Anche se non strettamente più grande!

[13] E quindi ammette un'infinità di maggioranti!

[14] Elemento massimo ed elemento minimo si indicano, rispettivamente, con $\max(S)$ e $\min(S)$.

[15] Superiormente o inferiormente

[16] Si potevano scegliere due numeri qualsiasi che fossero l'uno maggiore e l'altro minore di ogni altro numero che costituisce l'insieme S.

grande dei minoranti è -5 infatti, aumentando tale numero di una quantità piccola a piacere τ, ci saranno elementi di S che sono minori di $-5+\tau$. Notiamo che $15 \in S$ ma $-5 \notin S$, per cui il primo numero rappresenta anche l'elemento massimo, ma il secondo non è l'elemento minimo [17]. Riassumendo, per questo punto, non c'è $\min(S)$ e

$$\mathrm{Sup}(S) = -15 = \max(S), \quad \mathrm{Inf}(S) = -5.$$

- L'insieme dei punti interni, che per definizione ammettono intorni completamente contenuti nell'insieme stesso, è

$$S^{\circ} = (-5, 1) \cup (10, 15).$$

- I punti di accumulazione, ogni intorno dei quali contiene sempre punti dell'insieme, oltre al "valore" di cui sono l'intorno, è

$$S' = [-5, 1] \cup [10, 15].$$

- La chiusura di S, ottenuta "aggiungendo" all'insieme S i suoi punti di accumulazione, è

$$\bar{S} = S \cup S' = [-5, 1] \cup \{2, 3, 4\} \cup [10, 15].$$

- I punti di frontiera, sono quelli che "rimangono" se dalla chiusura togliamo tutti i punti interni:

$$\partial S = \bar{S} \setminus S^{\circ} = \{-5, 1, 2, 3, 4, 10, 15\}.$$

- I punti isolati sono 2, 3 e 4.

□

La descrizione fatta nell'esempio precedente è completa di ogni parte e speriamo sia abbastanza chiarificatrice dei concetti esposti: si può utilizzare come modello per poter studiare altri insiemi di cui volessimo dare una descrizione topologica. Si raccomanda, comunque, di esercitarsi nel descrivere *subito* qualche altro insieme, ad esempio: [18]

$$S = \left\{1 - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\} \cup [2, 3).$$

□

[17] Dovrebbe sembrare per lo meno strano che un insieme limitato inferiormente non abbia un elemento *più piccolo di tutti gli altri!*

[18] A parte che si invita sempre d'affrontare tutti gli esercizi attinenti un dato argomento, proposti nell'ultimo capitolo del libro, prima di "passare ad altro".

2. I punti limite delle successioni

Forti delle idee e della terminologia offerti dalla Topologia insiemistica, siamo ora pronti a presentare uno dei concetti più importanti e sottili della Matematica di tutti i tempi. Sia data una successione (numerica) a_n e supponiamo che esista un numero a con la proprietà che per qualsiasi suo intorno *arbitrariamente piccolo,* definitivamente la successione appartenga a quell'intorno, allora diremo che la **successione converge** al numero a e quest'ultimo lo denomineremo anche **limite** (finito) della successione a_n. Osserviamo che la successione, come insieme di valori, è necessariamente un insieme discreto di punti, mentre il limite, per come definito testé, rappresenta un punto di accumulazione per l'insieme dei valori della successione. Dal fatto la successione deve appartenere definitivamente ad ogni intorno comunque piccolo del punto limite, allora tale punto di accumulazione deve essere necessariamente unico [19]. Come simbolismo, nella situazione presentata or ora, si usa scrivere $\boxed{a_n \to a}$ o anche $\lim_n a_n = a$.

Esempio: La successione $a_n = \frac{1}{n}$ è convergente a 0. Infatti sia dato un qualsiasi intorno comunque piccolo dello zero, ad esempio $I_0(\epsilon) = (-\epsilon, \epsilon)$ con ϵ arbitrariamente piccolo, allora ci sarà sempre una frazione $\frac{1}{\bar{n}}$ tale che $\frac{1}{\bar{n}} < \epsilon$. Evidentemente tutte le frazioni successive a questa, ottenute per $n > \bar{n}$ saranno comunque minori di ϵ e quindi tutta la successione, definitivamente, entra nell'intorno di $I_0(\epsilon)$ [20].

Definiamo, come si usa fare solitamente, le successioni convergenti a zero essere delle **successioni infinitesime.**

Esempio: La successione $a_n = \frac{2n+1}{n-1}$ è convergente a 2. Infatti, effettuando la divisione tra i due polinomi, si ottiene l'uguaglianza:

$$a_n = 2 + \frac{3}{n-1} \to 2,$$

dato che il secondo addendo è una successione infinitesima, esattamente come quella di prima [21] .

Le successioni non devono essere necessariamente convergenti ad un numero: un esempio lampante è *la successione dei numeri naturali.* Essa non converge ad alcun numero, però ha la proprietà che *qualsiasi*

[19] Come dimostreremo a breve.

[20] Ovvero, una volta entrato in quell'intorno, non lo lascia più!

[21] Nei fatti $\frac{3}{n-1} = 3 \cdot \frac{1}{n-1}$ e ponendo la successione $b_n = a_{n+1} = \frac{1}{n}$ si ritorna esattamente alla successione infinitesima presentata nell'esempio precedente. Per cui $\frac{3}{n-1} = 3 \cdot$ "qualcosa che tende a zero" $\to 0$.

numero arbitrariamente grande si possa fissare, la successione diventa definitivamente maggiore di quel numero. Quando succede questo fatto qui, allora la successione si dice **divergere** positivamente. Se invece la successione diventa definitivamente più piccola di una quantità arbitrariamente grande in negativo, allora essa si dirà **divergente** negativamente. Altra terminologia utile è dire, per le successioni positivamente divergenti, che esse "tendono a" $+\infty$ ovvero $a_n \to +\infty$. Se la successione è negativamente divergente, allora diremo che il limite è $-\infty$ e scriveremo $a_n \to -\infty$. C'è un terzo caso, per il quale si dirà che la successione è **indeterminata,** ovvero che il limite non esiste: consideriamo, ad esempio, la successione $a_n = (-1)^n$. Questa successione non ha un punto limite, infatti, anche se è vero che ogni intono di -1, così come ogni intorno di 1, contiene infiniti termini della successione [22], mai succederà che definitivamente la successione starà in uno solo dei due intorni di -1 o di 1. Insomma, infinite volte entra in ciascun intorno ed infinite volte "ci esce"!

Ricapitolando, data una successione a_n, essa può essere "convergente" ad un numero finito ($a_n \to a$), "divergente" all'infinito ($a_n \to +\infty$ positivamente o $a_n \to -\infty$ negativamente) oppure essere "indeterminata": questi casi sono mutuamente escludentesi.

2.1. Calcolo dei limiti di successione. Capire il concetto di limite è una cosa, saperlo calcolare è un'altra: noi faremo poche considerazioni utili che permetteranno di stabilire il carattere di una successione, in modo abbastanza veloce e senza grossi calcoli. Ci atterremo alla massima di Guglielmo di Occam: *"Frustra fit per plura quod fieri potest per pauciora"* [23]. Come ormai diciamo da anni: i limiti [24]si devono saper calcolare "ad occhio", il ché significa che se si fanno troppi passaggi, c'è qualcosa che non va.
Partiamo quindi con questa semplice osservazione:

"Se a_n diverge, la sua reciproca $\frac{1}{a_n}$ è infinitesima" [25].

[22]Di fatto, tutti i termini "pari" sono uguali ad 1, quindi appartengono ad un qualsiasi intorno di detto numero, mentre tutti i termini dispari sono uguali a -1 e quindi stanno in un qualsiasi intorno di -1. Addirittura, quindi, ci stanno infinitamente molti termini della successione in un intorno comunque piccolo di -1 ed altrettanti infinitamente molti termini che stanno in un intorno arbitrariamente piccolo di 1.

[23]Ovvero, "È frustrante fare con il più, ciò che può essere fatto col meno" detto in altro modo: **non c'è convenienza a complicare ciò che è semplice di suo!**

[24]E non solo di successioni, ma anche di funzioni in generale, argomento di cui ci occuperemo tra qualche capitolo.

[25]E viceversa.

Per essere maggiormente chiari, consideriamo la successione:

$$10,\ 100,\ 1000,\ \ldots$$

che sta diventando vieppiù grande, allora la successione dei reciproci:

$$\frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ldots$$

sta diventando vieppiù piccola. Non c'è nemmeno bisogno di una dimostrazione formale! comunque sia, poniamo che a_n sia una successione (positivamente) divergente, allora possiamo dire che definitivamente essa diventa maggiore di una quantità arbitrariamente grande, che chiamiamo, per comodità, M. Ma se M è arbitrariamente grande, allora $\frac{1}{M}$ sarà una quantità arbitrariamente piccola e, dato che deve esistere un $\bar{n}$ tale per cui, per $n > \bar{n}$, $a_n > M$ allora sarà anche vero che per $n > \bar{n}$ $\frac{1}{a_n} < \frac{1}{M}$, ergo, la successione dei reciproci, è definitivamente minore di una quantità arbitrariamente piccola: evidentemente $\left(-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}\right)$ è un intorno dello zero e questo basta [26] .

Riassumendo con un simbolismo efficace e diretto, indicando con q una generica *quantità*:

$$\boxed{\frac{1}{q \to \infty} \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{q \to 0} \to \infty}.$$

2.2. Equivalenza di successioni all'infinito. Introduciamo delle idee ed una terminologia che ci accompagnerà anche nel corso degli studi futuri e partiamo con l'osservazione [27] :

$$\frac{A}{B} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A = B.$$

Questa fatto motiva la prossima successiva definizione: due successioni si dicono **equivalenti** se il loro rapporto tende a 1, ovvero, pur non essendo esse costituite dagli stessi identici termini, al crescere di n questi termini tendono a diventare dello stesso valore. Possiamo ancora dire che "definitivamente il rapporto si avvicina ad uno a meno di una quantità arbitrariamente piccola", o ancora, "definitivamente la differenza tra i termini delle due successioni è infinitesima". Comunque la si dica, se due successioni sono equivalenti [28] allora è lecito scambiarle all'occorrenza per il calcolo dei limiti in cui sono coinvolte:

[26] In modo analogo si può dimostrare che se $a_n \to 0$ allora $\frac{1}{a_n} \to \infty$.

[27] Ammesso di trattare quantità diverse da zero.

[28] Sottintenderemo sempre "nel limite"

in effetti, definitivamente, esse sono da considerarsi "uguali"! Quando due successioni sono equivalenti scriveremo:

$$\boxed{a_n \sim b_n}$$

e, ricordiamo, questa scrittura significa $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Per rendere operativa l'equivalenza delle successioni, bisogna ora definire qualche equivalenza nota: la prima costituisce la tesi del prossimo teorema.

Proposizione 8. *Se P_n è una successione definita tramite un polinomio nella variabile n allora essa equivale al suo monomio di grado massimo. In formule:*

$$P_n = a_0 + a_1 \cdot n + a_2 \cdot n^2 + \cdots + a_k \cdot n^k \sim a_k \cdot n^k.$$

Dimostrazione: Consideriamo il rapporto $\frac{P_n}{a_k\, n^k}$ ed applichiamo la proprietà distributiva, ottenendo:

$$\frac{a_0}{a_k\, n^k} + \frac{a_1\, n}{a_k\, n^k} + \frac{a_2\, n^2}{a_k\, n^k} + \cdots + \frac{a_k\, n^k}{a_k\, n^k},$$

che si riscrive come:

$$\frac{a_0}{a_k} \cdot \frac{1}{n^k} + \frac{a_1}{a_k} \cdot \frac{1}{n^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{a_k} \cdot \frac{1}{n} + 1.$$

Tutti gli addendi ad eccezione dell'ultimo, che è 1, sono del tipo $\frac{1}{q \to \infty}$ e quindi convergono a zero, ergo

$$\frac{P_n}{a_k\, n^k} \to 1.$$

c.v.d.

Esempio: Si calcoli il limite della successione:

$$a_n = \frac{2 + 3n^2 - 4n^5}{1 + 2n - 3n^4 + 2n^5}.$$

Soluzione: Sostituiamo per ciascun polinomio al numeratore ed al denominatore il proprio monomio-equivalente, scrivendo

$$a_n \sim \frac{-4n^5}{2n^5} = -2$$

pertanto $a_n \to -2$.

□

Osservazione: non dovrebbe essere difficile convincersi che vale l'affermazione di carattere più generale [29] : *"Una successione formata da una somma di potenze qualsiasi di n, equivale alla potenza massima presa assieme al suo coefficiente numerico."*

Esempio: Determinare il limite della successione:

$$a_n = \frac{\sqrt{n^4 + 2n - 3} + 2n(n+1)}{\sqrt{n-1} + 5n^2 + 3n\sqrt{n^2 + n + 1}}.$$

Soluzione: Consideriamo solo le potenze di ordine maggiore, ottenendo l'equivalenza:

$$a_n \sim \frac{\sqrt{n^4} + 2n^2}{5n^2 + 3n^2} = \frac{3n^2}{8n^2} = \frac{3}{8},$$

per cui $a_n \to \frac{3}{8}$.

□

Esempio: Calcola il limite:

$$\lim_n \frac{\sqrt[3]{n^5 + n + 1} - 3n}{4n\sqrt{n^3 - 1} + 2}$$

Soluzione: La successione equivale a:

$$\frac{n^{\frac{5}{3}} - 3n}{4n \cdot n^{\frac{3}{2}}} \sim \frac{n^{\frac{5}{3}}}{4\,n^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{4\,n^{\frac{5}{6}}} \to 0,$$

essendo del tipo $\frac{1}{q \to \infty}$.

□

3. Ordini di infinito

Appreso come si "gestiscono" le potenze, vediamo ora come comportarci in presenza di altri tipi di leggi funzionali. A grandi linee possiamo distinguere tre tipi principali di famiglie di funzioni:

- **Algebriche:** che coinvolgono solo le quattro operazioni e l'elevamento a potenza, ammessa pure quella con indice razionale [30].
- **Trascendenti goniometriche:** quelle che si "costruiscono" a partire dalle funzioni $\sin()$ e $\cos()$.
- **Trascendenti esponenziali:** Tutte le funzioni esponenziali e logaritmiche.

[29] La dimostrazione è sulla falsariga di quella effettuata per la proposizione precedente, per cui la lasciamo come esercizio al lettore volenteroso.

[30] Quindi anche le estrazioni di radici quadrate, cubiche ecc...

Della prima famiglia abbiamo imparato “praticamente tutto”: manca solo la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e quelle riconducibili ad essa, che assume particolare importanza e viene trattata a parte [31]. Ora ci occupiamo delle altre, facendo un discorso di carattere generale, che ci permetterà di gestire anche le compresenze di più d’una di esse in una stessa successione. Presentiamo una operazione tanto semplice quanto potente che è quella del **confronto.** In Matematica i confronti vengono fatti sempre tramite rapporto: quindi, consideriamo una “*quantità* $Q_1 = Q_1(n)$” ed una “*quantità* $Q_2 = Q_2(n)$” [32], che possono benissimo essere i termini generici di due successioni e mettiamoli a rapporto $\frac{Q_1}{Q_2}$. Ora ci possono essere tre casi: il primo quando la Q_1 cresce più velocemente di Q_2, in tal caso il rapporto risulta divergente. Possiamo immaginare che il numeratore è il patrimonio di un multimilionario che ogni giorno guadagna $10\,k$ euro ed il denominatore quello di un operaio che accumula 5 euro ogni fine giornata. È evidente che, alla lunga, il patrimonio dell’operaio risulta trascurabile rispetto a quello del multimilionario e quindi potremmo dire che quest’ultimo è straordinariamente grande rispetto a quello dell’operaio. Con linguaggio pittoresco si dice che: “*il numeratore trascina la frazione all’infinito*”. Il secondo caso contempla la velocità di crescita di Q_2 maggiore di quella di Q_1. È la situazione “invertita” della precedente e quindi, se in quella la frazione divergeva, ora deve diventare infinitesima. Anche per questo caso possiamo dare un’immagine chiara di quello che accade, pensando al numeratore come all’impasto della pizza, che cresce mano a mano che lievita ed al denominatore come il numero degli invitati che, entusiasticamente iniziamo a chiamare, mano a mano che vediamo crescere l’impasto! diciamo: “Accidenti quanto cresce! quasi quasi invito tutta la mia classe, tanto ce n’è abbastanza per tutti”. Dopo un po’ diciamo: “Che bello! cresce così bene che quasi quasi invito tutta la scuola”. Dopo un po’, troppo entusiasticamente, invito -per la stessa pizza che uscirà da quell’impasto- tutte le scuole di Catanzaro... poi quelle della Provincia, della Regione, dell’Italia ecc... È evidente che più persone invitiamo e più è piccola la fetta che spetterebbe a ciascuno, se poi sono troppi gli invitati... a ciascuno non andrebbe nulla! Ecco, questa è la situazione in cui ci siamo cacciati per troppa superficialità o troppo ottimismo. L’ultimo caso è quando le velocità di crescita sono uguali: in questo caso uscirà sempre un numero diverso da zero, dato che Q_1

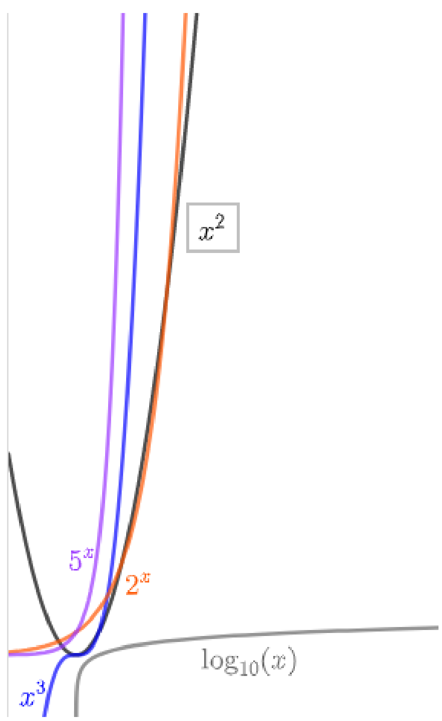
[31] Tra pochissimo vedremo che essa è convergente e *definisce* il numero “e” di Nepero.

[32] Le scritture significano soltanto che queste due quantità dipendono da un numero n, o meglio, potrebbero dipendere da esso.

risulta equivalente a Q_2 a meno di un fattore moltiplicativo. Possiamo riassumere la situazione nello schema seguente, non prima di definire l'**ordine di infinito,** indicato con $\operatorname{ord}_\infty$, la velocità con la quale una quantità cresce all'infinito.

$$\lim_n \frac{Q_1}{Q_2} = \begin{cases} \infty & \operatorname{ord}_\infty(Q_1) > \operatorname{ord}_\infty(Q_2) \\ 0 & \operatorname{ord}_\infty(Q_1) < \operatorname{ord}_\infty(Q_2) \\ N \neq 0 & \operatorname{ord}_\infty(Q_1) = \operatorname{ord}_\infty(Q_2) \end{cases}$$

Stabilito come confrontare due quantità, rimane sempre il compito di definire le velocità di crescita per le varie funzioni. Il modo più semplice è di *vederle* direttamente in un prospetto grafico [33] . Una cosa che dovrebbe apparire chiaro è che le funzioni costanti o limitate, tipo seno e coseno, non crescendo oltre una certa soglia, nei confronti tra "infiniti" *perdono* sempre. Osserviamo ora il grafico seguente, in cui abbiamo riportato la funzione $log(n)$, un paio di potenze di n ed un paio di funzioni esponenziali del tipo a^n, $a > 1$.



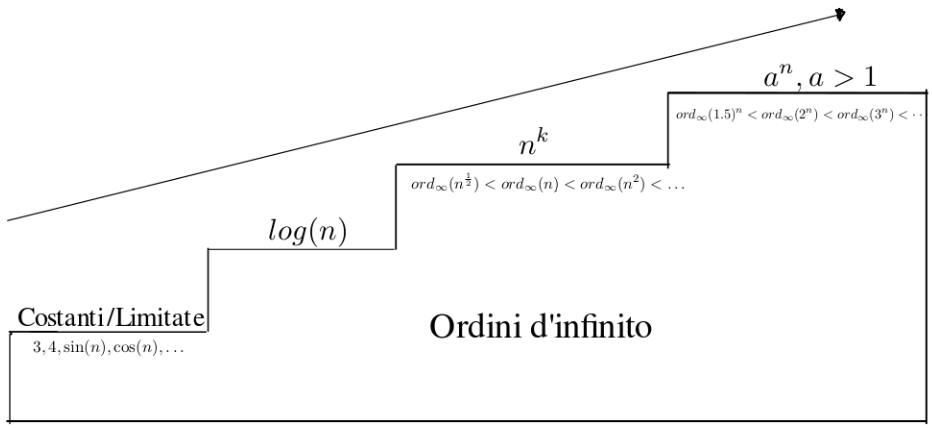
Banalmente, fissato $n > 1$, se l'eleviamo ad un numero e poi ad un esponente maggiore, la seconda potenza risulterà maggiore della prima: $n^a < n^b$ se $a < b$. Ma è anche vero che a parità di esponente, più è grande la base e maggiore è il risultato finale, ovvero: $a^n < b^n$ se $1 < a < b$. Poi, la funzione logaritmica è stata sfruttata proprio per la sua "crescita lenta", fin da quando è stata creata. Abbiamo quindi questa situazione: al vertice degli ordini d'infinito si trovano le funzioni esponenziale, in ordine di crescita della base [a]. Ad un gradino sotto delle esponenziali stanno tutte le potenze di n in ordine di crescita dell'esponente [b].

[a]Quindi, ad esempio, $\operatorname{ord}_\infty(2^n) < \operatorname{ord}_\infty(5^n)$ come si vede anche nel grafico affianco.

[b]E quindi, ad esempio, $\operatorname{ord}_\infty(n^4) > \operatorname{ord}_\infty(n^3)$

[33]Fermo restando la possibilità di dimostrare, quanto si dirà, con pignoleria per via analitica! a questo livello di studio ci accontentiamo di osservare direttamente i fatti.

Infine si collocano le funzioni logaritmiche [34] e, come “scartine” si piazzano le funzioni costanti/limitate. Possiamo rappresentare la situazione nel seguente diagramma a scala.



Vale la massima: **“il più forte vince”** ovvero la funzione, che sta più in alto nella scala, è quella che conta di più rispetto a tutte le altre ergo, a questo punto, esse si possono “*cestinare*”, ovvero eliminare direttamente dall'espressione della successione.

Esempio: Determinare il limite della successione

$$a_n = \frac{\sin(2n+\pi) + \log(n^9 + 5n + 3) + n^8}{n\sqrt{n^4 + n^3 + 5n + 1} + n^2[(\log(n^{10}) + n^4 \cdot \sqrt{4n^4 + 2n^2 + 1}]}.$$

Soluzione: Al numeratore eliminiamo la funzione seno, essendo limitata, tutto il logaritmo, essendo di ordine inferiore rispetto a qualsiasi potenza di n. Al denominatore eliminiamo, da sotto la radice, tutti gli addendi lasciando solo n^4. Per l'altro addendo, eliminiamo il logaritmo, che cresce meno delle potenze di n e, da sotto la radice, i termini $2n^2 + 1$. Fatto questo arriviamo a questa scrittura:

$$a_n = \frac{\cancel{\sin(2n+\pi)} + \cancel{\log(n^9 + 5n + 3)} + n^8}{n\sqrt{n^4 + \cancel{n^3 + 5n + 1}} + n^2[\cancel{(\log(n^{10})} + n^4 \cdot \sqrt{4n^4 + \cancel{2n^2 + 1}}]}$$

$$a_n \sim \frac{n^8}{\cancel{n^3} + n^2 \cdot n^4 \cdot 2n^2} \sim \frac{n^8}{2\,n^8} = \frac{1}{2}$$

per cui la successione tende ad un mezzo: $a_n \to \frac{1}{2}$.

□

[34] Che, in virtù della possibilità di cambio base e per le proprietà di “abbassare” gli esponenti dell'argomento davanti a se stessi, sono tutti equivalenti tra di loro!

Esempio: Calcolare il limite della seguente successione:

$$a_n = \frac{2^n + 3^n + 4^n}{n^4 + 3^n + 2^{2n+2}}.$$

Soluzione: Al numeratore scegliamo 4^n come ordine di infinito maggiore, al denominatore 2^{2n+2}, dato che $2^{2n} = 4^n$ e quindi questa esponenziale ha ordine d'infinito maggiore di 3^n. A questo punto scriviamo:

$$a_n = \frac{\cancel{2^n + 3^n} + 4^n}{\cancel{n^4 + 3^n} + 2^{2n+2}} \sim \frac{4^n}{2^{2n} \cdot 2^2} = \frac{1}{4}$$

per cui

$$a_n \to \frac{1}{4}.$$

□

Un ultimo esempio, prima di discutere della successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Esempio: Si calcoli il limite della successione

$$a_n = \frac{2\log(n+3) + \log(n-1) + 2\cos(x)}{\log(n^3 + 2n - 1) + 5\log_3(n^2+1)}$$

Soluzione: Eliminiamo le quantità limitate o costanti, gli infiniti d'ordine inferiore e cambiamo la base all'ultimo logaritmo, dividendolo semplicemente per $\log(3)$. Qui di seguito i vari passaggi:

$$a_n = \frac{2\log(n\cancel{+3}) + \log(n\cancel{-1}) + \cancel{2\cos(x)}}{\log(n^3 + \cancel{2n - 1}) + 5 \cdot \frac{\log(n^2\cancel{+1})}{\log(3)}} \sim \frac{3\ \log(n)}{3\log(n) + \frac{10}{\log(3)} \cdot \log(n)}$$

e quindi, dopo qualche ovvia semplificazione:

$$a_n \to \frac{3 \cdot \log(3)}{3 \cdot \log(3) + 10}.$$

□

4. Una successione fondamentale

Ricordiamo dei fatti fondamentali riguardanti lo sviluppo delle potenze di binomio. Iniziamo con il notare che:

$$\boxed{(a+b)^0 = 1}$$

e che

$$\boxed{(a+b)^1 = a + b.}$$

Ora sviluppiamo la prima potenza non banale del binomio $(a+b)$.

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2.$$

Quindi:

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.}$$

Continuiamo con la terza potenza:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2 \cdot (a+b) =$$
$$= (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a+b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Riportiamo qui di seguito questo risultato:

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.}$$

C'è una notevole relazione tra i coefficienti nei monomi dello sviluppo precedente e quelli dello sviluppo successivo, nelle potenze di binomio. Per capire questo, scriviamo solo i coefficienti numerici, in ordine di potenze decrescenti di a (ovvero di potenze crescenti di b), una riga appresso all'altra in questo modo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

e osserviamo ogni numero diverso da uno, in una data riga, non è altro che la somma dei numeri immediatamente "sopra" nella riga precedente. Ad esempio, nella seconda riga il numero 2 è dato da $1+1$. Nella riga tre, i due tre sono dati rispettivamente da $1+2$ e da $2+1$. Immaginiamo quindi che la quarta potenza di binomio deve presentare i coefficienti formati con tale regola, il ché si può verificare essere vero,

$$1 \qquad 1+3 \qquad 3+3 \qquad 3+1 \qquad 1$$

ovvero, la successiva riga nel triangolo dei coefficienti, dovrà essere:

$$1 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 4 \qquad 1.$$

Quindi, dovendo questi coefficienti corrispondere a monomi di quarto grado con potenze decrescenti di a, scriviamo lo sviluppo della quarta potenza di binomio come segue:

$$\boxed{(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.}$$

Il triangolo, formato dai coefficienti dei monomi, prende il nome di **Triangolo di Tartaglia-Pascal.** In effetti, il matematico italiano osservò lo schema di scrittura dei numeri presenti nelle varie righe e lo usò al fine di ricavare i coefficienti dei monomi, nello sviluppo delle potenze di binomio; il pensatore francese, invece, osservò un'altra importante proprietà che riguarda il calcolo combinatorio. Torniamo a considerare lo sviluppo della potenza di binomio, per esempio, di terzo grado. Abbiamo, come noto,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^3 + b^3$$

ottenuta considerando il prodotto:

$$(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b).$$

Solo per una volta sarebbe però il caso di sviluppare *pedantemente e senza semplificazioni* quest'ultimo prodotto:

$$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(aa+ab+ba+bb)$$

ovvero, ancora:

$$(a+b)^3 = aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb.$$

In questo sviluppo osserviamo che c'è un unico prodotto di tipo aaa ovvero a^3 così come di $bbb = b^3$. Ma ci sono tre monomi a^2b e tre di tipo ab^2. Se noi contassimo quante combinazioni della lettera a ci sono su tre posti, dovremmo dire solo una: ovvero solo aaa. Idem per le combinazioni della lettera b su tre posti. Se ora ci domandassimo qual è il numero di combinazioni di due lettere a con una b, su tre posti, dovremmo rispondere 3, ottenute, in pratica, "scalando" la lettera b, una volta su ciascuno dei posti a disposizione. Idem per le combinazioni di due lettere b ed una a. In definitiva possiamo scrivere lo sviluppo del cubo di binomio in questo modo: indicando con $\binom{n}{k}$ il numero delle combinazioni di n oggetti a k a k, e considerando il numero di "lettere" b da sistemare sulle tre posizioni [35] :

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2\, b + \binom{3}{2} a\, b^2 + \binom{3}{3} b^3.$$

In generale, si può vedere che la potenza n-esima di un binomio si può sviluppare nel seguente modo:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n\, b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 + \binom{n}{n} a^0\, b^n,$$

o, come si scrive in modo compatto:

[35] Ed imponendo, per definizione, $\binom{n}{0} = 1,$

$$\boxed{(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, a^{n-k}\, b^k}$$

La formula nel riquadrato prende anche il nome di **formula di Newton** per lo sviluppo delle potenze di binomio. I coefficienti $\binom{n}{k}$ si chiamano **coefficienti binomiali** e coincidono con i numeri che si trovano nel *triangolo di Tartaglia-Pascal.* Essi rappresentano le combinazioni di un certo numero di lettere a ed un numero "complementare (rispetto ad n)" di lettere b, che vengono sistemati su n posizioni e, per come discusso negli studi di calcolo combinatorio del primo biennio, si possono esprimere con la formula:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Siamo quasi pronti a dimostrare il risultato più importante di questa sezione che, in verità, era stato già notato da Nepero, ma senza una adeguata dimostrazione, che verrà data solo successivamente da Eulero. Prima di esporre questo risultato riguardante la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ premettiamo un altro importante teorema.

Se una successione è tale che $\forall n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} \leqslant a_{n_2}$ allora la successione si dirà **monotòna crescente,** se invece risulta $a_{n_1} \geqslant a_{n_2}$ essa si dirà **monotòna decrescente** [36] .

PROPOSIZIONE 9 (Teorema fondamentale sulle successioni monotòne). *Successioni monotòne limitate devono essere convergenti* [37]

Dimostrazione: Dimostriamo la tesi nel caso di successioni monotòne crescenti, analogamente si può dimostrare per le monotòne descrescenti [38]: il candidato ideale ad essere il punto limite è l'estremo superiore [39] . Quindi consideriamo una successione crescente e limitata e sia $l = \mathrm{Sup}(a_n)$, l'estremo superiore dei valori che la successione può assumere:

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \leqslant l.$$

[36] Qualcuno le chiama, rispettivamente **non decrescente** e **non crescente** e riserva le denominazioni date a quelle che noi invece preferiamo chiamare **strettamente crescenti** o **strettamente decrescenti,** rispettivamente se $\forall n_1 < n_2$ si ha $a_{n_1} < a_{n_2}$ ovvero $a_{n_1} > a_{n_2}$.

[37] Più precisamente, le monotòne crescenti, limitate superiormente, devono convergere così come le monotòne decrescenti, limitate inferiormente.

[38] E si invita a farlo come esercizio.

[39] Mentre per le successioni decrescenti l'$\mathrm{Inf}(a_n)$.

Per definizione di estremo superiore, fissato un qualsiasi ϵ arbitrariamente piccolo, $l-\epsilon$ non è più un maggiorante, ovvero esisteranno dei termini della successione che sono maggiori di tale quantità. Consideriamone uno, corrispondente al pedice $\bar{n}$. Dato che la successione è crescente, tutti i termini successivi a $a_{\bar{n}}$ sono necessariamente maggiori di $l-\epsilon$:

$$l-\epsilon \leqslant a_{\bar{n}} \leqslant a_{\bar{n}+} \leqslant a_{\bar{n}+2} \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \leqslant l.$$

D'altra parte $l < l+\epsilon$: si può allora affermare che <u>definitivamente</u> la successione appartiene ad ogni intorno $I_l(\epsilon)$ arbitrariamente piccolo di l, ovvero $a_n \to l = \mathrm{Sup}(a_n)$.

c.v.d.

4.1. La successione che definisce "e". Abbiamo ora tutti gli strumenti utili per studiare la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Teorema 5. *La successione*

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

è monotòna crescente e limitata: ergo è convergente!

Dimostrazione: <u>Iniziamo con il dimostrare che è crescente</u>. A tal fine utilizziamo lo sviluppo binomiale di Newton per riscrivere il termine generico della successione in modo più confortevole.

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \cdot 1^{k-1} \quad \Leftrightarrow \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k.$$

Quindi, utilizzando la formula per i coefficienti binomiali,

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \cdot \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}^{k}}{\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdots n}_{k}} \cdot \frac{1}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{1}{k!}$$

quindi:

$$\boxed{a_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{k!}}$$

Ora consideriamo a_{n+1}, la cui espressione può essere dedotta dalla formula nel riquadro semplicemente passando da n a $n+1$.

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \cdot \frac{1}{k!}$$

Da un confronto diretto tra le due sommatorie osserviamo che ciascuna parentesi della prima espressione è minore della corrispondente parentesi della seconda sommatoria: infatti:

$$\frac{h}{n} > \frac{h}{n+1} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{h}{n} < 1 - \frac{h}{n+1}$$

qualsiasi sia h variabile da 1 a $k-1$. Inoltre, tra le due sommatorie, la seconda ha un termine positivo in più: l'$n+1$-esimo. Per cui possiamo dire che

$$a_n \leqslant a_{n+1}.$$

<u>Ora dimostriamo che è limitata</u>. Che sia limitata inferiormente è evidente, ma neanche serve saperlo: il primo numero della successione è $a_1 = 2$. Per dimostrare che è superiormente limitata riprendiamo a fare osservazioni sull'espressione nel riquadro. Evidentemente tutte le parentesi sono minori di uno [40] e questo ci permette di dedurre la seguente maggiorazione [41] :

$$a_n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Scriviamo per esteso $k!$:

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k$$

e sostituiamo tutti i numeri oltre il secondo fattore con il 2 :

$$1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2$$

dovrebbe essere chiaro che questa quantità risulta minore del prodotto originario [42] ed è pari a 2^{k-1}, quindi

$$k! \, > \, 2^{k-1}$$

ed invertendo le frazioni

$$\frac{1}{k!} \, < \, \frac{1}{2^{k-1}}$$

[40] Sono formate togliendo dall'unità una frazione positiva!

[41] Si ricordi che moltiplicare una quantità per un numero minore di uno significa ridurne la grandezza.

[42] Infatti abbiamo sostituito i fattori maggiori di due con due stesso!

ergo:

$$a_n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}.$$

L'ultima sommatoria corrisponde alla somma dei primi n termini di una P.G. il cui primo termine è $\frac{1}{2}$ e la ragione è anche $\frac{1}{2}$, pertanto vale:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$$

ne deduciamo quindi che:

$$a_n \leqslant 1 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < 1 + 2 \cdot 1 = 3.$$

Abbiamo quindi concluso che la successione è minore di 3 e questo basta per dire che essa è convergente, dato che è monotòna crescente e limitata.

c.v.d.

Il valore verso cui converge si definisce **numero di Nepero** e si denota con "e". Il suo valore approssimato, che può essere calcolato più velocemente utilizzando altri strumenti che non siano la successione che lo definisce, è $\approx 2,7182$. Qui di seguito un esempio di calcolo, utilizzando un foglio di calcolo e la successione che abbiamo studiato, con il trucco di rendere "più velocemente crescente" il valore di n, sostituendolo con la sua potenza decima.

n	N=n^10	(1+1/N)^N
1	1,00	2
2	1.024,00	2,7169557295
3	59.049,00	2,7182588117
4	1.048.576,00	2,7182805323
5	9.765.625,00	2,7182816902
6	60.466.176,00	2,7182818114
7	282.475.249,00	2,7182817476
8	1.073.741.824,00	2,7182818272
9	3.486.784.401,00	2,7182823355
10	10.000.000.000,00	2,7182820532

Il numero di Nepero è irrazionale trascendente [43] : l'irrazionalità venne

[43] Come π.

dimostrata da Eulero nel 1737, mentre la trascendenza venne dimostrata da Hermite nel 1873.

5. I limiti riconducibili al numero di Nepero

In questo capitolo abbiamo presentato una teoria dei limiti [44] quasi completa e mancava solo la discussione del limite della successione che definisce il numero di Nepero. Aggiunto, con il paragrafo precedente, anche lo studio di quella successione, ora completiamo l'argomento considerando il calcolo dei limiti di tutte le successioni, che possono essere ricondotte alla successione che definisce "e".

Come prima osservazione [45] tutte le successioni del tipo:

$$\left(1+\frac{1}{q\to\infty}\right)^{q\to\infty}$$

dove il denominatore e l'esponente sono <u>le stesse quantità</u> divergenti all'infinito, sono convergenti ad e.

Esempio: La successione a_n, definita come segue, converge ad e, avendo al denominatore la stessa quantità dell'esponente:

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n^3+n^4}\right)^{n^3+n^4} \;\to\; e.$$

□

In verità basta che siano, quel denominatore e quell'esponente, infiniti equivalenti.

Esempio: Anche la successione definita come di seguito è convergente ad e:

$$a_n=\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}-\log(n^2-1)+1}\right)^{\sqrt{n}} \;\to\; e$$

dato che $\sqrt{n+1}-\log(n^2-1)+1\sim\sqrt{n}$.

□

In generale, per calcolare limiti di questo tipo, si deve cercare di sistemare la scrittura dentro la parentesi come "uno + una frazione dell'unità" infinitesima ed all'esponente far comparire, in qualche modo, il denominatore della frazione trovata. Il trucco più usuale ed intelligente è di moltiplicare l'esponente per 1, scritto come il denominatore della

[44] Di successioni

[45] E l'abbiamo utilizzato per "velocizzare" la convergenza della successione in quel foglio open-calc riportato nella figura precedente.

frazione diviso se stesso e, per effettuare la divisione dentro la parentesi, sommare zero, inteso come una quantità meno se stessa. Qualche esempio chiarirà meglio queste strategie.

Esempio: Calcolare il limite della successione:

$$a_n = \left(\frac{n-3}{n+1}\right)^{3n}.$$

Soluzione: Dividiamo, in modo intelligente, il numeratore per il denominatore, aggiungendo e togliendo 4, dato che $1 = -3 + 4$.

$$a_n = \left(\frac{n-3+4-4}{n+1}\right)^{3n} = \left(\frac{n+1\ -4}{n+1}\right)^{3n} = \left(1 + \frac{-4}{n+1}\right)^{3n}.$$

A questo punto è facile ricondurre al caso noto:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{\frac{n+1}{-4}}\right)^{3n\cdot\frac{n+1}{-4}\cdot\frac{-4}{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{\frac{n+1}{-4}}\right)^{\frac{n+1}{-4}\cdot\frac{-12n}{n+1}} \to e^{-12},$$

essendo la parentesi con il primo esponente tendente ad "e" e il secondo esponente equivalente $\frac{-12n}{n} = -12$ ovvero, tendente a -12.

□

Esempio: Si calcoli il valore del seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^3+n}{n^3+1}\right)^{2n^2}$$

Soluzione: La successione presente nel limite è:

$$\left(\frac{n^3+1\ -1+n}{n^3+1}\right)^{2n^2} = \left(1 + \frac{n-1}{n^3+1}\right)^{2n^2} = \left(1 + \frac{1}{\frac{n^3+1}{n-1}}\right)^{2n^2}.$$

Ora operiamo sull'esponente "facendo comparire" il denominatore:

$$\left(1 + \frac{1}{\frac{n^3+1}{n-1}}\right)^{\frac{n^3+1}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n^3+1}\cdot 2n^2} = \left(1 + \frac{1}{\frac{n^3+1}{n-1}}\right)^{\frac{n^3+1}{n-1}\cdot\frac{2n^3-2n^2}{n^3+1}} \to e^2$$

poiché fino al primo esponente riconosciamo una successione che tende al numero di Nepero ed il secondo esponente equivale a $\frac{2n^3}{n^3} = 2$. Pertanto il limite vale e^2.

□

Esempio: Determinare il limite della successione:

$$a_n = \left(\frac{n^3+n^2+1}{n^3-n^2+1}\right)^{\frac{1}{3}n}$$

Soluzione: Effettuiamo la divisione tra numeratore e denominatore:

$$a_n = \left(\frac{n^3 - n^2 + 1 \ + 2n^2}{n^3 - n^2 + 1}\right)^{\frac{1}{3}n} = \left(1 + \frac{2n^2}{n^3 - n^2 + 1}\right)^{\frac{1}{3}n} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\frac{n^3-n^2+1}{2n^2}}\right)^{\frac{n^3-n^2+1}{2n^2} \cdot \frac{2n^2}{n^3-n^2+1} \cdot \frac{1}{3}n} = \left(1 + \frac{1}{\frac{n^3-n^2+1}{2n^2}}\right)^{\frac{n^3-n^2+1}{2n^2} \cdot \frac{2n^3}{3(n^3-n^2+1)}}$$

e quindi:

$$a_n \to e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2}.$$

□

Come ultimo esempio riportiamo il seguente:

Esempio: Determinare il valore del limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2n + \sin(n)}\right)^{n-2}$$

Soluzione: Possiamo già "eliminare" la funzione $\sin(n)$ che è limitata e quindi all'infinito risulta trascurabile [46] . Se a_n indica la successione di cui si cerca il limite, allora si ha:

$$a_n \ \sim \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2n}\cdot(n-2)} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n \cdot \frac{n-2}{2n}} \to e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

□

[46] Potevamo anche non farlo, dato che poi, comunque, l'avremmo trascurato nel calcolo del limite presente all'esponente.

Parte 4

L'Analisi Matematica

(Una sinfonia coerente dell'infinito)

CAPITOLO 10

Calcolo infinitesimale e calcolo differenziale

In questo capitolo discuteremo di meravigliose idee che hanno portato ad un cambio di marcia nel fare Matematica e nel risolvere i problemi della Fisica e delle tecniche: non a caso molto di quanto verrà qui esposto è opera di sir Isaac Newton, che utilizzò i suoi risultati per rifondare la Fisica in senso moderno del termine, creando, di fatto, il "calcolo differenziale" in contemporanea ad un altro gigante della Matematica, di nome Gottfried Wilhelm von Leibniz, che "nel continente" disseminava questa "nuova disciplina", stimolando le grandi menti dell'epoca a raggiungere nuove mete. Nello studio di questa parte della Matematica, che prende il nome di "Analisi Matematica, si ricordano i nomi di quasi tutti i grandi Matematici della storia del pensiero contemporaneo: Fermat (come precursore), Lagrange, Bernoulli, Cauchy, Eulero, Gauss, Weierstrass, ecc... ecc... il sottotitolo "Sinfonia coerente dell'infinito" è di David Hilbert, altro irrinunciabile genio della Matematica degli inizi del '900. Si può dire che lo studio dell'Analisi Matematica è fondamentale per tutti i progressi futuri e le applicazioni della Matematica nella risoluzione di problemi di ogni tipo. Uno dei concetti principali, su cui si concentra l'attenzione dell'Analisi, è quello di funzione. Abbiamo già parlato di funzioni, ma ricordiamo anche qui cosa siano, definendo ulteriori caratteristiche a cui ci riferiremo anche in futuro.

1. Funzioni

Il termine *funzione* pare sia stato usato per la prima volta da Leibniz nel 1694, per far riferimento all'ordinata di un punto di determinate curve, che sono date -appunto- in funzione delle ascisse ed anche per associare ad ogni punto, di una data curva, la pendenza della retta tangente in quel punto [1] . La parola *funzione* poi fu utilizzata da Eulero nel diciottesimo secolo, per indicare quantità che dipendono da altre quantità, detti argomenti e questo modo di intendere il concetto

[1] Evidentemente per Leibniz le funzioni erano quelle che noi oggi definiremmo "differenziabili", per come chiariremo in seguito.

di funzione è tuttora quello che noi utilizziamo nell'accezione più ampia, atteso che l'idea e le definizioni sono state formalizzate nel corso del diciannovesimo secolo da Weierstrass [2] , proprio seguendo le idee espresse da Eulero riguardo al concetto di funzione.

La definizione di funzione prevede una terna di elementi costituiti da due insiemi ed una *legge associativa univoca* che ad ogni elemento di un insieme, detto *dominio* della funzione, fa corrispondere un elemento dell'altro insieme, detto *codominio* della funzione. Se noi chiamiamo l'insieme dominio X, la legge associativa f ed il codominio con Y, allora possiamo scrivere, per la funzione f, quanto segue:

$$\begin{aligned} f: \quad & X \to Y \\ & x \mapsto f(x) \quad = y \end{aligned}$$

Si suole anche scrivere $X \xrightarrow{f} Y$. L'insieme dei valori associati a tutti gli elementi di X, viene chiamato **immagine** di f e si indica con $\mathrm{Im}(f)$. Esso è un sottoinsieme di Y definito, quindi, come:

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in Y : \exists x \in X, y = f(x)\}.$$

Si scrive anche, spesso, $f(X)$ a posto di $\mathrm{Im}(f)$, per intendere che si prendono gli elementi in Y corrispondenti a tutti i valori di $x \in X$. Se l'$\mathrm{Im}(f)$ coincide con il codominio Y, allora la funzione si dice **suriettiva.** Significa che tutti gli elementi del codominio sono associati a qualche elemento del dominio:

$$\mathrm{Im}(f) = Y \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \in Y, \exists x \in X \,:\, y = f(x).$$

Una importantissima caratteristica delle funzioni è quella, per la quale a valori differenti del dominio, corrispondono sempre valori differenti nel codominio: in tal caso la funzione si definisce **iniettiva.** Possiamo rappresentare la richiesta di iniettività, secondo la seguente scrittura simbolica:

$$\forall x_1, x_2 \in X \,:\, x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

Equivale a dire che se i valori corrispondenti nel codominio sono uguali, allora erano uguali quelli iniziali nel dominio:

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Una funzione che sia contemporaneamente iniettiva e suriettiva viene chiamata **biiezione.** Dato che i nomi non si danno a caso, un motivo per cui una funzione, per la quale a valori diversi corrispondono valori diversi, è detta *iniezione* è che si può pensare l'insieme dominio

[2]Uno dei più importanti Matematici che si occupò di funzioni e delle loro proprietà

"iniettato" dentro il codominio facendo corrispondere, a ciascun elemento di esso, il suo unico elemento nel codominio: è evidente che una funzione iniettiva è biiettiva se il codomio è ristretto alla sua immagine! in un certo senso è come se avessimo inserito il dominio dentro il codominio, appunto "iniettandolo" al suo interno, attraverso la sua immagine. D'altra parte l'importanza delle biiezioni è dovuta a fatto che esse sono le uniche funzioni **invertibili,** ovvero per le quali si può associare ad ogni elemento del codominio, l'unico elemento del dominio a cui era associato tramite la funzione "diretta": "scambiando" dominio e codominio, in generale, quella che si ottiene non è una funzione, dato che rischia di essere in difetto proprio l'univocità dell'associazione, che l'iniettività invece garantirebbe e, d'altra parte, è necessaria la suriettività perché *ad ogni elemento* di un insieme deve essere associato qualcosa, per avere una legge funzionale. Basti pensare alla funzione $f(x) = x^2$. Essa, se considerata da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è né suriettiva né iniettiva. *Riducendo* il suo dominio ai soli valori positivi [3] $[0, +\infty) \to \mathbb{R}$ diventa una funzione iniettiva. Non è suriettiva poiché valori negativi nel codominio non sono associati ad alcun valore nel dominio [4] . Se riduciamo però anche il codominio, la funzione diventa anche suriettiva: $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$ è una biiezione e la sua inversa è $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Si osservi che tutte le funzioni periodiche sono di necessità non invertibili nel proprio dominio [5] e per poterle invertire bisogna ridurre il dominio, come minimo, ad un intervallo di periodicità ed il codominio all'immagine della funzione. Ad esempio, la funzione $sin(x)$ e la funzione $\cos(x)$ non sono invertibili a meno di restringere il codominio all'intervallo $[-1, 1]$ ed il dominio ad un qualsiasi intervallo di "lunghezza" 2π [6] . La funzione $\tan(x)$ e $\cot(x)$ non hanno problemi sul codominio, dato che assumono tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$, mentre il dominio deve essere ridotto ad un intervallo di ampiezza π, ad esempio $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ per la tangente e $(0, \pi)$ per la cotangente.

Una funzione tale per cui, scelti due qualsiasi valori x_1, x_2 in un intervallo incluso nel suo dominio, con $x_1 < x_2$, si abbia $f(x_1) < f(x_2)$ si dice **strettamente crescente** su quell'intervallo. Se poi l'intervallo coincide con tutto il dominio, allora la funzione è detta **monotòna**

[3]Oppure ai soli valori negativi.

[4]Infatti i quadrati sono sempre maggiori o uguali a zero.

[5]Perché?

[6]Si sceglie, generalmente, l'intervallo simmetrico rispetto all'origine del sistema di coordinate $[-\pi, \pi]$ o, a volte, anche $[0, 2\pi]$.

crescente. Se invece è $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ allora si dirà **crescente** [7] oppure, meglio ancora, **non decrescente.** Analoghe definizioni si hanno se $\forall x_1, x_2 \in I \subseteq \mathrm{Dom}(f),\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \geqslant f(x_2)$, per la quale condizione, la funzione si dirà **non crescente** o anche **decrescente** o, qualora valesse la condizione più restrittiva: $f(x_1) > f(x_2)$, per il qual caso si utilizzerà l'espressione funzione **strettamente decrescente.**

Dato un valore $\bar{x}$ tale per cui esiste un intorno $I_{\bar{x}}$, per ogni valore del quale $f(\bar{x}) \geqslant f(x)$, allora si dirà che $\bar{x}$ è un **punto di massimo relativo** per la funzione. Analogamente, se $\forall x \in I_{\bar{x}}$, si ha $f(\bar{x}) \leqslant f(x)$, allora $\bar{x}$ si dirà **punto di minimo relativo** [8] . È giusto un'osservazione dire che "*una funzione monotòna (strettamente) crescente o decrescente deve essere per forza iniettiva*" [9] . Queste ultime definizioni sono, evidentemente, valide se la funzione è definita su un insieme (totalmente) ordinabile di elementi, il cui codominio è anche ordinabile [10] : sono comunque definizioni molto generali, valide nel nostro caso, dato che in tutto questo capitolo e per molti altri a seguire, limiteremo la nostra attenzione alle sole **<u>funzioni reali di una variabile reale</u>.**

1.1. Grafici di funzione. Uno degli insiemi più importanti, associati ad una funzione, è il suo grafico, definito come l'insieme dei punti del piano in cui l'ascissa viene presa nel dominio e l'ordinata viene "dettata" dalla legge funzionale [11] :

$$\mathrm{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathrm{Dom}(f) \ \wedge \ \ y = f(x)\}.$$

L'importanza è dovuta al fatto che le caratteristiche di una funzione si vedono direttamente e si interpretano meglio sul grafico tracciato nel piano cartesiano: ad esempio, dove risulta crescente o decrescente, dove raggiunge massimi o minimi locali, che tipo di concavità ha nei vari intervalli dove esiste, il suo comportamento nei pressi dei punti in cui non può essere calcolare e, non in ultimo, dove risulta positiva, negativa o si annulla. Insomma, dal grafico si capisce tutto della funzione a cui siamo interessati. Procederemo per gradi: dapprima impareremo a tracciare un *grafico probabile,* in cui però non si potranno individuare

[7] Non strettamente!

[8] Qualche volta useremo anche la locuzione **massimo o minimo locale**, nel senso che corrispondono ai valori "più alti" o "più bassi" della funzione, solo per intorni sufficientemente piccoli di se stessi.

[9] Lo studente giustifichi questa asserzione.

[10] Nel senso che si può sempre dire quale elemento sia il maggiore tra due.

[11] L'abbiamo già incontrato più volte in precedenza.

le possibili oscillazioni della funzione, né le concavità. Successivamente impareremo a determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza e, conseguentemente, le oscillazioni della funzione. Infine parleremo anche di come determinare le concavità. La prima cosa utile da fare, non essendo indicato chiaramente quale sia il dominio di una legge funzionale che, impropriamente, viene indicata sovente con il nome di "funzione" [12] è di determinare proprio il dominio. Successivamente, molto utile sarà stabilire il segno della funzione all'interno del proprio dominio e, come terzo passo -per poter già *abbozzare* un grafico- determinare il comportamento della funzione nei pressi dei punti esclusi dal dominio o, anche, per valori molto grandi, in negativo o in positivo, della variabile x [13]. Per ciascuno di questi passi dedicheremo una sezione qui di seguito, iniziando fin da subito ad affrontare il problema di determinare il dominio di una funzione.

1.2. Il dominio di una funzione e le condizioni di esistenza. Il discorso è molto semplice, ci sono solo tre operazioni che non sono consentite in alcun modo:

- Divisione per zero;
- Estrazione di radici, ad indice pari, di quantità negative;
- Determinazione di logaritmi di argomenti minori o uguali a zero.

In corrispondenza di queste tre operazioni vietate, possiamo definire le seguenti tre **condizioni di esistenza** "(C.E.)" da *imporre* a seconda della presenza di una frazione, di una radice ad indice pari oppure di un qualche logaritmo:

- *C.E.Frazione:* Avendo una espressione del tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$ deve essere $D(x) \neq 0$, ovvero il denominatore diverso da zero.
- *C.E.Radice:* Se si è in presenza di una scrittura del tipo $\sqrt[2n]{Q(x)}$ bisogna imporre $Q(x) \geqslant 0$, ovvero il radicando non negativo.
- *C.E.Logaritmo:* In presenza di qualche logaritmo $\log(Q(x))$, per ciascuno di essi deve essere imposto l'argomento strettamente positivo $Q(x) > 0$.

[12] Ricordiamo che per funzione si intende una terna di elementi: (f, X, Y) di cui solo il primo elemento è la legge associativa, mentre gli altri due sono il dominio ed il codominio della funzione stessa!

[13] Ovvero per $x \to \mp\infty$ sempre che il dominio dia la possibilità di utilizzare valori sempre più grandi in negativo o in positivo per l'incognita x.

Il dominio di una data funzione è l'insieme di tutti i valori per i quali sono soddisfatte le tre condizioni di esistenza [14] . Come si vede, le condizioni impongono la risoluzione di alcune disequazioni: dato che anche il segno della funzione richiede lo stesso discorso, rimandiamo alla sezione successiva la discussione su come risolvere le disequazioni. Per ora anticipiamo solo che, per risolvere una disequazione, la cosa principale da fare è *risolvere l'equazione* che si ottiene sostituendo il simbolo di disuguaglianza con quello di uguaglianza [15]

Esempio: Determinare il dominio di

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}.$$

Soluzione: Imponiamo la condizione di esistenza delle frazioni: $x^2 - 4 \neq 4$. Evidentemente $x^2 - 4 = 0$ per $x = \mp 2$, per cui il dominio consiste di tutti i numeri reali ad eccezione di ∓ 2. Si scrive anche che il **campo di esistenza** [16] è l'insieme $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ oppure, in forma intervallare "estesa" [17] :

$$(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty).$$

□

Esempio: Determinare il dominio di

$$f(x) = \frac{x \cdot \sqrt{x+1}}{(9-x^2)\ln(x-3)}.$$

Soluzione: In questa funzione sono presenti tutt'e tre le operazioni con possibili "problemi esistenziali". Quindi imponiamo tutt'e tre le condizioni di esistenza:

- *C.E.Fraz:* Denominatore diverso da zero:
$$(9-x^2)\ln(x-3) \neq 0.$$
- *C.E.Rad:* Radicando positivo (o uguale a zero):
$$x + 1 \geqslant 0.$$
- *C.E.Log:* Argomento del logaritmo strettamente positivo:
$$x - 3 > 0.$$

---

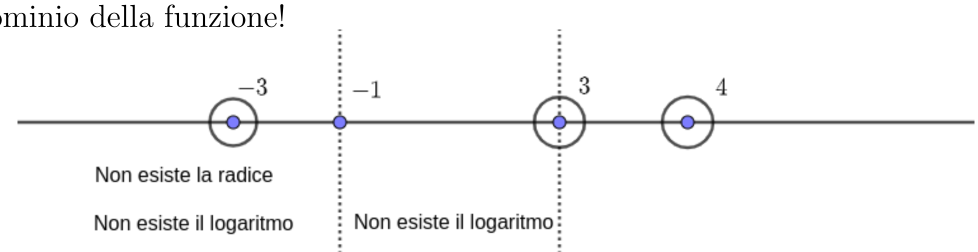
[14] Chiaramente, se vi sono presenti quel tipo di operazioni indicate in ciascun punto: evidentemente è l'insieme su cui la funzione **può essere calcolata.**

[15] D'altra parte le equazioni si sanno risolvere -magari non tutte, ma quelle che interessano a noi non danno particolari problemi!- e sapendo dove due quantità sono uguali, si sa anche dove non lo sono.

[16] Altra denominazione per il dominio della funzione.

[17] Che è preferibile.

Anche per chi non avesse mai studiato la risoluzione delle disequazioni, quanto stiamo per dire, dovrebbe essere abbastanza ragionevole: la prima condizione si verifica se $x \neq \mp 3$, valori che annullerebbero la prima parentesi o, ancora, $x-3 \neq 1$ ovvero per $x \neq 4$ [18]. La seconda condizione è evidentemente soddisfatta per $x \geqslant -1$, infatti con -1 l'espressione $x+1$ si annulla e poi, per valori maggiori, essa sarà sicuramente positiva. Infine la terza condizione si verifica per $x > 3$, dato che per $x = 3$ l'espressione $x-3$ si annulla e valori maggiori di x danno tutti valutazioni di segno positivo. Mettendo assieme queste tre condizioni, possiamo ora stabilire il *campo di esistenza* della funzione. Conviene mettere i risultati trovati su una retta numerica per vedere bene la situazione: i punti da escludere li cerchiamo [19] e separiamo gli intervalli determinati dalle disuguaglianze con dei separatori verticali. Per ciascuna zona poi andiamo a scrivere quale condizione non è verificata... così, in bianco, rimane l'intervallo che potremo indicare come dominio della funzione!



Dal diagramma di sopra si legge chiaramente che l'unico intervallo accettabile come dominio della funzione è:

$$(3,4) \cup (4,+\infty).$$

□

1.3. Il segno di una funzione e di espressioni variabili. Il segno di una funzione è argomento strettamente connesso con la determinazione del suo campo di esistenza, per un duplice motivo: prima di tutto si determina il segno dove la funzione "esiste" [20] e, secondo, perché parte dello studio effettuato per determinare il dominio, si può *riutilizzare* per lo studio del segno stesso. Prima di procedere con qualche esempio, vogliamo illustrare l'<u>idea che facilita</u> la determinazione del segno e, in generale, la risoluzione di una qualsiasi disequazione:

[18]Ricordiamo che il logaritmo è nullo se il suo argomento è 1, per cui, volendolo diverso da zero, basta che il suo argomento non sia 1.

[19]Per ragioni tipografiche noi cerchiamo con grandi cerchietti, ma basta un segno piccolino attorno al valore per capire che bisogna escluderlo.

[20]Ovvero dove può essere calcolata e, quindi, nel suo campo di esistenza.

per suo tramite si può adottare una strategia che *cassi in toto* i numerosi calcoli che si insegnano, generalmente, per arrivare al risultato d'interesse.

1.3.1. *Un'idea intelligente.* Si parte con una constatazione di fatto: una espressione/funzione può avere segno solo dove non è nulla e dove si può calcolare. Pertanto, sapendo dove si annulla o dove non può essere calcolata si sa anche dove deve avere segno! La seconda osservazione [21] che si fa è: *"una espressione/funzione, finché non perde il suo segno* [22] *non può cambiarlo".* Detto in altro modo: se una funzione è positiva, non si annulla in alcun punto di un dato intervallo e si può calcolare in tutti i punti di quell'intervallo, rimarrà sempre positiva su quell'intervallo [23] . Questa osservazione la potremmo anche denominare **proprietà della permanenza del segno.** Quest'ultima osservazione ci fornisce la strategia che utilizzeremo per determinare il segno di una espressione/funzione: si determina il campo di esistenza e l'insieme dei punti in cui l'espressione/funzione si annulla. "Spalmiamo" tutti i valori su una retta numerica, individuando degli intervalli e, scegliendo opportunamente dei valori all'interno di ciascuno di essi, **testiamo** la funzione [24] per verificare se è positiva o negativa. Infine mettiamo il segno ottenuto in corrispondenza dell'intervallo considerato e si va avanti così, fino ad esaurire il controllo di tutti gli intervalli determinati sulla retta numerica. Il metodo è semplice, richiede solo la risoluzione di equazioni e, soprattutto, ha il gran vantaggio di essere veloce e non far "imbrattare" fogli interi di diagrammi che non servono assolutamente a nulla [25] .

Esempio: Si voglia studiare il segno della seguente funzione:

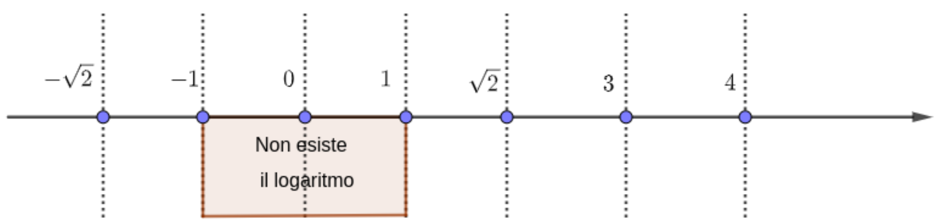
$$f(x) = \frac{(x-3)\cdot\ln(x^2-1)}{x\cdot\sqrt[3]{4-x}}.$$

Soluzione: Intanto osserviamo che i punti in cui si annulla la funzione sono quelli per cui il *numeratore è nullo,* mentre i valori per cui non esiste -a parte il logaritmo che va studiato a parte- sono esattamente quelli per cui il *denominatore si annulla.* In generale, quando c'è da studiare il segno di una frazione, si deve sempre porre sia il numeratore (Num.), sia il denominatore (Den.) uguale a zero.

[21] E questa è più "sottile" e si può dimostrare con molta pignoleria.
[22] Perché si annulla o incontra un punto in cui non si può calcolare.
[23] Stessa cosa si può dire se fosse negativa: rimarrà sempre negativa.
[24] O l'eventuale espressione variabile.
[25] Se non a far perdere tanto tempo e complicare la vita!

- *Num.=0* per $(x-3)\cdot \ln(x^2-1)=0$, ovvero per $x=3$ o $x^2-1=1$ da cui $x=\mp\sqrt{2}$.
- *Den.=0* per $x\cdot\sqrt[3]{4-x}=0$ ovvero per $x=0$ o $x=4$.

Dobbiamo aggiungere ora la C.E.Log. [26]: cerchiamo dove si annulla l'argomento e scriviamo $x^2-1=0$, da cui $x=\mp 1$. Vediamo già con questo primo "esercizio" sullo studio del segno dell'argomento del logaritmo, come funzione la nostra strategia [27]. Su una retta mettiamo i due valori -1 e 1 e scegliamo tre valori, uno per ciascun intervallo determinato dai due punti sulla retta. I valori sono a nostra scelta, quindi ne scegliamo tre "comodi": per l'intervallo $(-\infty,-1)$ scegliamo -10, per $(-1,1)$ scegliamo 0 e per $(1,+\infty)$ scegliamo 10. Evidentemente i valori che si ottengono sono di segno, rispettivamente, positivo, negativo, positivo, per cui il logaritmo impone che il segno della funzione venga calcolato per valori "esterni" all'intervallo $(-1,1)$. Procediamo mettendo tutti i valori su una retta numerica e testando la funzione: un disegno aiuterà la lettura dei dati ottenuti. Osserviamo che non è nemmeno importante distanziare bene i valori sulla retta numerica ma, solo, che essi siano messi in ordine crescente.



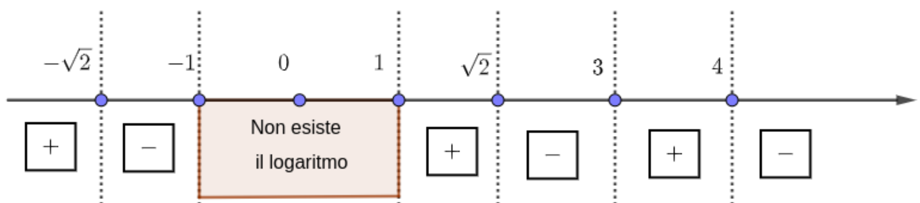
Ora scegliamo per ciascun intervallo un valore "comodo" e determiniamo il segno della funzione: prima di $-\sqrt{2}$ possiamo scegliere, ad esempio -10, tra $-\sqrt{2}$ e -1 si può scegliere $-1,1$. Per il terzo intervallo scegliamo $1,1$ e per il quarto 2. Per gli ultimi due intervalli, rispettivamente $3,5$ e 10. Se indichiamo con $sgn(f(x))$ il segno del valore della funzione nel punto x, si ha:

[26]Da notare che imponendo il Den.=0, la C.E.Fraz. risulta già inclusa in questa condizione.

[27]In verità non servirebbe nemmeno studiare il segno dell'argomento del logaritmo: basta sapere dove si annulla, perché il metodo utilizzato indicherà immediatamente ed automaticamente gli intervalli dove la funzione non può essere calcolata, anche se non ci fossimo preoccupati di determinare preventivamente il campo di esistenza della funzione!

$$sgn(f(-10)) = \frac{(-)(+)}{(-)(+)} = (+), \quad sgn(f(2)) = \frac{(-)(+)}{(+)(+)} = (-)$$
$$sgn(f(-1,1)) = \frac{(-)(-)}{(-)(+)} = (-), \quad sgn(f(3,5)) = \frac{(+)(+)}{(+)(+)} = (+)$$
$$sgn(f(1,1)) = \frac{(-)(-)}{(+)(+)} = (+), \quad sgn(f(10)) = \frac{(+)(+)}{(+)(-)} = (-)$$

Si osservi che nemmeno serve calcolare i valori, ma per ciascun fattore determinare il segno e poi applicare la regola dei segni: "numero dispari di segni negativi, sarò negativo, altrimenti positivo" [28]. Completiamo allora la retta di prima associando per ciascun intervallo i segni trovati:



Si tratta ora di scrivere i risultati per esteso, sebbene la figura di cui sopra è anche più chiara di qualsiasi altra descrizione! Pertanto diremo che:

- $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (1, \sqrt{2}) \cup (3, 4)$.
- $f(x) < 0$ per $x \in (\sqrt{2}, -1) \cup (\sqrt{2}, 3) \cup (4, +\infty)$.
- Altrove non ha segno perché o non esiste, oppure si annulla.

□

1.4. I limiti agli estremi del "campo di esistenza". La prima volta in cui abbiamo parlato di calcolo di limiti, in questo testo, è stato per le successioni: essendo esse delle funzioni particolari, il cui dominio è un insieme discreto, non si poteva far altro che domandarsi cosa succedesse ai termini (della successione) mano a mano che n diventava infinitamente grande, ovvero superasse ogni valore pensato arbitrariamente grande. Per le funzioni di variabile reale, il discorso diventa di carattere più generale e, come caso particolare, i limiti per $x \to +\infty$ includono anche i limiti delle successioni! anzi di più: si potrebbe pensare di "mandare all'infinito" la x in modo "discreto", per punti di $\mathbb{N}$ e calcolare il limite della successione la cui legge funzionale, per il termine generico, coincide con la legge associativa della funzione considerata. Evidentemente, il limite della funzione deve coincidere con il limite della successione così creata, anche perché,

[28] Con la pratica il metodo diventa anche più veloce, dato che una volta stabilito che un fattore rimarrà positivo, si può benissimo cancellare dal computo dei segni!

come dimostreremo, se esiste il limite, esso deve essere unico [29] . Diciamo subito che i limiti si calcolano, per le funzioni, *poiché ci sono valori esclusi dal campo di esistenza* e siamo interessati a capire il *comportamento della funzione* proprio in prossimità di tali punti [30] . Non ha senso calcolare limiti ove la funzione esiste: dove si può calcolare, la funzione fornisce già un valore e quindi determina un preciso punto nel piano cartesiano! il problema sta proprio nei punti dove la funzione non si può calcolare, dato che ivi non sarà possibile far corrispondere alcun punto nel grafico di funzione. La teoria dei limiti di funzione non è più complicata di quella dei limiti di successione anzi, per molti aspetti è coincidente o, per lo meno, si basa sulle stesse idee [31] . Premettiamo ancora che per "avvicinarsi ad un punto" in cui la funzione *non esiste* [32] è necessario che tale punto sia un *punto di accumulazione* del dominio della funzione, infatti tale condizione assicura di poter considerare valori le cui distanze dal punto in questione siano infinitesime. Nei fatti, se ogni intorno, comunque piccolo, del punto p interseca $\mathrm{Dom}(f)$ in punti diversi da p, allora questi valori possono essere utilizzati per "avvicinarsi" al valore p in cui -eventualmente- la funzione non può essere calcolata. Detto questo, definiamo l'operazione di limite e successivamente impariamo a calcolarlo.

1.4.1. *Definizione di limite di funzione.* Separiamo i casi per cui la x tende ad un valore finito, escluso dal campo di esistenza, da quello per cui la x tende a valori infinitamente grandi in positivo o in negativo. Ci sono solo tre casi, comunque, per ciascuna delle eventualità considerate precedentemente: il limite esiste ed è finito, il limite "diverge" a valori infinitamente grandi [33] e, in ultimo, il limite non esiste. Consideriamo questi ulteriori tre casi separatamente, tenendo presente che quando diciamo **"il valore si avvicina a..."** dobbiamo intendere che esso rappresenta quantità incluse definitivamente in intorni "arbitrariamente piccoli di...".

DEFINIZIONE 1. *Diremo che:*

$$\lim_{x \to p} f(x) = l\,, \quad \textit{essendo } l \textit{ finito}$$

[29] Al passaggio da successione a funzione e viceversa, alcuni autori si riferiscono come *Teorema "ponte"*.

[30] Oppure per valori tendenti a $\mp\infty$ che, non essendo numeri, non possono fornire una valutazione numerica attravero la legge funzionale.

[31] Che tosto richiamiamo alla mente.

[32] Ovvero non può essere calcolata: un valore escluso dal campo di esistenza.

[33] Cioè tende a $\mp\infty$.

e leggeremo "il limite per x tendente a p, di $f(x)$, è l" [34] *se i valori della funzione si avvicinano al valore l mano a mano che i valori di x vengono presi vicino a p.*
Equivalentemente, se la funzione assume valori vicino ad l è perché -di partenza- i valori di x sono presi vicino a p. Nel linguaggio simbolico proprio della Matematica, detti I_l e I_p due intorni rispettivamente di l e di p, il primo preso arbitrariamente piccolo, il secondo trovato in corrispondenza di quello scelto precedentemente per l, potremmo tradurre come:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \,:\, f(x) \in I_l(\epsilon) \quad \Rightarrow \quad x \in I_p(\delta)}.$$

Da notare: per essere sicuri che $f(x) \to l$, l'intorno arbitrariamente piccolo si sceglie del valore limite e, conseguentemente, si riuscirà a dire che le x [35] sono sempre tutte "vicine" a p. C'è un modo ancora più compatto di esprimere la condizione nel riquadro: detta **preimmagine** o **controimmagine** l'insieme $f^{-1}(S) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ tale per cui tutti i suoi elementi hanno associati gli elementi di $S \subseteq \mathrm{Im}(f)$, allora il limite è l se:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \,:\, f^{-1}(I_l(\epsilon)) \subseteq I_p(\delta),$$

ovvero *la controimmagine di qualsiasi intorno di l è inclusa sempre in un intorno di p*, la qual cosa implica ed assicura che $f(I_p(\delta)) \subseteq I_l(\epsilon)$, ovvero che tutti gli elementi nel dato intorno di p sono mandati, dalla funzione, in valori vicino ad l. Dalla definizione data prima, se qualcuno guardasse altri testi e non si ritrovasse nel linguaggio simbolico utilizzato, diciamo subito che si potrebbe ricavare anche la definizione "classica" nel linguaggio $\epsilon - \delta$ di Cauchy:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \,:\, |f(x) - l| \leqslant \epsilon \;\Rightarrow\; |x - p| \leqslant \delta$$

poiché si possono trascrivere quelle due disequazioni in termini di intorni di l e p, rispettivamente e quindi si sta dicendo, essenzialmente, la stessa cosa che abbiamo già espresso precedentemente. È importante, comunque, realizzare che <u>il limite è un concetto topologico</u>: riguarda proprietà locali, l'appartenenza agli "intorni" di punti e non richiede ulteriori sovrastrutture tipo quelle metriche, che servono per definire "le distanze". La seconda definizione è data in termini di distanze: $|f(x) - l| \leqslant \epsilon$, ad esempio, significa che "la distanza" tra $f(x)$ ed l è minore di una soglia che abbiamo chiamato ϵ ecc... la definizione data all'inizio non richiede la conoscenza delle distanze: lì l'ϵ è stato dato

[34] La prossima volta, per scrivere che un valore è finito, useremo la scrittura $l < \infty$.

[35] Soddisfacenti alla richiesta che $f(x)$ sia vicino ad l.

unicamente per interpretare l'arbitrarietà dell'intorno "piccolo" di l, avremmo potuto benissimo fare a meno di utilizzare il simbolo ϵ e la definizione non avrebbe perso di efficacia!

DEFINIZIONE 2. *Diremo che:*

$$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty$$

e leggeremo "il limite per x tendente a p, di $f(x)$, diverge all'infinito positivo" [36] *se i valori della funzione diventano vieppiù grandi, mano a mano che i valori di x vengono presi vicino a p.*
Potremmo definire ***intorno dell'infinito*** *(positivo)* [37] *l'insieme ottenuto fissando un numero arbitrariamente grande M e considerando tutti i valori che superano tale M :*

$$I_{+\infty}(M) = \{y\,:\, y > M,\ M > 0 \textit{ arbitrariamente grande}\}$$

In linguaggio simbolico, potremmo tradurre la definizione come segue: detti $I_{+\infty}$ e I_p due intorni rispettivamente di $+\infty$ e di p, il primo scelto in corrispondenza di un qualsiasi M arbitrariamente grande, il secondo trovato in corrispondenza di $I_{+\infty}$, allora:

$$\boxed{\forall M > 0, \exists \delta > 0\,:\, f(x) \in I_{+\infty}(M) \quad \Rightarrow \quad x \in I_p(\delta)}.$$

C'è da notare che anche in questo caso si può utilizzare la definizione topologica di limite

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0\,:\, f^{-1}(I_{+\infty}(M)) \subseteq I_p(\delta),$$

che risulta essere la stessa di quella precedente, avendo solo cambiato l'intorno $I_l(\epsilon)$ con $I_{+\infty}(M)$: ovvero basta utilizzare l'intorno opportuno per indicare "verso dove ci si avvicina" e utilizzare sempre la stessa definizione! come dire: in ogni caso la definizione è una sola, sono gli intorni che cambiano. A questo punto dovrebbero risultare chiare queste altre due definizioni, su cui non ci soffermeremo, lasciando allo studioso il compito di interpretare correttamente la scrittura.

DEFINIZIONE 3. *Diremo che:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

e leggeremo "il limite per x tendente a $+\infty$, di $f(x)$, è l" se i valori della funzione si avvicinano ad $l < \infty$ mano a mano che i valori di x

[36] Oppure "è $+\infty$.
[37] Addirittura "di raggio M".

diventano sempre più grandi in positivo.
Tradotto in linguaggio simbolico:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0,\, \exists M > 0 \,:\, f(x) \in I_l(\epsilon) \quad \Rightarrow \quad x \in I_{+\infty}(M)}.$$

Ovvero anche:

$$\forall \epsilon > 0,\, \exists M > 0 \,:\, f^{-1}(I_p(\epsilon)) \subseteq I_{+\infty}(M).$$

Definizioni analoghe possono essere date per $x \to -\infty$ o quando il limite risulta divergere negativamente, ovvero $\lim_{x\to\text{“qualcosa”}} f(x) = -\infty$, avendo definito un **“intorno” di** $-\infty$ di raggio M in modo analogo a quanto fatto per i caso $+\infty$, ovvero:

$$I_{-\infty}(M) = \{x < -M \,:\, M > 0 \text{ arbitrariamente grande}\}.$$

Ad esempio, in generale, si può dare la seguente definizione per i quattro casi di divergenza all'infinito per x tendente a meno o più infinito.

Definizione 4. *Diremo che:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

e leggeremo "il limite per x tendente a $\pm\infty$, di $f(x)$, diverge all'infinito positivo" se i valori della funzione diventano vieppiù grandi, in positivo, mano a mano che i valori di x diventano sempre più grandi (in positivo).
Tradotto in linguaggio simbolico:

$$\boxed{\forall M_1 > 0,\, \exists M_2 \,:\, f(x) \in I_{\pm\infty}(M_1) \quad \Rightarrow \quad x \in I_{\pm\infty}(M_2)}.$$

Ovvero anche:

$$\forall M_1 > 0,\, \exists M_2 > 0 \,:\, f^{-1}(I_{\pm\infty}(M_1)) \subseteq I_{\pm\infty}(M_2).$$

In ultimo diremo che il limite **non esiste** se la funzione non ha né limite finito, né divergente: ad esempio, all'infinito (sia positivo che nevativo) la funzione $\sin(x)$ non ha limite! non si avvicina ad alcun valore finito, dato che oscilla sempre tra 0 e 1: non diverge poiché è una funzione limitata!

Terminata con la presentazione e la discussione delle definizioni, procediamo ora al calcolo dei limiti che, come spesso diciamo, *"deve sapersi fare ad occhio":* se si "prende" più di un paio di minuti nell'effettuare i calcoli, vuol dire che non si è capito bene il metodo per calcolarli! e, per inciso, le definizioni date sopra non c'entrano nulla con il calcolo dei limiti stessi!

1.4.2. *Il calcolo dei limiti.* Per il calcolo dei limiti ci avvaliamo delle stesse idee introdotte per il calcolo dei limiti di successione, con la sola avvertenza che ora la variabile x non deve necessariamente tendere a $+\infty$, ma può benissimo tendere ad un punto di accumulazione del dominio della funzione. Pertanto ricordiamo e riproponiamo lo stesso approccio *per equivalenze asintotiche.* Tutto principiava dall'osservare che se $\frac{A}{B} = 1$, allora $A = B$. Supponendo invece che $A \neq B$ ma nel limite il loro rapporto tende a 1, allora le due quantità possono considerarsi *"uguali nel limite"* ovvero, come si dice più propriamente, sono quantità **equivalenti:**

$$\lim_{x \to \text{“Qualcosa”}} \frac{A}{B} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A \sim B.$$

Si osservi che, questa definizione di equivalenza, non dipende da dove si fa tendere la x : quel "Qualcosa" può essere un numero, oppure l'infinito, la definizione di equivalenza tra A e B prescinde da questa precisazione e vale sempre! inoltre, evidentemente, quantità equivalenti sono interscambiabili all'occorrenza, si utilizza quella che fa più comodo. A questo punto, quindi, rimane solo da definire le equivalenze utili ed il calcolo dei limiti diventa un gioco di "rimpiazzo" e "trascuro". Prima di proseguire avvertiamo che, essenzialmente, serve conoscere solo le equivalenze per due tipi di limiti: quelli per $x \to \infty$ e quelli per i quali $x \to 0$. Tutti gli altri limiti si possono sempre ricondurre a questi soli due casi ed è quello che faremo nel proseguo. Vale sempre l'osservazione già fatta per le successioni:

$$\frac{1}{q \to \infty} \longrightarrow 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{q \to 0} \longrightarrow \infty,$$

anzi, i limiti per $x \to \infty$, sia che sia infinito positivo, sia che sia infinito negativo, si trattano esattamente come le successioni con gli *ordini di infinito* presentati in quel capitolo. Riportiamo il discorso sui confronti tra gli ordini di infinito per comodità, ma si potrebbe rileggere quanto già scritto nel precedente capitolo e sarebbe anche meglio.

PROPOSIZIONE 10. *Il polinomio* $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ *equivale all'infinito al suo monomio di grado massimo, all'infinitesimo* [38] *al suo monomio di grado minimo.*

Dimostrazione: Consideriamo il limite per $x \to \infty$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P_n(x)}{a_n x^n} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{a_0}{a_n x^n} + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_n}{a_n x^0} \right) =$$

[38] Ovvero per $x \to 0$.

$$= \lim_{x\to\infty}\left(N_1 \cdot \frac{1}{x^n} + N_2 \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \cdots + N_{n-1} \cdot \frac{1}{x} + 1\right) = 1$$

poiché tutti i numeri $N_k = \frac{a_k}{a_n}$ moltiplicano frazioni infinitesime e quindi tutti gli addendi fino al penultimo tendono a zero e, alla fine, si somma proprio 1. Per l'altra affermazione dividiamo il polinomi per il suo monomio di grado minimo che supponiamo essere $a_k x^k$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{P_(x)}{a_k x^k} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{a_k x^k}{a_k x^k} + \frac{a_{k+1}x^{k+1}}{a_k x^k} + \cdots + \frac{a_n x^n}{a_k x^k}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1 + P_{n-k-1}(x)\cdot x\right) = 1$$

dove P_{n-k-1} rappresenta un polinomio di grado $n-k-1$, che moltiplicato per x, dà tutti gli addendi presenti dopo la prima frazione: dato che una quantità moltiplicata per zero, dà zero, allora tutti gli addendi dopo il primo 1, tendono a zero e questo dimostra l'equivalenza asserita nella tesi.

c.v.d.

Per tutti gli altri limiti, che coinvolgono funzioni che non siano polinomi, ci si regola in base alla "velocità di crescita" e quindi al confronto diretto tra le funzioni che *crescono più velocemente:* la "graduatoria" di crescita, detta degli **ordini di infinito** [39] , è sempre quella che abbiamo presentato nel capitolo delle successioni: alla base stanno le funzioni costanti/limitate, che non crescono oltre un certo valore. Poi si piazzano i logaritmi: tutte le basi sono equivalenti l'un l'altro [40] . Al centro della graduatoria si piazzano le potenze di x, in ordine di crescita dell'esponente: per cui, ad esempio, $\mathrm{Ord}_\infty\left(x^{\frac{3}{4}}\right) < \mathrm{Ord}_\infty(x) < \mathrm{Ord}_\infty\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$. Superiori alle potenze, a tutte le potenze! sono le funzioni esponenziali, in ordine di crescita della base [41] . In verità andrebbe aggiunta ancora la funzione fattoriale, che cresce molto velocemente [42] e per la quale vale la seguente formula di approssimazione di Stirling, che ne definisce anche l'equivalenza asintotica [43] :

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

Di seguito riproponiamo lo schemino disegnato per le successioni: basta pensare che la n sia una x. Vale quanto detto allora: le quantità corrispondenti agli ordini d'infinito inferiori si possono trascurare e

[39] Indicati come $\mathrm{Ord}_\infty()$.

[40] Basta che siano maggiori di 1.

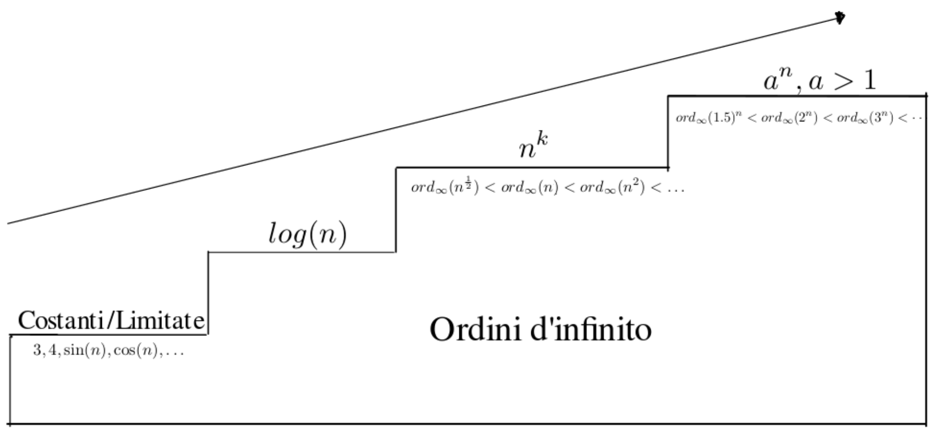
[41] Sempre supposta maggiore di 1.

[42] Più velocemente di una semplice esponenziale.

[43] E sulla cui dimostrazione, per ora, soprassediamo.

si confrontano solo gli "infiniti principali". Si perverrà quindi ad un rapporto del tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$ che può, al limite, portare solo a tre tipi di risultati mutuamente escludentesi:

$$\begin{cases} \infty & \text{se } \mathrm{Ord}_\infty\left(N(x)\right) > \mathrm{Ord}_\infty\left(D(x)\right) \\ 0 & \text{se } \mathrm{Ord}_\infty\left(N(x)\right) < \mathrm{Ord}_\infty\left(D(x)\right) \\ n \neq 0 & \text{se } \mathrm{Ord}_\infty\left(N(x)\right) = \mathrm{Ord}_\infty\left(D(x)\right) \end{cases}$$



Esempio: Si determini il valore del seguente limite:

$$l = \lim_{x \to +\infty} \frac{3^x + 5^{2x-3} - x^6}{9^x + 25^{x-1} + 4\cos(x) + x^{30}}$$

Soluzione: Al numeratore "scartiamo" tutti gli ordini d'infinito inferiori a 5^{2n-3} mentre al denominatore tutti quelli inferiori a 25^{x-1}. Fatto questo rimane:

$$l \sim \lim_{x \to +\infty} \frac{5^{2x-3}}{25^{x-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{25^x} \cdot 5^{-3}}{\cancel{25^x} \cdot 5^{-2}} = \frac{1}{5}.$$

□

Esempio: Si calcoli il seguente limite:

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 3x^3 - 5x^7}{x^3 + 4x^5 + x^{10}}$$

Soluzione: Visto che i polinomi equivalgono ai loro monomi di grado minimo, allora scriveremo:

$$l \sim \lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{x} = \infty.$$

Osserviamo che se $x \to 0^+$, ovvero il limite si calcolasse per x tendente a zero con valori maggiori di zero, come si dice "a destra dello zero" [44]

[44] Questo significa quel simbolo $+$ ad "esponente" di 0.

allora quell'infinito risulterebbe positivo; altresì possiamo dire che per $x \to 0^-$, ovvero avvicinandoci a zero "da sinistra" [45] il risultato sarebbe stato $-\infty$. Nel risultato scritto non abbiamo specificato questo, intendendo che -comunque- si otterrebbe una divergenza della funzione in prossimità dello zero (quell'infinito privo di segno lo dobbiamo intendere proprio in questo senso) ma avremmo dovuto precisare verso quale infinito diverge (positivo o negativo), qualora nel limite avessimo trovato specificato da quale parte si intendeva l'avvicinamento allo zero.

□

Per x infinitesimo, dimostreremo le equivalenze tra le funzioni per come riportate nel prossimo teorema: esse saranno sufficienti per calcolare un gran numero di limiti [46] e basteranno almeno finché non occorrerà trovare "approssimazioni" più accurate delle funzioni, tramite gli sviluppi polinomiali di Taylor [47] .

Proposizione 11. *Per $x \to 0$ si hanno le seguenti equivalenze:*

- $$\sin(x) \sim x \sim \tan(x) \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)$$
- $$\cos(x) \sim 1 - \frac{1}{2}x^2$$
- $$(a+x)^n \sim a^n + n\,a^{n-1}\,x.$$

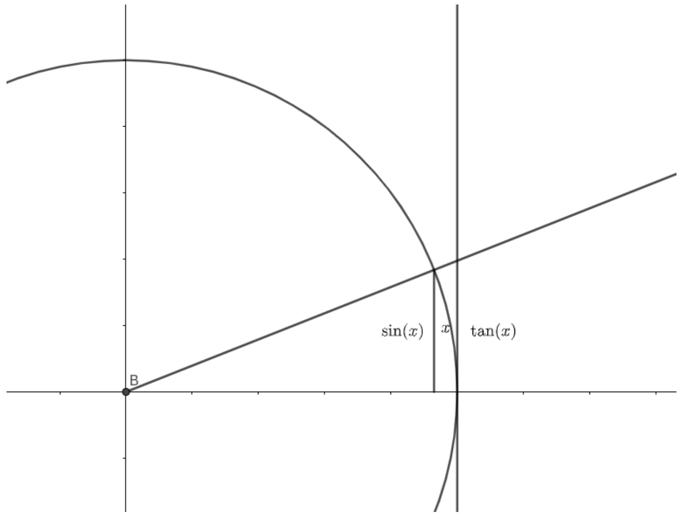
  In particolare $(1+x)^n \sim 1 + nx$.

Dimostrazione: Per dimostrare che $\sin(x) \sim x$ disegniamo una circonferenza goniometrica e consideriamo un arco in radianti pari a x. È evidente che tale arco è compreso tra il $\sin(x)$ e la $\tan(x)$.

[45] E quindi con valori inferiori al punto di accumulazione 0.

[46] Quasi tutti quelli che vengono richiesti in un corso standard di Matematica per le scuole superiori!

[47] Un argomento che svilupperemo con dovizia di particolari tra non molto. Vedremo, in quell'occasione, che queste equivalenze sono casi particolari delle approssimazioni di Taylor, fermate al primo ordine.



Per cui possiamo scrivere $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$ e dividendo tutto per $\sin(x)$ che è, evidentemente, diverso da zero, dato che x tende a zero ma non è zero, si ottiene

$$1 \leqslant \frac{x}{\sin(x)} \leqslant \frac{1}{\cos(x)}.$$

Ora, per $x \to 0$ il coseno di x si avvicina al suo valore 1, per cui si ha anche

$$1 \leqslant \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin(x)} \leqslant 1$$

[48] da cui l'equivalenza asserita, dato che siamo giunti a dire che:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1.$$

Ora, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ e dato che $\cos(x) \to 1$ per $x \to 0$, allora la $\tan(x) \sim \sin(x)$ e, in ultimo, $\tan(x) \sim x$. Per dimostrare le altre due equivalenze del primo punto ricordiamo che $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$. Passando da n a x [49], la funzione $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \to e$ per $x \to \infty$ [50]. Consideriamo

[48] Qualcuno qui tira fuori, inutilmente, un teorema dal nome pittoresco quanto anòdino: *Teorema dei Carabinieri,* il quale afferma che se una funzione è compresa tra due che convergono allo stesso limite, allora anche essa convergerà a quel limite comune. Nella logica di non appesantire gli argomenti che stiamo studiando con inutili bizantinismi, soprassediamo sulle dimostrazioni capziose e convinciamoci che alcune affermazioni sono ovvie e basta fare le giuste osservazioni!

[49] Come si dice *"dal discreto al continuo",* con una locuzione che capiremo appieno tra non molto.

[50] Sia che $x \to +\infty$ sia che $x \to -\infty$.

allora:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Ora effettuiamo il cambio di variabile $t = \frac{1}{x}$: per $x \to 0$ è chiaro che $t \to \infty$ e il limite lo riscriviamo come:

$$\lim_{t\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \ln(e) = 1$$

da cui $\ln(1+x) \sim x$. Partendo da questo risultato, ora dimostriamo anche l'altra equivalenza per la funzione esponenziale; consideriamo quindi il limite seguente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Chiamiamo $e^x - 1 = t$ e quindi $e^x = 1 + t$ ergo $x = \ln(1+t)$. Evidentemente per $x \to 0$ anche t tende a zero e possiamo riscrivere il limite come:

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} \sim \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1$$

da cui l'equivalenza asserita. Vogliamo solo osservare che se è vero, per come abbiamo dimostrato, che $e^x - 1 \sim x$ allora possiamo anche dire che:

$$e^x \sim 1 + x,$$

che ci fornisce una sostituzione immediata della funzione esponenziale per x infinitesima. Per dimostrare il secondo punto partiamo dal seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2\cdot(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2\cdot(1+\cos(x))} \sim$$

$$\sim \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\cdot(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos^2(x)} = \frac{1}{2}.$$

Ergo

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1-\cos(x)}{x^2}\right) = 1.$$

Questo dimostra che:

$$1-\cos(x) \sim \frac{1}{2}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1-\frac{1}{2}x^2 \sim \cos(x).$$

In ultimo dimostriamo l'ultima equivalenza, valida per tutti i valori di n, in particolare per quelli razionali [51]. Ricordiamo lo sviluppo delle

[51]Da cui si possono ricavare, quindi, le equivalenze per le radici quadrate, cubiche ecc...

potenze di binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}.$$

Mettendo a posto di b la x, si ottiene

$(a+x)^n = a^n + n\, a^{n-1}\, x +$ "termini con potenze di x di grado superiore".

Ergo:

$$\frac{(a+x)^n}{a^n + n\, a^n\, x} = 1 + \frac{\text{"termini con potenze di } x \text{ di grado superiore"}}{a^n + n\, a^n\, x}$$

che, per x infinitesimo tende a 1, dato che la frazione al secondo membro equivale ad una potenza di x, di grado superiore al primo, fratto a^n [52] e, pertanto, tende a zero.

c.v.d.

Osserviamo la seguente equivalenza per x infinitesimo:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \sim 1 + \frac{1}{2}\, x$$

che torna molto utile per i calcoli e, in generale:

$$\sqrt[n]{1 \pm x} \sim 1 \pm \frac{1}{n}\, x.$$

Seguono degli esempi per capire come calcolare i vari limiti con la teoria sviluppata in questo capitolo, ma prima ci teniamo a far osservare che la x, che si legge nelle equivalenze dimostrate, sono da considerare come <u>quantità uguali infinitesime</u>, nel senso che $\sin(4x^3) \sim 4x^3$ per $x \to 0$ ovvero per $4x^3 \to 0$. Stessa cosa dicasi per le altre funzioni, ad esempio $e^{3\sqrt{x}} \sim 1 + 3\sqrt{x}$, $\cos(3x^2) \sim 1 - \frac{1}{2}\,(3x^2)^2 = 1 - \frac{9}{2}\, x^4$, ecc...

Esempio: Calcolare il valore del seguente limite:

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{x \sin(2x) + 1 - \cos(x)}{e^{x^2} - 1 + x\sqrt{x^2 + x^5}}.$$

Soluzione: Sostituiamo con gli "infinitesimi equivalenti":

(1) $\sin(2x) \sim 2x$.
(2) $\cos(x) \sim 1 - \frac{1}{2}\, x^2$.
(3) $e^{x^2} \sim 1 - x^2$.
(4) $x^2 + x^5 \sim x^2$.

[52] Ricordiamo che i polinomi, per x infinitesimo, equivalgono ai loro monomi di grado minimo e a^n, essendo una costante, è sempre il monomio di grado minimo!

Pertanto quel limite equivarrebbe a:

$$L \sim \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cdot 2x + \frac{1}{2}\,x^2}{x^2 + x\cdot\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{5}{2}\,x^2}{2x^2} = \frac{5}{4}.$$

□

Esempio: Calcolare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+2x^2) + 3x\sqrt{x^2+x^3+x^4}}{x\tan(2x)+x^2}.$$

Soluzione: Il limite equivarrebbe a quest'altro:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2 + 3x\cdot\sqrt{x^2}}{x\cdot 2x + x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{5x^2}{3x^2} = \frac{5}{3}.$$

□

Esempio: Si calcoli il limite della funzione precedente per $x \to 0^-$:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+2x^2) + 3x\sqrt{x^2+x^3+x^4}}{x\tan(2x)+x^2}.$$

Soluzione: Le equivalenze non cambiano, però si osservi che il prodotto $x\sqrt{x^2}$, per x negativa, è anch'esso negativo [53] !

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2 + 3x\cdot\sqrt{x^2}}{x\cdot 2x + x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(2-3)x^2}{3x^2} = -\frac{1}{3}.$$

□

Esempio: Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x\sqrt{4x^2+3x^4} - \sin(2x^2+x^3)}{x(e^{3x}-1) + \ln(1+2x^2)}.$$

Soluzione: Procediamo direttamente a scrivere il limite equivalente:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x\sqrt{4x^2} - \sin(2x^2)}{x\cdot(3x) + 2x^2} \sim \lim_{x\to 0^+} \frac{6x^2 - 2x^2}{3x^2+2x^2} = \frac{4}{5}.$$

□

Esempio: Si calcoli il limite seguente:

$$L = \lim_{x\to 1^+} \frac{2-3x^2+x^3}{3+4x-7x^2}.$$

Soluzione: Per risolvere questo tipo di limite, si potrebbe "scomodare" il teorema di Ruffini e semplificare il fattore (comune) che annulla il numeratore ed il denominatore mano a mano che $x \to 1$: basterebbe

[53] Per cui rimane giustificato il fatto che non scriviamo subito $x\sqrt{x} = x^2$, potendo anche essere uguale a $-x^2$, come in questo caso.

procedere con una o più divisioni [54]. Però il metodo testé descritto risulterebbe noioso e molto meno elegante di quello che proponiamo con le equivalenze.

Partiamo con questa osservazione: ***se*** $x \to 1$ ***allora*** $t = x-1 \to 0$. Possiamo allora procedere con una sostituzione: a posto di x mettiamo $t+1$ ed il limite lo "convertiamo" a t infinitesimo.

$$L = \lim_{t \to 0} \frac{2 - 3\,(1+t)^2 + (1+t)^3}{3 + 4\,(1+t) - 7\,(1+t)^2} \sim \lim_{t \to 0} \frac{2 - 3(1+2t) + (1+3t)}{3 + 4(1+t) - 7(1+2t)}$$

se tutto è stato sostituito bene, i numeri senza la t devono annullarsi al numeratore, così come al denominatore: è il motivo per cui il limite inizialmente risultava della forma $\frac{0}{0}$ [55]. Infine, dopo le opportune semplificazioni:

$$L \sim \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{2} - \cancel{3} - 6t + \cancel{1} + 3t}{\cancel{3} + \cancel{4} + 4t - \cancel{7} - 14t} = \frac{-3}{-10} = \frac{3}{10}.$$

□

Esempio [56] : Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{2x^3 - 4x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 8}.$$

Soluzione: In questo caso sostituiamo $x \mapsto t+2$ e facciamo tendere $t \to 0^+$. Allora il limite diventa:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{2\,(2+t)^3 - 4\,(2+t)^2 + (2+t) - 2}{(2+t)^2 + 2\,(2+t) - 8} \sim$$

$$\sim \lim_{t \to 0^+} \frac{2\,(2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot t) - 4\,(2^2 + 2 \cdot 2 \cdot t) + \cancel{2} + t - \cancel{2}}{2^2 + 2 \cdot 2 \cdot t + 4 + 2t - 8} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{16} + 24t - \cancel{16} - 16t + t}{\cancel{4} + 4t + \cancel{4} + 2t - \cancel{8}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

□

[54] Qualora ne occorressero più di una.

[55] Anche qui, giusto per "riallineare" quanto stiamo facendo con quanto presente in altri testi scolastici, citiamo che si perde un sacco di tempo nella classificazione delle **forme indeterminate,** che sono identificate in $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $+\infty - \infty$ e 1^∞. In verità non c'è bisogno né di classificarle, né di perderci tempo ad imparare tecniche di calcolo da utilizzare ad hoc. Noi, ad esempio, non utilizziamo questo tipo di approccio ed abbiamo snellito parecchio tutta la parte riguardante il calcolo dei limiti che, altrimenti, avrebbe potuto prendere interi mesi di studio.

[56] Sullo stesso stile di prima.

1.5. Grafico probabile di funzione. Data una legge associativa, con la sola conoscenza di dominio, segno e limiti agli estremi del campo di esistenza, si può già iniziare ad abbozzare il grafico della funzione rappresentata da quella legge: il livello di dettaglio si può migliorare, successivamente, con l'introduzione di strumenti più potenti, che sono rappresentati dalle *derivate* delle funzioni. Per tale motivo, con le conoscenze apprese finora, noi potremo tracciare solo il cosiddetto *grafico probabile,* che spesso già basta per avere un'idea di quello che fa la funzione.

Esempio: Effettuare uno studio della funzione al fine di determinarne il grafico probabile:

$$f(x) = \frac{(x^2+1)\sqrt{x-2}}{x^2-5x+6}$$

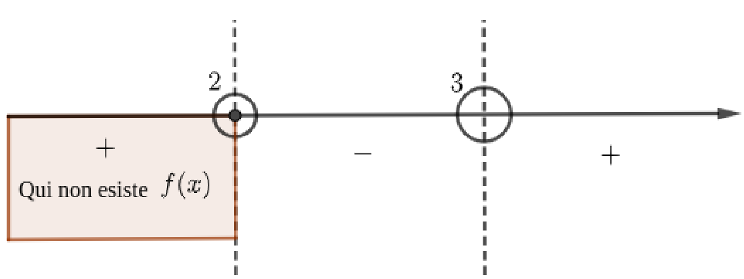
Soluzione: Come primo passo imponiamo le condizioni di esistenza per la radice e per la frazione:

- C.E.Rad.: $x-2 \geqslant 0$, da cui $x \geqslant 2$.
- C.E.Fraz.: $x^2-5x+6 \neq 0$, da cui $x \neq 2$ o $x \neq 3$.

Considerando assieme queste due condizioni si ricava il campo di esistenza:

$$\mathrm{Dom}(f) = (2,3) \cup (3,+\infty).$$

Ora studiamo il segno della funzione, avendo dapprima osservato che x^2+1 è una quantità sempre positiva e quindi non contribuisce a determinarne il segno, così come la radice, che dove esiste, è maggiore o uguale a zero. Possiamo quindi dedurne che $sgn(f(x)) = sgn(x^2-5x+6)$. Questo polinomio lo abbiamo già "annullato" durante lo studio del campo di esistenza e, quindi, sappiamo già che i valori di interesse sono 2 e 3. Mettendo i valori di seguito su una retta e testando la funzione nei vari intervalli, sarà facile convincersi della seguente situazione:



Ora studiamo i limiti agli estremi del c.d.e.

- Il primo limite, per $x \to 2$ si può risolvere con una semplice sostituzione: $x \mapsto t-2$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{(2+t)^2\sqrt{\cancel{2}+t-\cancel{2}}}{(2+t)^2-5(2+t)+6} \sim \lim_{t\to 0^+} \frac{(4+4t)\sqrt{t}}{\cancel{4}+4t-\cancel{10}-5t+\cancel{6}} \sim$$

$$\sim \lim_{t\to 0^+} \frac{4\sqrt{t}}{-t} = \frac{\text{“Numero neg.”}}{q\to 0} = -\infty$$

- Considerando il segno della funzione trovato prima, che deve essere coerente con quello che troveremo nel limite, possiamo scrivere che:

$$\lim_{x\to 3^{\mp}} f(x) = \frac{\text{Numero}}{q\to 0} = \mp\infty.$$

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) \sim \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}\cdot\sqrt{x}}{\cancel{x^2}} = +\infty.$$

Lo studio è completo, quindi siamo ora pronti ad abbozzare il grafico probabile di funzione. Prima però di procedere, introduciamo la seguente definizione e terminologia.

Definizione 5. *Un **asse asintotico** o più semplicemente **un asintoto** è una retta la cui distanza dal grafico di funzione tende a zero.*

Quindi il grafico, all'infinito, si avvicina a tale retta in modo infinitesimo. Ora, le rette nel piano possono essere in direzione verticale, orizzontale o inclinate con pendenza m, le quali denoteremo come rette “oblique”. I primi due casi possiamo già capire che si riferiscono a queste due situazioni:

(1) *Asintoto Verticale:* Se

$$\lim_{x\to p} f(x) = \infty$$

allora la retta $x = p$ è un asintoto verticale (A.V.).

(2) *Asintoto Orizzontale:* Se

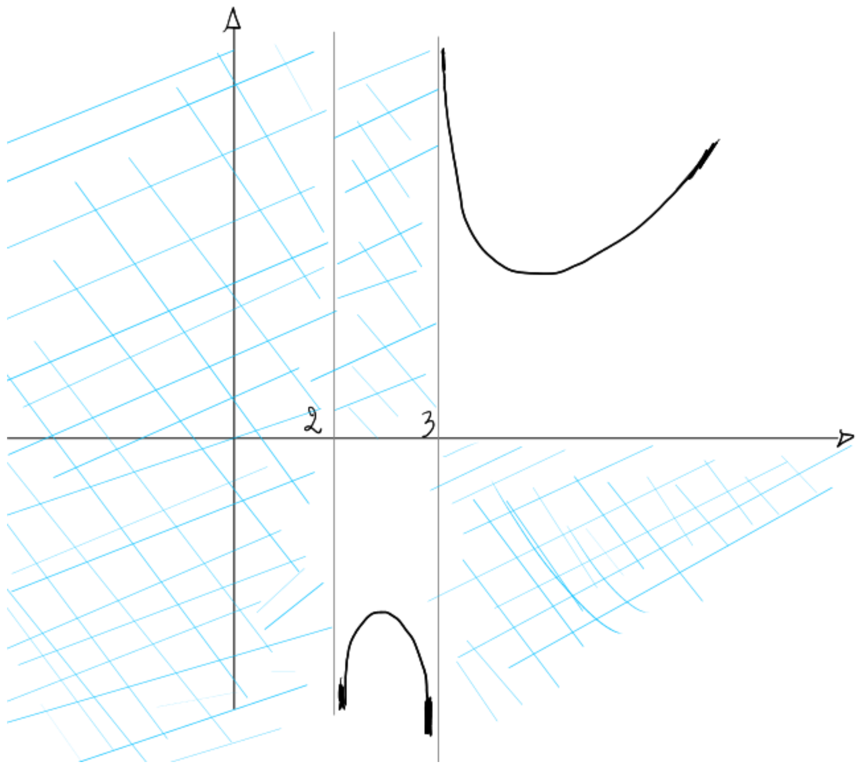
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = N$$

allora $y = N$ è asintoto un asintoto orizzontale (A.Or.). [57]

Osserviamo che per avere uno dei due tipi di asintoti considerati testé, ci deve sempre essere la combinazione ∞ - “numero” nel limite: o per x tendente ad un “numero” il limite esce ∞, oppure $x \to \infty$ ed il limite esce un “numero”. In forza di queste definizioni, lo studio precedente ci dice che la funzione ha due asintoti verticali: $x = 2$ e

[57] Per l'asintoto obliquo ne riparleremo tra poco.

$x = 3$ e nessun asintoto verticale [58] . Per disegnare il grafico probabile, conviene segnare tratti verticali, dalla parte dove sta la funzione, in corrispondenza degli asintoti verticali e per ordinate molto grandi e tratti orizzontali, in corrispondenza degli A.Or., nella parte di piano dove si trova la funzione [59] e per ascisse molto grandi. Siamo ora pronti a disegnare il grafico probabile: dobbiamo riportare tutti i dati nel piano cartesiano e, alla fine, "collegare" le varie "tacche" che abbiamo distribuito in corrispondenza dei vari asintoti o altrove.



Osserviamo dal grafico probabile che ci deve essere sicuramente almeno un punto di massimo relativo nell'intervallo $(2, 3)$ ed almeno un punto di minimo relativo per $x > 2$. Non possiamo però ancora sapere in quale punto esatto si trovino, quanti siano ed a che altezza rispetto all'asse delle ascisse si trovino: per avere tutte queste informazioni dovremo introdurre strumenti più potenti.

□

[58] Ed aggiungiamo noi, nemmeno obliquo.

[59] Questo lo stabilisce il segno della funzione!

Esempio: Si chiamano **funzioni omografiche** tutte quelle della forma:

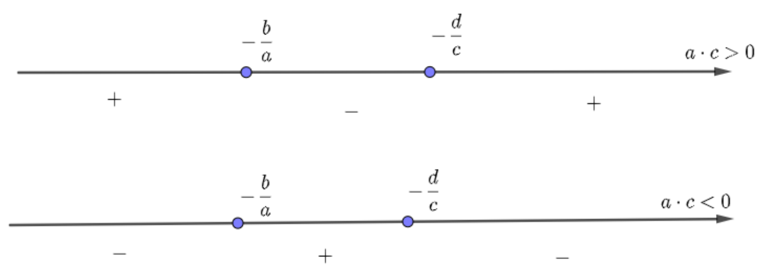
$$f(x) = \frac{a\,x+b}{c\,x+d}.$$

Esse rappresentano *iperboli traslate* riferite ai propri assi e quindi si disegnano facilmente con due "rami" identici simmetrici rispetto al punto d'intersezione degli assi asintotici, da cui l'attributo "omografico". Facciamone uno studio veloce per capire con disegnarle.

Studio veloce: Evidentemente il campo di esistenza coincide con i valori che non annullano il denominatore, per cui possiamo scrivere

$$\mathrm{Dom}(f) = \left(-\infty, -\frac{d}{c}\right) \cup \left(-\frac{d}{c}, +\infty\right).$$

Per determinare il segno della funzione osserviamo che il numeratore si annulla per $x = -\frac{b}{a}$ ed il denominatore per quel valore precedentemente trovato $-\frac{d}{c}$. Ora possiamo considerare solo due casi: il primo in cui i segni di a e c sono uguali ed il secondo in cui sono diversi. Senza ledere alla generalità, possiamo pensare che $-\frac{a}{b} < -\frac{c}{d}$. Si ricavano rispettivamente i seguenti due diagrammi:



Infatti *nel primo caso* si avrebbe che prima del primo valore il numeratore è negativo (o positivo), così come il denominatore; tra i due valori il numeratore diventa positivo (o negativo) ed il denominatore continua ad essere negativo (o positivo) e, infine, dopo il secondo valore risultano positivi (o negativi) entrambi gli elementi della frazione. *Nel secondo caso* i segni sarebbero invertiti per ragionamenti analoghi [60]

Si devono calcolare solo due limiti: all'infinito ed a $-\frac{d}{c}$. Evidentemente i limiti all'infinito escono uguali a $\frac{a}{c}$, poiché numeratore e denominatore sono entrambi binomi di primo grado e quindi il monomio di grado massimo è la parte lineare dell'espressione:

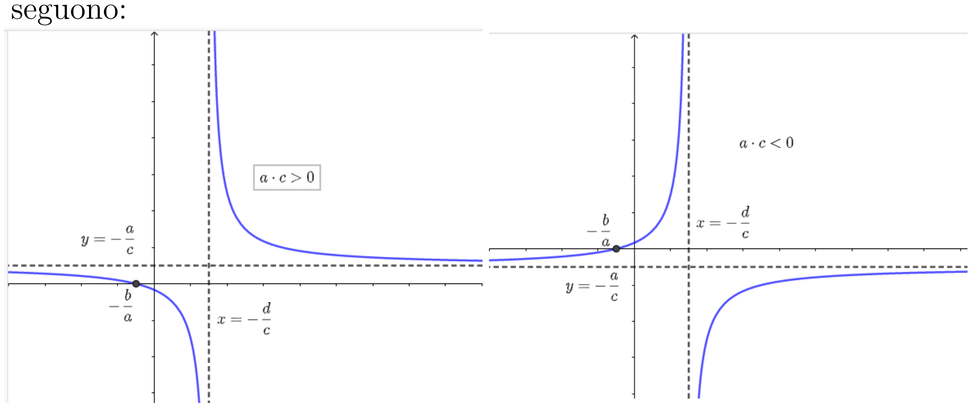
$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = -\frac{a}{c}$$

[60]Per convincersi di quanto affermato, basta contestualizzare con i seguenti due esempi $\frac{x+1}{x-3}$ e $\frac{x+1}{3-x}$.

ergo: $y = -\frac{a}{c}$ rappresenta un A.Or. bilatero [61] . L'altro limite risulta divergere all'infinito, infatti il denominatore si annullerebbe mentre il numeratore si avvicinerebbe ad un numero finito diverso da zero:

$$\lim_{x \to -\frac{d}{c}} f(x) = \frac{\text{“Numero”}}{q \to 0} = \infty.$$

Pertanto sono presenti un A.V.: $x = -\frac{d}{c}$ ed un A.Or: $y = -\frac{a}{c}$. Inoltre, se a e c hanno lo stesso segno, la funzione risulterà decrescente, se invece il segno è discorde, risulterà crescente: i grafici sono come quelli che seguono:



$\square$

Ritorniamo ora sulla determinazione degli asintoti: se la retta asintotica risulta “inclinata”, la sua equazione sarà del tipo $y = m\,x + q$. Dobbiamo quindi determinare i due parametri m e q. Consideriamo allora la distanza tra i punti P e Q, che stanno rispettivamente l'uno sul grafico della funzione e l'altro sulla retta asintotica: per comodità consideriamo punti allineati verticalmente [62] . Non sapendo quale dei due è più alto a quale più basso -almeno in linea di principio- la differenza $y_P - y_Q$ potrebbe essere sia positiva che negativa, ma non è una cosa che ci interessa. Sappiamo però che per $x \to \infty$ la distanza tra P e Q deve diventare infinitesima, ovvero la differenza, indicata testé sulle ordinate, tenderà a zero. Quindi possiamo scrivere:

$$\lim_{x \to \infty} |y_P - y_Q| = 0.$$

Consideriamo che $y_P = f(x_P)$ e $y_Q = m\,x_P + q$ e stiamo indicando la x_P con x, ascissa generica che poi faremo tendere all'infinito. L'argomento del limite, quindi, a meno del segno, è:

$$f(x) - m\,x - q.$$

[61]Ovvero sia “a sinistra” che “a destra”.

[62]Quindi aventi la stessa ascissa.

Usiamo un trucchetto ingegnoso: se noi dividiamo tutto per x si otterrebbe:

$$\frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x}$$

e dovendo essere:

$$\lim_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x}\right| = 0,$$

considerando che $\frac{q}{x} \to 0$, allora concludiamo che

$$\boxed{m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}}.$$

Per determinare q, basta considerare l'altro limite:

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - mx - q| = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)}$$

Un paio di osservazioni:

1°) Per avere un asintoto obliquo (A.Ob.) è necessario che, dallo stesso lato, non sia presente l'A.Or.: infatti, se ci fosse, la funzione all'infinito già si avvicinerebbe al valore indicato da esso per la proprio ordinata e non può, anche, contemporaneamente avvicinarsi ad un asse che sta "fuggendo" verso l'infinito!

2°) Dato che dividendo per x la funzione $f(x)$, aumenta il denominatore di un grado nella scala degli ordini d'infinito, per poter trovare m, è necessario che la differenza dei gradi, tra numeratore e denominatore, sia esattamente di 1.

Se queste condizioni non sono entrambe verificate, è inutile pensare di poter trovare un asintoto obliquo per la funzione!

Esempio: Studiare la funzione al fine di determinarne il grafico probabile:

$$f(x) = \frac{(x^2-1)\cdot\sqrt{x^2+1}}{(x+2)(x-4)}.$$

Soluzione: Imponiamo le condizioni di esistenza.

- C.E.Rad: $x^2 + 1 \geqslant 0$.
- C.E.Fraz.: $(x+2)(x-4) \neq 0$.

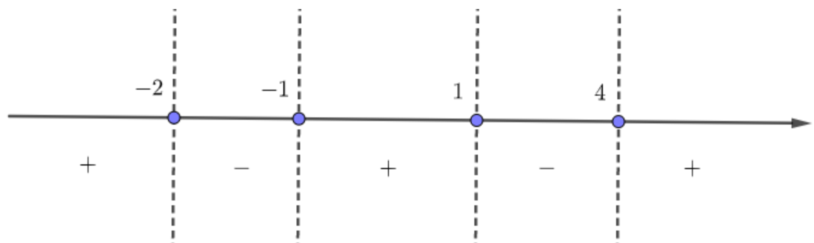
Ora, la prima richiesta è verificata senz'altro per ogni valore di x : quella espressione è la somma di un numero non negativo, x^2, con 1. Dalla seconda condizione ricaviamo $x \neq -2, 4$. Pertanto siamo giunti alla conclusione che:

$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 4) \cup (4, +\infty).$$

Per il segno osserviamo che

$$sgn(f(x)) = sgn((x^2 - 1)(x + 2)(x - 4))$$

per cui, annullando uno alla volta ciascuna parentesi [63] si ottengono i seguenti valori: $-1, 1, -2, 4,$ che utilizzeremo per individuare gli intervalli in cui la funzione potrebbe cambiare di segno. Procediamo come al solito: "spalmiamo" questi valori su una retta numerica e testiamo i segni della funzione in ciascun intervallo.



Abbiamo considerato i valori -10 per l'intervallo $(-\infty, -2)$, poi, in sequenza per ciascuno degli altri intervalli, $-\frac{3}{2}$, 0, 2 e 10. Ricordiamo che basta contare il numero dei segni negativi dati da ogni fattore presente nella funzione. Ora calcoliamo i limiti agli estremi del campo di esistenza e, qualora non trovassimo A.Or., cercheremo anche eventuali A.Ob., se sono soddisfatte le richieste per la loro presenza.

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) \sim \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^2 \cdot \sqrt{x^2}}{x \cdot x} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to -2^{\mp}} f(x) = \frac{\text{“Numero”}}{q \to 0} = \pm\infty.$$

$$\lim_{x \to 4^{\mp}} f(x) = \frac{\text{“Numero”}}{q \to 0} = \mp\infty.$$

Da questi limiti deduciamo che non ci sono A.Or., ma ci stanno due asintoti verticali: $x = -2$ e $x = 4$. Dato che non ci sono A.Or. e considerato che l'$\mathrm{Ord}_\infty(\text{Numeratore}) - \mathrm{Ord}_\infty(\text{Denominatore}) = 1$ cerchiamo la presenza di eventuali A.Ob. [64] . Consideriamo il rapporto seguente e vediamo dove tende all'infinito:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(x^2 - 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}}{x(x + 2)(x - 4)} \sim \frac{x^2 \cdot \sqrt{x^2}}{x \cdot x \cdot x} = \frac{|x|}{x} \longrightarrow \mp 1$$

a seconda che x tenda a $-\infty$ o a $+\infty$. Quindi, a sinistra potrebbe esserci un A.Ob. con pendenza $m = -1$, mentre a destra un altro

[63] Perché?

[64] Immaginiamo che ce ne possano essere due distinti: infatti la funzione tende all'infinito positivo sia per $x \to -\infty$, sia per $x \to +\infty$.

A.Ob., con pendenza $m = 1$. Ora verifichiamo se c'è anche q, in caso contrario l'asintoto non esisterebbe, pur avendo già determinato un valore per m!

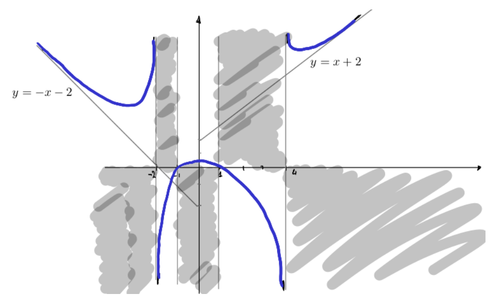
$$f(x) - m\,x = \frac{(x^2-1)\cdot\sqrt{x^2+1}}{(x+2)(x-4)} \pm x =$$

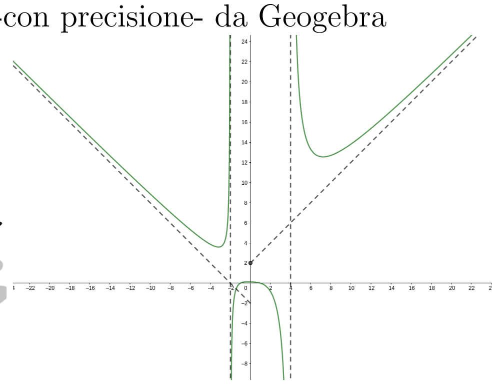
$$= \frac{(x^2-1)\cdot\sqrt{x^2+1} \pm (x+2)\,(x-4)\,x}{(x+2)(x-4)} \sim \frac{x^2\sqrt{x^2} \pm (x^3-2x^2)}{x^2},$$

quest'ultima frazione [65], per x tendente a $-\infty$ o a $+\infty$ tende a due numeri distinti, infatti:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|x|^3 - |x|^3 - 2x^2}{x^2} = -2, \quad \text{ma anche:} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x^3 + 2x^2}{x^2} = 2.$$

Abbiamo determinato due asintoti obliqui: $y = -x - 2$ a sinistra e $y = x + 2$ a destra. Possiamo ora riportare le informazioni su un piano cartesiano e disegnare il grafico probabile, confrontando quello tracciato da noi con quello disegnato -con precisione- da Geogebra





2. La funzione derivata

Per migliorare la precisione nel tracciamento del grafico di funzione, occorrerebbe, innanzitutto, saper determinare con precisione i punti di massimo o minimo relativo della funzione: equivalentemente sarebbe di fondamentale importanza saper individuare gli intervalli in cui la funzione risulta crescente o decrescente [66]. Il discorso che faremo non è però finalizzato né alla determinazione dei massimi o minimi relativi,

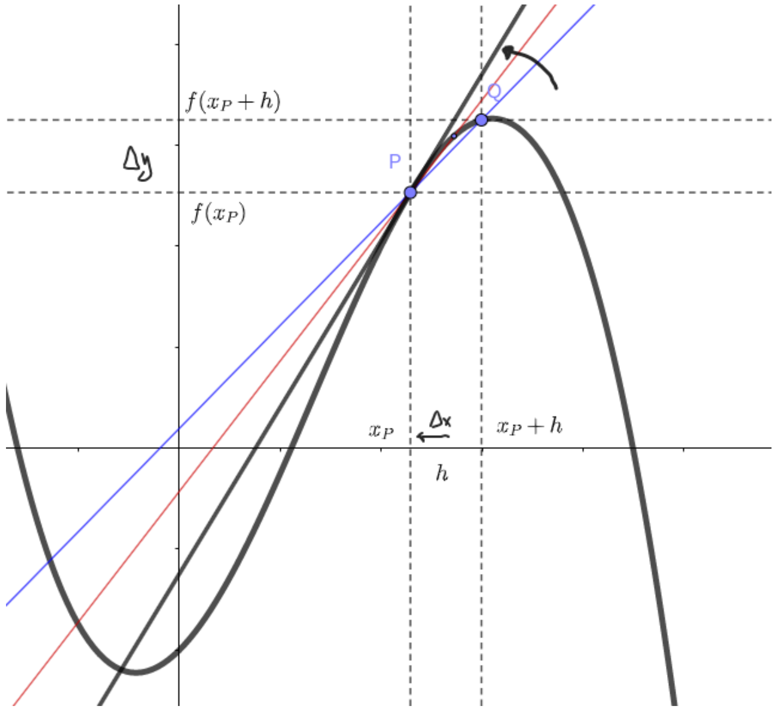
[65] Osserva che "ad occhio" la potenza al cubo di x si annulla in entrambi i casi e quindi conserviamo anche le potenze di secondo grado al numeratore, dato che al denominatore il monomio dominante è proprio di secondo grado! al limite, se non servisse, non avremmo comunque procurato alcun danno nel calcolo che poi seguirà: semplificheremmo in un passaggio successivo.

[66] Infatti, conoscendo tali intervalli, come conseguenza immediata si conoscerebbero anche i punti di massimo o minimo relativi.

né alla determinazione degli intervalli di crescenza: come spesso avviene in Matematica, si studia un argomento che apparentemente non c'entra nulla con un altro ed i risultati ottenuti nell'uno, portano luce nuova anche nell'altro, in modo quasi magico. Tra i tanti approcci possibili, scegliamo quello prettamente geometrico: ci chiediamo *come poter determinare la retta tangente al grafico* di una funzione, qualunque curva essa possa definire nel piano cartesiano, che ammetta una retta tangente nei propri punti. Per le coniche abbiamo già visto ampiamente vari metodi, tra cui la condizione di tangenza $\Delta = 0$ e le formule di sdoppiamento. Ma se la curva non è rappresentata da una funzione polinomiale di secondo grado, pur intersecando il suo grafico con un fascio di rette, l'equazione che ne risulta non sarà di secondo grado, quindi, chiaramente non avrebbe proprio senso parlare di discriminante! per altro, le formule di sdoppiamento sono valide sono per le coniche: non sono formule di tipo generale. Trovare una retta tangente al grafico di una funzione qualsiasi, a prima vista, sembrerebbe un arduo compito, ma *chiarendo la vera natura della retta tangente,* la soluzione risulterà molto ragionevole ed anche abbastanza agevole. L'idea che "funziona alla grande" è di considerare due punti distinti: il punto P, in cui si vuole determinare la retta tangente alla curva ed il punto Q, che è discosto da P di una piccola quantità. Se si fa avvicinare il punto Q sempre più a P la *retta secante,* la cui equazione è facilmente ricavabile per via analitica [67] **tenderà** ad assumere la posizione **tangente** ricercata: possiamo perciò dire che *la retta tangente è la posizione limite delle rette secanti* passanti per due punti infinitesimamente vicini l'uno all'altro [68] . Il seguente grafico illustra la situazione:

[67] Essendo note le coordinate dei due punti P e Q.

[68] Così vicini che a noi, comuni mortali, sembra di vedere un unico punto, di due sovrapposti: invece sono due punti distinti per un infinitesimo!



Il punto P ha coordinate $(x_P, f(x_P))$ ed il punto Q lo determiniamo sommando una piccola quantità $h = \Delta x$ alla x_P, per cui avrà coordinate $Q(x_P + h, f(x_P + h))$. La retta tangente in P ha equazione $y - y_P = m(x - x_P)$. L'unica quantità che manca è la pendenza m che determineremo tosto come:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_P + h) - f(x_P)}{h}.$$

Per determinare proprio la retta tangente, di questo **rapporto incrementale,** consideriamo il limite per h infinitesimo, ovvero, la pendenza della retta tangente $m_{\tan}$ è data da:

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_P + h) - f(x_P)}{h}.$$

Ora immaginiamo che la nostra funzione ammetta una retta tangente in ogni punto del suo grafico, allora si potrebbe pensare di associare ad ogni ascissa, nel dominio della funzione, la pendenza della retta tangente nel punto corrispondente sul grafico della funzione:

$$\begin{aligned} f' : \mathrm{Dom}(f) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \ &\mapsto \ f'(x) = m_{\tan} \end{aligned}$$

Questa nuova funzione viene chiamata **derivata prima della funzione** $f(x)$ nel "punto" x ed è *importantissima,* non solo perché permette di calcolare il *coefficiente angolare* delle rette tangenti nei punti di una funzione, ma sopratutto per le numerose altre applicazioni che illustreremo a breve. Possiamo dire che proprio la possibilità di calcolare le derivate, anche in modo abbastanza semplice e metodico, ha permesso di cambiare il modo di fare geometria e fisica fin dai tempi di Newton . Enfatizziamo ancora una volta il risultato (notevole) che abbiamo ottenuto in questo paragrafo: permettendo ad x di variare nel dominio della funzione, la **derivata prima** si definisce come:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

e rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione, nel suo punto di ascissa x.

Esempio: Si determini la retta tangente nel punto di ascissa 2, al grafico della funzione $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 2$.

Soluzione: L'ordinata del punto è $y = f(2) = \cancel{8} + 8 - \cancel{8} - 2 = 6$. Calcoliamo ora la pendenza della retta tangente:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^3 + 2\,(2+h)^2 - 4\,(2+h) - 2\, -\, 6}{h} \sim$$

$$\sim \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{8} + 12h + \cancel{8} + 8h - \cancel{8} - 4h - \cancel{8}}{h} = 16.$$

A questo punto, l'equazione della retta cercata è:

$$y - 6 = 16(x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad y = 16x - 26.$$

□

Osservazione: se provassimo a tracciare il grafico probabile della funzione presentata nell'esempio precedente, non riusciremmo a farlo! tutte le funzioni polinomiali cubiche, del tipo quindi $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ all'infinito si comportano come $a_3 x^3$ che per $x \to \mp\infty$ tende a $sgn(a_3) \cdot (\mp\infty)$. Inoltre non ha asintoti né verticali, né orizzontali né obliqui: quindi come si disegna? anche le rette hanno lo stesso tipo di comportamento descritto -finora- per questa funzione. Vedremo presto, che proprio la funzione derivata prima ci permetterà di scoprire "un'oscillazione" e quindi ci metterà in condizioni di disegnare un grafico abbastanza affidabile di funzioni di questo tipo [69] .

[69]Per ora si consiglia di verificare con Geogebra che effettivamente la retta trovata è tangente nel punto $(2, 6)$ al grafico della funzione data.

2.1. Come si calcolano le derivate. Fortuna vuole che per determinare la derivata di una funzione, non c'è alcun bisogno di passare ogni volta dalla definizione tramite limite: basta ricavare le derivate delle cinque funzioni elementari che, unitamente ad altre cinque *regole di derivazione*, permetteranno di calcolare la derivata di qualsiasi funzione ci salti in mente. Raggruppiamo in un unico teorema la dimostrazione delle cinque derivate "elementari" ed infine, stiliamo una tabella sinottica da tenere presente per il futuro. Per comodità ed all'occorrenza utilizzeremo una $D()$ per indicare la funzione derivata prima: $f'(x) = D(f(x))$ [70] .

PROPOSIZIONE 12. *Le funzioni elementari si derivano come segue:*

- *La derivata di una potenza è l'esponente che moltiplica la potenza con l'esponente diminuito di uno:*
$$D(x^n) = n \cdot x^{n-1}.$$
- *La derivata della funzione seno, è il coseno:*
$$D(\sin(x)) = \cos(x).$$
- *La derivata della funzione coseno è l'opposto del seno:*
$$D(\cos(x)) = -\sin(x).$$
- *La funzione esponenziale* [71] *ha una derivata che è se stessa:*
$$D(e^x) = e^x.$$
- *La derivata del logaritmo naturale è il reciproco dell'argomento:*
$$D(\ln(x)) = \frac{1}{x}.$$

Dimostrazione: Basta calcolare il limite del rapporto incrementale, quando l'incremento della variabile indipendente tendente a zero [72]: iniziamo con la prima dimostrazione.

-
$$D(x^n) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \sim \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^n} + n \cdot x^{n-1} \cdot h - \cancel{x^n}}{h} = n \cdot x^{n-1}.$$
-
$$D(\sin(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \sim$$

[70] A questa scrittura ci si riferisce anche come *notazione operazionale*.
[71] Quella per antonomasia, con la base e.
[72] Questa è la definizione di derivata di funzione, espressa in modo esteso.

$$\sim \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{\sin(x)} + \cos(x)\cdot h - \cancel{\sin(x)}}{h} = \cos(x).$$

- $$D(\cos(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \sim$$
$$\sim \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{\cos(x)} - \sin(x)\cdot h - \cancel{\cos(x)}}{h} = -\sin(x).$$

- $$D(e^x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x\cdot(e^h - 1)}{h} \sim \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot h}{h} = e^x.$$

- $$D(\ln(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)\right] =$$
$$= \lim_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$
sostituendo a $h = \frac{1}{t}$, facciamo tendere il limite per $t \to \infty$ e si ottiene
$$D(\ln(x)) = \lim_{t\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x\cdot t}\right)^{t\cdot x\cdot\frac{1}{x}} = \ln(e^{\frac{1}{x}}) = \frac{1}{x}.$$

C.V.D.

Ricavate queste derivate, tutte le altre si deducono da esse, poiché le altre funzioni sono "costruite" a partire da queste! basta conoscere delle regole che permettano di *"distribuire l'operatore"* D sulle componenti della funzione di cui si voglia calcolare la derivata.

Proposizione 13 (Regole di derivazione). *Valgono le seguenti quattro regole di derivazione, corrispondenti alle 4 operazioni base* [73] *più la regola di derivazione della composizione di funzioni:*

- *La derivata di una somma di multipli di funzioni* [74] *è la somma degli stessi multipli delle derivate delle sigole funzioni:*
$$D(n_1\cdot f_1(x) + n_2\cdot f_2(x)) = n_1\cdot D(f_1(x)) + n_2\cdot D(f_2(x)).$$

[73] Somma/differenza si contano assieme.
[74] Ovvero di una combinazione lineare di funzioni.

- *La derivata di un prodotto si effettua derivando ogni singolo fattore, uno alla volta, lasciando gli altri fattori così come sono e sommando il tutto* [75] *:*

$$D(f_1(x) \cdot f_2(x)) = D(f_1(x)) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot D(f_2(x)).$$

- *Il quoziente tra due funzioni si deriva quadrando il denominatore ed al numeratore sottraendo le derivate del numeratore dalla derivata del denominatore moltiplicate rispettivamente per il denominatore e il numeratore:*

$$D\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) = \frac{D(f_1(x)) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot D(f_2(x))}{[f_2(x)]^2}.$$

- *La funzione composta si deriva facendo finta che l'argomento di ciascuna di esse sia una variabile indipendente e moltiplicando, di volta in volta, per la derivata della funzione che ha sostituito "la x" nella funzione precedente:*

$$D(f_1(f_2(x)) = D(f_1(X)) \cdot D(f_2(x)), \quad \textit{essendo} \quad X = f_2(x).$$

Dimostrazione: Dimostriamo uno alla volta le varie regole.

- La prima affermazione deriva direttamente dalle proprietà dei limiti, infatti:

$$D(n_1 \cdot f_1(x) + n_2 \cdot f_2(x)) =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(n_1 \cdot f_1(x+h) + n_2 \cdot f_2(x+h)) - (n_1 \cdot f_1(x) + n_2 \cdot f_2(x))}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{n_1\,(f_1(x+h) - f_1(x)) + n_2\,(f_2(x+h) - f_2(x))}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} n_1 \cdot \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} + \lim_{h\to 0} n_2 \cdot \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} =$$
$$= n_1 \cdot D(f_1(x)) + n_2 \cdot D(f_2(x)).$$

- La definizione di derivata, per un prodotto di due funzioni, si scrive come

$$D(f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(x+h)f_2(x+h) - f_1(x)f_2(x)}{h}.$$

Usiamo un trucchetto: sommiamo zero in modo intelligente.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_1(x+h)f_2(x+h) - f_1(x)f_2(x+h) + f_1(x)f_2(x+h) - f_1(x)f_2(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f_1(x+h) - f_1(x)]f_2(x+h) + f_1(x)[f_2(x+h) - f_2(x)]}{h} =$$

[75] Quindi ci dovranno essere tanti addendi per quanto sono i fattori!

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h} \cdot f_2(x+h) + \lim_{h\to 0} f_1(x) \cdot \frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h} =$$

$$= D(f_1(x)) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot D(f_2(x))$$

osservando che per $h \to 0$ si ha anche $f_2(x+h) \to f_2(x)$.

Per dimostrare il prossimo punto, premettiamo il seguente lemma:

Lemma 2. *La derivata della funzione reciproca è il quoziente, cambiato di segno, della derivata della funzione di partenza con il quadrato della funzione stessa:*

$$D(f(x))^{-1} = -\frac{D(f(x))}{[f(x)]^2}.$$

Dimostrazione: Consideriamo la ovvia uguaglianza:

$$f(x) \cdot (f(x))^{-1} = 1$$

e deriviamo ambo i membri tramite la regola di derivazione del prodotto:

$$D(f(x)) \cdot (f(x))^{-1} + f(x) \cdot D(f(x))^{-1} = 0.$$

Da questa deduciamo che

$$f(x) \cdot D(f(x))^{-1} = -\frac{D(f(x))}{f(x)}$$

per cui

$$D(f(x))^{-1} = -\frac{D(f(x))}{[f(x)]^2}$$

come affermato.

□

- La derivata del quoziente si può ottenere a partire dalla seguente semplice osservazione, unitamente al lemma ed alla regola di derivazione del prodotto:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = f_1(x) \cdot \frac{1}{f_2(x)} = f_1(x) \cdot (f_2(x))^{-1}.$$

  Si lascia come esercizio la deduzione di questa regola, data la semplicità del discorso.
- Per l'ultima regola, scriviamo ancora una volta la definizione di derivata per la funzione di funzione:

$$D(f_1(f_2(x))) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(f_2(x+h)) - f_1(f_2(x))}{h}$$

ed usiamo anche qui un trucco intelligentissimo: moltiplichiamo per uno!

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_1(f_2(x+h)) - f_1(f_2(x))}{f_2(x+h) - f_2(x)} \cdot \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h}$$

e giusto per capire meglio cosa sta succendendo, chiamiamo

$$f_2(x+h) - f_2(x) = H$$

da cui

$$f_2(x+h) = f_2(x) + H$$

e quindi, dato che per $h \to 0$ anche $f_2(x+h) \to f_2(x)$ ergo $H \to 0$, il limite diventa:

$$\lim_{h\to 0, H\to 0} \frac{f_1(f_2(x)+H) - f_1(f_2(x))}{H} \cdot \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} =$$

$$= f_1^{'}(f_2(x)) \cdot f_2^{'}(x).$$

C.V.D.

Raccogliamo i risultati ottenuti in un "quadro sinottico" da avere sempre presente al fine della determinazione delle derivate di tutte le funzioni di cui abbiamo bisogno.

$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{f'(x)}$			
x^n	$n\,x^{n-1}$		**Somma/differenza**	$[\lambda f(x) + \mu g(x)]' = \lambda\, f'(x) + \mu\, g'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$		**Prodotto**	$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$		**Quoziente**	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$
e^x	e^x		**Funzione di funzione**	$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$			

Non ci resta ora che da fare un po' di esempi e raccomandare, di farne numerosi altri, allo studente scrupoloso.

Esempio: Dapprima consideriamo un semplice polinomio: per calcolare la sua derivata basta la prima regola e la regola di derivazione delle potenze.

$$f(x) = 3x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 4.$$

Allora la sua derivata è [76]

$$f'(x) = D(3x^4+3x^3-x^2+5x-4) = 3\,D(x^4)+3\,D(x^3)-D(x^2)+5\,D(x)+ \\ -D(4) = 3\cdot 4\,x^3 + 3\cdot 3\,x^2 - 2\,x + 5 - 0 = 12\,x^3 + 9\,x^2 - 2\,x + 5.$$

In breve, bisogna "distribuire" la D di derivata, seguendo le regole di derivazione, su ogni funzione componente quella che si vuole derivare e, fatto questo, si giungerà sempre ad avere una D di una delle cinque funzioni (elementari) presenti nella prima colonna della tabella riassuntiva: a questo punto, basta scrivere la funzione corrispondente nella seconda colonna, per ciascuna di esse ed il gioco è fatto.

□

Esempio: Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \sqrt{x},\ \ f_2(x) = \tan(x),\ \ f_3(x) = 3^x.$$

Per la prima funzione basta utilizzare la regola di derivazione delle potenze, per la seconda quella del quoziente unitamente alle regole di derivazione delle funzioni goniometriche elementari e, infine, per la terza, la regola di derivazione delle funzioni esponenziali, più la regola di derivazione delle funzioni di funzioni [77], successivamente ad un "cambio di base".

$$f_1'(x) = D(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

La derivata della radice quadrata si incontra abbastanza spesso, quindi conviene aggiungerla in calce alla tabella, come tra quelle che si utilizzano frequentemente, così come la successiva che calcoleremo.

$$f_2'(x) = D\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{D(\sin(x))\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot D(\cos(x))}{[\cos(x)]^2} = \\ = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Ricordando le proprietà dei logaritmi, possiamo scrivere $f_3(x) = e^{\ln(3^x)}$ e quindi $f_3(x) = e^{x\ln(3)}$. A questo punto si ha

$$f_3'(x) = D(e^{x\ln(3)}) = e^{x\ln(3)}\cdot D(x\ln(3)) = e^{x\ln(3)}\cdot\ln(3)$$

e, riscritto più ordinatamente: $f_3'(x) = \ln(3)\cdot 3^x$.

□

[76] Solo per questo primo esempio scriveremo tutti i passaggi in modo pedante: per gli altri esempi dello stesso tipo "lavoreremo" normalmente, come di solito si fa.

[77] La regola di derivazione delle funzioni di funzioni viene anche conosciuta col nome di **Regola della catena.**

Esempio: Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = \sin(x)\cos(x).$$

Questa si può calcolare in due modi:

$$f'(x) = D(\sin(x)) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot D(\cos(x))$$

utilizzando la regola "del prodotto" ed ottenendo, quindi,

$$f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

in cui riconosciamo l'espressione del $\cos(2x)$, oppure, dato che $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$, utilizzando la "regola della catena"

$$f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cos(2x) \cdot \cancel{2} = \cos(2x).$$

□

Esempio: Trovare la derivata della funzione:

$$f(x) = e^{\sqrt{x^2+2x+3}}.$$

Questa funzione è composta da tre funzioni e, quindi, la dovremo derivare "*a cascata*", utilizzando la regola della catena:

$$f'(x) = \underbrace{e^{\sqrt{x^2+2x+3}}}_{D(e^{()})} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x+3}}}_{D(\sqrt{()})} \cdot \underbrace{(2x+2)}_{D(x^2+2x+3)} =$$

$$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} \cdot e^{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

□

Esempio: Determinare la derivata di:

$$f(x) = x^2 \ln(x)\sqrt{x}.$$

Essendo essa un prodotto di tre funzioni, ci aspettiamo di trovare la derivata composta dalla somma di tre addendi, infatti:

$$f'(x) = 2x \cdot \ln(x)\sqrt{x} + x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \sqrt{x} + x^2 \ln(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

per rendere la scrittura più piacevole, razionalizziamo l'ultima frazione e mettiamo in evidenza $x\sqrt{x}$ su tutt'e tre gli addendi, ottenendo:

$$f'(x) = \left(2\ln(x) + 1 + \frac{1}{2}\ln(x)\right) x\sqrt{x} = \left(\frac{5}{2}\ln(x) + 1\right) x\sqrt{x}.$$

□

Esempio: Trovare la derivata di:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right).$$

Una prima osservazione: quando diciamo che la derivata del logaritmo è $\frac{1}{x}$, intendiamo essenzialmente che per i logaritmi, la derivata, *inverte l'argomento.* Quindi, utilizzando la regola della catena, la prima frazione che scriveremo, corrispondente alla derivata del logaritmo, sarà la frazione invertita dell'argomento.

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \cdot D\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \cdot \frac{2x\cdot(x^2-1)-(x^2+1)\cdot 2x}{[x^2-1]^2} =$$

$$= \frac{\cancel{x^2-1}}{x^2+1} \cdot \frac{-4x}{(x^2-1)^{\cancel{2}}} = \frac{-4x}{(x^2+1)(x^2-1)} = -\frac{4x}{x^4-1}.$$

□

Osservazione: Dato che della derivata prima ci interesserà principalmente il segno e nella regola del quoziente, il denominatore viene elevato al quadrato, allora non serve "lavorare" sul denominatore per semplificarne l'espressione: basta semplicemente trascurarlo! tanto non dà informazioni sul segno della derivata.

2.2. Derivata delle funzioni inverse. Molto utili e frequenti nel calcolo sono le derivate delle funzioni inverse, in particolare dell'$\arctan(x)$. Dalla definizione di funzione inversa si ha

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{o anche} \quad f^{-1}(f(x)) = x.$$

Derivando tramite la regola della catena, ad esempio la seconda uguaglianza, si ottiene:

$$D(f^{-1}(f(x))) \cdot f'(x) = 1$$

da cui:

$$\left(f^{-1}(y))\right)' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Ad esempio si ha:

$$D(\arctan(y)) = \frac{1}{D(\tan(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \cos^2(x).$$

Ora bisogna scrivere questa ultima funzione come funzione di $y = \tan(x)$. A tal fine eleviamo al quadrato entrambi i termini dell'equazione, che definisce la y e "giochiamo" un po' con le scritture, ottenendo:

$$y^2 = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \Leftrightarrow 1 + y^2 = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \Leftrightarrow 1 + y^2 = \frac{1}{\cos^2(x)},$$

ergo:

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1+y^2},$$

da cui:

$$\boxed{D\left(\arctan(y)\right) = \frac{1}{1+y^2}}.$$

Un ragionamento analogo porta a trovare le derivate delle funzioni inverse delle goniometriche elementari, ad esempio:

$$D(\arcsin(y)) = \frac{1}{(\sin(x))'} = \frac{1}{\cos(x)}$$

Ora, dall'identità fondamentale della goniometria,

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

ricaviamo:

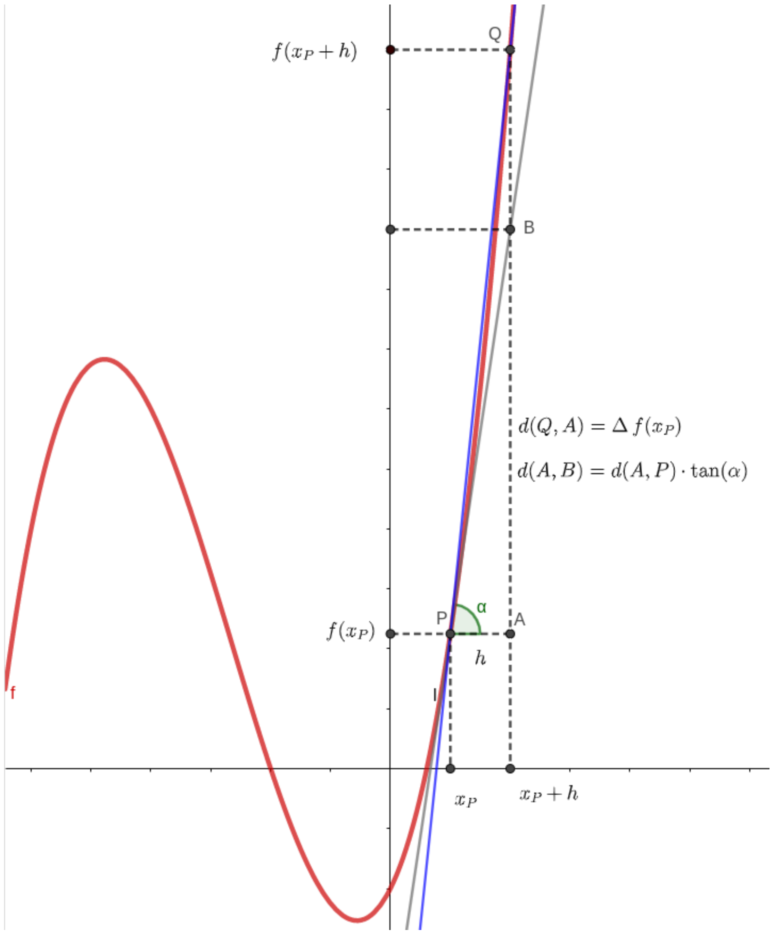
$$\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} = \sqrt{1-y^2},$$

per cui:

$$\boxed{D\left(\arcsin(y)\right) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}.$$

3. Informazioni aggiuntive fornite dalla derivata

Torniamo ora ad un discorso lasciato incompleto e la cui attinenza con l'introduzione della derivata sembra remota: nello studio della funzione avevamo necessità di determinare *le oscillazioni* e, di conseguenza, i punti di massimo o minimo locale, per poter rendere più precisa la rappresentazione cartesiana del grafico. La derivata è stata introdotta per determinare il coefficiente angolare della retta tangente in un punto dato sul grafico di funzione. Prima di vedere come la conoscenza della derivata e, in particolare, del suo segno, possa tornare utile al fine di determinare gli intervalli di crescenza o decrescenza della funzione e, di conseguenza, anche gli *estremi locali* della funzione stessa, introduciamo una quantità fondamentale della Matematica, da cui prende -tra l'altro- il nome questa parte di "calcolo" che stiamo studiando: il **differenziale** di una funzione. È utile osservare il seguente disegno per capire le affermazioni che faremo.



Consideriamo la retta tangente nel punto P di ascissa x_P ed incrementiamo quest'ultima di una piccola quantità h. Il valore della funzione passerà da $f(x_P)$ a $f(x_P+h)$ e tale *incremento* lo indichiamo con $\Delta f(x_P)$. Nel disegno abbiamo indicato con Q il punto corrispondente, sul grafico della funzione, all'incremento dell'ascissa del valore h. Ora consideriamo anche il punto B, *preso sulla retta tangente,* corrispondente allo stesso incremento dell'ascissa, a partire dal punto di tangenza P. Il triangolo $\overline{ABO}$, ottenuto tracciando la retta orizzontale passante per P e quella verticale passante per B è chiaramente rettangolo e, per la risoluzione di tali triangoli, si ha:

$$d(A,B) = d(A,P) \cdot \tan(\alpha) = d(A,P) \cdot f'(x_P),$$

dato che la tangente di α è proprio il coefficiente angolare della retta tangente nel punto P e noi abbiamo detto, in precedenza, che essa coincide con la derivata prima della funzione, calcolata nell'ascissa del punto. Questa quantità ultima scritta è di *fondamentale importanza* per tutta la Matematica e si chiama **differenziale** della funzione

$f(x)$ nel punto P e si indica con $d\,f(x_P)$. Osserviamo che $d(A,P)$ è proprio l'incremento h che abbiamo dato all'ascissa, per cui possiamo riscrivere:

$$d\,f(x_P) = f'(x_P) \cdot h$$

se poi, per uniformità di scrittura, l'incremento h lo indichiamo come $\Delta\,x$ allora scriveremo anche:

$$\boxed{d\,f(x_P) = f'(x_P) \cdot \Delta\,x}$$

L'osservazione importante viene ora: se l'incremento h è molto piccolo, diciamo *infinitesimo,* allora il segmento $\overline{BQ}$ che ha lunghezza pari alla differenza tra $\Delta\,f(x_P)$ e $d\,f(x_P)$ tende a diventare infinitesimo, poiché la retta tangente in P era stata calcolata proprio a partire dalla secante PQ facendo tendere h a zero e quindi possiamo scrivere questa fondamentale approssimazione:

$$\boxed{\Delta\,f(x_P) \approx d\,f(x_P)}$$

ovvero, detto in linguaggio corrente, **il differenziale è una approssimazione degli incrementi della funzione** per incrementi della variabile indipendente sufficientemente piccoli.

Esempio: Trovare un valore approssimato di $\sqrt{9,02}$.

Soluzione: Se chiamiamo $f(x) = \sqrt{x}$ e $x_P = 9$ allora possiamo dire che $9,02 = 9 + 0,02$ ed indicare con h l'incremento $0,02$. Ora consideriamo $\Delta\,f(x_P) = \sqrt{9,02} - \sqrt{9}$ che viene approssimato dal differenziale in x_P : come ormai sappiamo $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ per cui $d\,f(x_P) = \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 0,02$ ovvero $d\,f(x_P) = \frac{1}{6} \cdot 0,02$. A questo punto abbiamo trovato il valore che cercavamo, infatti scriveremo:

$$\Delta\,f(x_P) \approx d\,f(x_P) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{9,02} - \sqrt{9} \approx \frac{1}{6} \cdot 0,02$$

da cui

$$\sqrt{9,02} \approx 3 + \frac{0,02}{6} = 3,0033333.$$

Facciamo notare che una qualsiasi calcolatrice tascabile darebbe come prima approssimazione $3,0033314$ che differisce da quello da noi trovato per la sesta cifra decimale: ovvero avviamo dato un'ottima approssimazione di quella radice quadrata!

□

Esempio: Di quanto aumenta approssimativamente il volume di una sfera se il raggio aumentasse di un decimo?

Risposta: Il volume della sfera, come è noto, è pari a $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. L'incremento che subisce, a fronte di un incremento del raggio di $h = \frac{1}{10}$, è approssimativamente dato dal differenziale:

$$\Delta V \approx d\,V(r) = V' \cdot h = \frac{4}{\cancel{3}}\pi\,\cancel{3}r^2 \cdot \frac{1}{10}\,r = \frac{2}{5}\pi\,r^3.$$

L'incremento relativo, che è anche più interessante da conoscere, rispetto a quello assoluto appena trovato, è dato da:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\frac{2}{5}\cancel{\pi}\cancel{r^3}}{\frac{4}{3}\cancel{\pi}\cancel{r^3}} = \frac{3}{10},$$

quindi la sfera subisce una incremento del proprio volume di circa tre decimi.

□

Il prossimo esempio chiarisce ancor di più il fatto che, l'approssimazione con il differenziale, rappresenta una *approssimazione lineare degli incrementi:* nei fatti, se la funzione è lineare, allora il differenziale non costituisce solo una approssimazione dell'incremento ma, addirittura, ne uguaglia il valore!

Esempio: Di quanto aumenta la superficie di una campo da calcio inizialmente di 60×115 metri se il lato lungo viene aumentato di ulteriori 5 metri?

Risposta: Si calcola in modo diretto che l'area iniziale è di $60 \cdot 115 = 6900$ metri quadrati e quella finale di $60 \cdot 120 = 7200$ metri quadri: quindi l'incremento della superficie è pari a $\Delta S = 7200 - 6900 = 300$ metri quadrati. Ora, l'area del rettangolo di gioco, fissato il lato corto di 60 metri. è una funzione lineare del lato lungo, che chiamiamo x. Per cui $S = 60\,x$. La derivata $S' = 60$ e l'incremento della variabile indipendente è $h = 5$ metri. Il differenziale, con i valori esposti, diventa $d\,S(115) = 60 \cdot 5 = 300$, come già trovato con calcolo diretto e precedentemente detto.

□

Ancora un esempio prima di procedere oltre.

Esempio: Determinare un valore approssimato del $\sin(50^o)$.

Soluzione: Un angolo "vicino" a 50^o di cui si conosce il valore è sicuramente 45^o. L'incremento sarà di 5^o pari a [78] $\frac{1}{36}\pi$ radianti. Il

[78] Ricordiamoci che la misura degli angoli in gradi non rappresenta un numero puro, quindi essa va sempre convertita in radianti, i quali potranno poi essere moltiplicati, all'occorrenza, con altri numeri.

differenziale della funzione $\sin(x)$ è $d\sin(x) = \cos(x) \cdot \Delta x$. A questo punto possiamo scrivere l'approssimazione

$$\sin(50^o) - \sin(45^o) \approx \cos(45^o) \cdot \frac{1}{36}\pi \quad \Leftrightarrow \quad \sin(50^o) \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{36} \cdot \pi$$

ovvero

$$\sin(50^o) \approx \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{36}\right) \approx 0,768813489.$$

Si può agevolmente verificare, tramite una comune calcolatrice tascabile, che il valore approssimato viene dato come: 0.766 che differisce, da quello trovato tramite differenziale, solo per terza cifra decimale: anche in questo caso un'ottima approssimazione!

□

Dopo questi esempi, facciamo questa piccola osservazione: se $f(x) = x$ allora il differenziale $d\,f(x) = h$ ovvero, l'incremento della variabile indipendente corrisponde al differenziale di x : dato che $h = \Delta x$ ed è anche $d\,f(x) = d\,x$ allora possiamo riscrivere la formula del differenziale in quest'altro modo molto interessante:

$$\boxed{d\,f(x) = f'(x) \cdot d\,x}$$

Uno dei modi alternativi di indicare la derivata di una funzione, a parte l'apice "$'$" e la notazione operazionale "$D()$" è proprio quella utilizzata dal "padre fondatore" del calcolo differenziale [79] Gottfried Wilhelm von Leibniz:

$$f'(x) = \frac{d\,f(x)}{d\,x}$$

che, a seguito della definizione di differenziale, ha un senso perfettamente compiuto! Infatti la derivata di una funzione è il limite del rapporto incrementale quando l'incremento della variabile indipendente tende a zero: in verità anche l'incremento della variabile dipendente, contemporaneamente, va a zero! se uno volesse essere pignolo, quel rapporto indicato come $\frac{d\,f(x)}{d\,x}$ rappresenterebbe una frazione del tipo $\frac{q_1 \to 0}{q_2 \to 0}$ e quindi non è definita se non all'interno di un limite. Però, se si pensa a quella frazione come rapporto tra due differenziali, allora è perfettamente lecito dire che essa è una vera e propria frazione! non solo: considerando la derivata come il rapporto tra due differenziali, alcune regole di derivazione risultano anche di facile dimostrazione! Ad esempio, la "regola della catena" si ricava banalmente da questa osservazione: se $y = y(x(t))$ allora semplicemente si può scrivere

$$\frac{d\,y}{d\,t} = \frac{d\,y}{d\,x} \cdot \frac{d\,x}{d\,t}.$$

[79] Assieme a Newton.

Ma c'è di più: qualche volta, ricavare il differenziale è molto più semplice che ricavare direttamente la derivata di una funzione che, magari, non è facile da esprimere esplicitamente. Il procedimento usato viene chiamato, da alcuni autori, **differenziazione implicita** e permette di ricavare la derivata a partire dal differenziale della funzione data [80] .

Esempio: Trovare la derivata della funzione $y = f(x)$ a partire dall'equazione analitica seguente:

$$xy = 2y + 3x^2 - y^3.$$

Soluzione: Calcoliamo direttamente il differenziale [81] , ricordando che $y = y(x)$ e quindi il suo differenziale è $y' \cdot d\,x$. Nel primo membro compare un prodotto e quindi va utilizzata la regola di derivazione del prodotto [82]

$$(1 \cdot y + xy')\,d\,x = 2y'\,d\,x + 6x\,d\,x - 3y^2\,y'\,d\,x.$$

Dividendo tutto per il differenziale $d\,x$ si ottiene

$$y + xy' = 2y' + 6x - 3y^2y'$$

e raccogliendo y' ad un membro

$$y' = \frac{y - 6x}{2 - x - 3y^2}.$$

Esempio: Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$ trovare l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa 3 ed ordinata positiva.

Soluzione: Intanto troviamo le coordinate del punto P di tangenza: evidentemente $x_P = 3$ e sostituendo questo valore nell'equazione si ottiene $y^2 - 4y = 0$ da cui $y = 0$ oppure $y = 4$. Il punto, quindi, è $P(3, 4)$. La retta tangente avrà equazione $y - y_p = m\,(x - x_P)$: manca solo la determinazione di m. Differenziamo implicitamente l'equazione:

$$2x\,d\,x + 2y\,y'\,d\,x - 2\,d\,x - 4\,y'\,d\,x = 0$$

[80] Anche se la funzione di cui si voglia calcolare la derivata non si può esprimere in modo esplicito.

[81] Se una funzione è uguale ad un'altra, allora anche il suo differenziale deve coincidere con quello dell'altra: in breve, il differenziale della funzione al primo membro deve essere uguale al differenziale della funzione al secondo membro!

[82] Ricordiamo che il differenziale è il prodotto della derivata moltiplicato l'incremento e per la derivata si applicano le regole già studiate precedentemente.

e, dividendo per il differenziale $d\,x$, si ottiene:

$$2x+2y\,y'-2-4y'=0 \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{2x-2}{4-2y}.$$

Ricordiamo che $m=f'(x_P)$ ovvero è, nel nostro caso, $y'(x_P,y_P)$ e sostituendo le coordinate di P a posto delle x e delle y presenti nell'espressione di y' si ottiene:

$$m=\frac{2\cdot 3-2}{4-2\cdot 4}=\frac{4}{-4}=-1.$$

La retta tangente è quindi

$$y=-1\,(x-3)+4 \quad\Leftrightarrow\quad y=-x+7.$$

Osserviamo che ricavare esplicitamente y come funzione di x nel semicerchio superiore [83] , seppure possibile, sarebbe stato molto più laborioso e, soprattutto, ricavare la pendenza della retta tangente come derivata calcolata nell'ascissa del punto, sarebbe risultato un compito improbo.

□

3.1. Intervalli di crescenza ed estremi locali. Considerato che il differenziale approssima l'incremento della funzione, possiamo sfruttare questo fatto per determinare gli intervalli in cui la funzione risulta crescente o decrescente. Dalla scrittura $\Delta\,f(x)\approx d\,f(x)$ si ricava subito che se la variabile indipendente passa dal valore x_0 al valore x_0+h e, conseguentemente $f(x_0)$ passa a $f(x_0+h)$, il segno dell'incremento della funzione, dipende unicamente dalla derivata prima della funzione in x_0 : infatti

$$\Delta\,f(x_0)=f(x_0+h)-f(x_0) \quad\approx\quad d\,f(x_0)=f'(x_0)\cdot h.$$

Ricordiamo che una funzione si dice *crescente* nel punto x_0 se considerato un qualsiasi $x_1>x_0$, in un intorno opportunamente piccolo di x_0, nel dominio della funzione, allora $f(x_0)<f(x_1)$ [84] . Se consideriamo l'incremento h positivo, evidentemente il segno dell'incremento coincide con il segno della derivata prima nel punto di partenza x_0 : $sgn(\Delta\,f(x_0))=sgn(f'(x_0))$. Quindi, se la derivata è positiva, la funzione risulta crescente. Altresì è vero che $\Delta\,f(x_0)$ risulta negativo se $f'(x_0)<0$ e quindi il valore $f(x_0+h)$ risulterebbe, in tal caso, minore del valore "di partenza" $f(x_0)$: pertanto, in questo caso, la funzione risulta *decrescente* in x_0. Se una funzione è crescente (o decrescente)

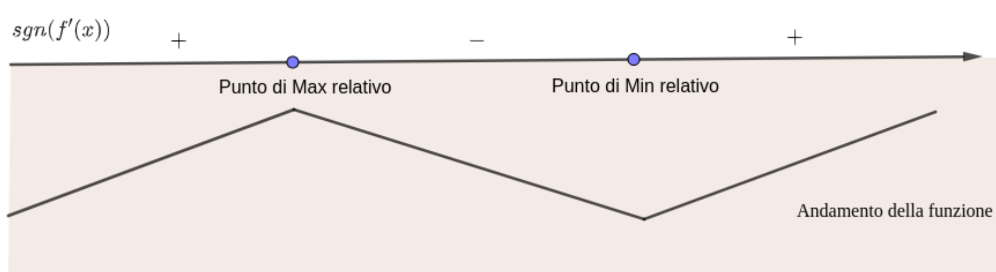
[83] Rispetto al diametro orizzontale.

[84] E deve anche essere che in quello stesso intorno, se $x_0>x_1$ allora $f(x_0)>f(x_1)$.

in ogni punto di un dato intervallo, allora colà si dirà semplicemente crescente (o decrescente). Enfatizziamo il fatto che la crescenza o decrescenza di una funzione è una proprietà locale, ovvero è qualcosa che dipende da intorni opportunamente piccoli di dati punti.

Capìta questa corrispondenza tra segno della derivata e caratteristica di crescenza/decrescenza locale, possiamo sfruttare la conoscenza del segno della funzione derivata, per determinare gli intervalli ove la funzione (di partenza) è crescente o decrescente e, come conseguenza immediata, trovare i punti *estremi* della funzione, ovvero i punti di *massimo o minimo* locale. Infatti, se la funzione ammette la derivata prima in tutti i punti di un intervallo e in tale intervallo vi è un punto rispetto al quale essa cambia di segno, allora dovrà necessariamente o crescere e poi decrescere, oppure prima decrescere e poi crescere: quest'ultimo caso ci permette di individuare un punto di minimo relativo, nel caso precedente ci troveremo di fronte al caso di un massimo relativo. Ora, per poter cambiare di segno, essendo la derivata esistente, per ipotesi, in tutti i punti di quell'intervallo, essa deve necessariamente annullarsi. I punti in cui la derivata esiste si chiamano, solitamente, **punti regolari** della funzione e, tra di essi si distinguono quelli per i quali la derivata prima è nulla: essi chiamansi **punti critici.** Tra i punti critici compaiono i punti di massimo o minimo locale, ma non necessariamente tutti i punti critici devono essere o di massimo o di minimo! Osserviamo che la derivata rappresenta la prendenza della retta tangente: dimostreremo più avanti, in modo rigoroso, che i punti di massimo o minimo regolare devono necessariamente avere la tangente orizzontale, per ora ci accontentiamo dell'intuizione a motivare tale affermazione. Riassumendo possiamo terminare questa sezione, prima di procedere con qualche esempio, con il seguente prospetto riepilogativo:

$f'(x) > 0$	$\leftrightarrow$	$f(x)$ crescente
$f'(x) < 0$	$\leftrightarrow$	$f(x)$ decrescente
$f'(x_P) = 0$	$\leftrightarrow$	x_P punto critico



Esempio: Determinare gli intervalli di crescenza/decrescenza della funzione seguente e stabilire la natura dei punti critici:

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 8$$

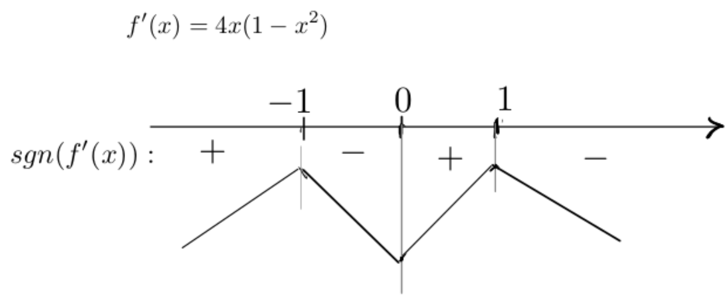
Soluzione: Soprassediamo per ora sullo studio della funzione di cui, comunque, osserviamo la natura polinomiale [85] . Calcoliamo la derivata e studiamone il segno:

$$f'(x) = -4x^3 + 4x = 4x(1 - x^2).$$

Essa si annulla in:

$$x = 0, \quad x = \mp 1,$$

che rappresentano, pertanto, i suoi punti critici. Nel prospetto seguente studiamo e segniamo il segno della derivata ed il conseguente andamento del grafico di funzione.



Dallo schema precedente deduciamo che la funzione ha *due punti di massimo relativo* in corrispondenza dei valori di x uguali a ∓ 1. Inoltre ha un unico punto di *minimo relativo* in corrispondenza di $x = 0$. La funzione risulta *crescente* nell'insieme $(-\infty, 1) \cup (0, 1)$ e risulta *decrescente* in $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$. I valori estremi della funzione sono le ordinate dei punti di massimo o minimo [86] e, questi, sono dati dai due punti di massimo $(-1, 9)$, $(1, 9)$ e, dal punto di minimo $(0, 8)$.

Esempio: Disegnare il grafico della funzione, indicando chiaramenti eventuali punti di massimo o minimo realtivi.

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

[85] Giusto per dire che non ci sono problemi di esistenza né per lei né per la sua derivata.

[86] Che si trovano valutando la funzione nei punti critici trovati precedentemente.

Soluzione: [87] Iniziamo con la determinazione del *dominio.* Essendoci solo la frazione, come operazione "pericolosa", imponiamo che il denominatore sia diverso da zero:

$$x^2 + x + 1 \neq 0.$$

Considerando il discriminante di questo polinomio

$$\Delta = 1 - 4 < 0$$

possiamo asserire con tranquillità che non si annulla mai (ed anzi è anche sempre positivo, dato che lo è il termine noto!) pertanto

$$\mathrm{Dom}(f(x)) = (-\infty, +\infty)$$

Per il segno della funzione, ribadiamo l'osservazione che il denominatore è sempre positivo, allora concludiamo che:

$$sgn(f(x)) = sgn(\text{Numeratore}).$$

Ma anche il polinomio al numeratore ha il $\Delta < 0$ e quindi, considerato che il suo termine noto è positivo, anche esso sarà sempre positivo: insomma, questa funzione è sempre *strettamente positiva.* Passiamo allo studio del comportamento della funzione agli estremi del campo di esistenza: ci sono solo due limiti da calcolare: $\lim_{x\to\mp\infty} f(x)$. Essi sono uguali e, dato l'uguaglianza tra i monomi di grado massimo al numeratore ed al denominatore, valgono uno:

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) \sim \lim_{x\to\mp\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

In conclusione possiamo dire che c'è un *asintoto orizzontale bilatero* di equazione $y = 1$; non ci sono, invece, asintoti verticali, dato che il c.d.e. non elimina alcun punto! Passiamo ora allo studio del *segno della derivata prima.*

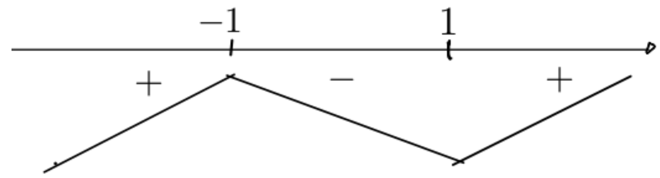
$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+x+1) - (x^2-x+1)(2x+1)}{[x^2+x+1]^2} =$$

$$= \frac{(x^2+1)(\cancel{2x} - 1 - \cancel{2x} - 1) + x\,(2x - \cancel{1} + 2x + \cancel{1})}{\dots} = \frac{2x^2-2}{\dots}.$$

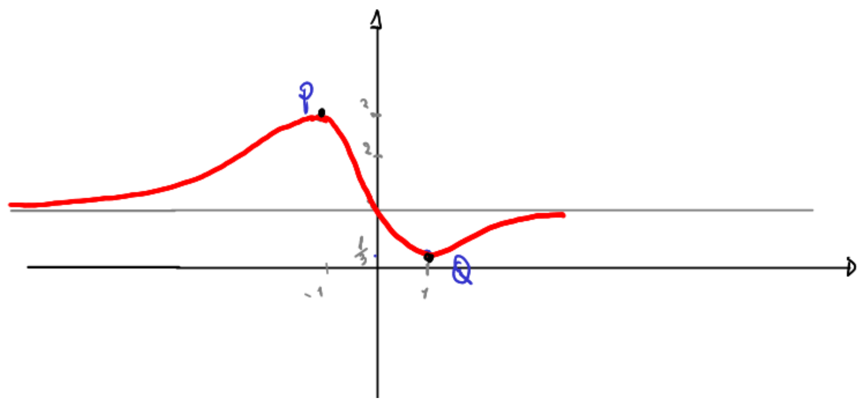
[87]Uno studio di questo tipo è "quasi completo", dato che manca ancora solo lo studio delle concavità per definirlo *completo.*

Osserviamo che il denominatore della derivata è semplicemente quello della funzione di partenza elevato al quadrato: significa che non dovremo tenerlo in considerazione [88] ! Per il segno della derivata, quindi, serve solo annullare il numeratore e determinare il segno negli intervalli individuati, sulla retta reale, dai punti critici della funzione.

$$f'(x) = 0 \quad \text{se} \quad 2x^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \mp 1.$$



Individuiamo allora un punto di massimo relativo per $x = -1$ ed uno di minimo relativo per $x = 1$. Essi corrispondono ai punti $P(-1, 3)$ e $Q\left(1, \frac{1}{3}\right)$ del grafico di funzione. Mettiamo tutti i dati trovati su un piano cartesiano e disegniamo il grafico per come richiesto [89].



Osserviamo [90] che prima del punto P la funzione deve cambiare di concavità e lo stesso deve succedere tra P e Q, idem dopo Q, altrimenti quell'asse orizzontale non potrebbe essere un asse asintotico e la funzione non potrebbe nemmeno oscillare tra i due punti estremi.

Prima di procedere con qualche altro esempio, vorremmo meditare un po' su delle funzioni molto importanti, che si trovano spesso negli esercizi e che molti testi affrontano in modo molto più complicato di quanto

[88] Ammesso che avessimo eliminato qualche punto dal campo di esistenza della funzione, gli stessi sarebbero stati eliminati anche dal dominio della derivata: insomma, dove non c'è la funzione anche la derivata non può essere calcolata! e, essendo una quantità elevata al quadrato, essa risulta mai negativa, ergo, non incide sul segno della funzione.

[89] Osserviamo anche che $f(0) = 1$ quindi il grafico passa dal punto $(0, 1)$.

[90] Ché presto lo dovremo studiare!

sia necessario. Stiamo parlando del **valore assoluto** o **modulo** di una quantità data. Il discorso è semplicemente questo: qualsiasi sia la quantità, negativa o positiva, si elimina il segno e si prende unicamente il suo valore. Ora, quando si effettua un'operazione del genere, in automatico siamo indotti a considerare la quantità, privata del segno, come *quantità positiva* ma, in effetti, non è quello che viene fatto considerando "il modulo" di qualcosa. Ad esempio, se consideriamo il valore -5 e lo priviamo del suo segno, otteniamo 5; questo valore, però, viene anche identificato con il numero "positivo" $+5$, da cui nasce la confusione corrente tra molti studenti. Per definizione, diciamo che il *valore assoluto* di una quantità q, indicato con $|q|$, è il valore di q a cui si è tolto il segno [91] . Resta inteso che lo zero, non avendo segno, risulta già il valore assoluto di se stesso. Da questa definizione segue questa caratteristica [92] :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

In verità a noi questa caratteristica, passata come definizione, non piace proprio, ma tant'è che è la più in voga. Ora, sia $f(x) = x$ che $f(x) = -x$ rappresentano due rette le cui derivate sono rispettivamente 1 e -1. Quando si considera il valore assoluto, che ha la caratteristica di essere l'una o l'altra di queste funzioni, a seconda che si consideri l'argomento positivo o negativo, evidentemente esso ha derivata 1 o -1 in tutti i punti, rispettivamente, in cui $x > 0$ o $x < 0$, ad esclusione di $x = 0$, per il quale valore la derivata stessa non è definita [93] .

Se noi definiamo la funzione **segno di** x come quella funzione che vale $+1$ per gli argomenti positivi e -1 per l'argomento negativo,

$$sgn(x) = \begin{cases} +1 & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

allora possiamo riscrivere il valore assoluto di x, escluso il valore $x = 0$ per il quale imponiamo che abbia valore zero, come la funzione

$$|x| = x \cdot sgn(x).$$

[91] Assoluto deriva dal verbo "ab-solvere" che significa *slegare:* anche il sacerdote che "assolve" dal peccato colui che si confessa e sinceramente si pente delle proprie azioni, non fa altro che "slegarlo" dal peccato stesso!

[92] Proprio perché una quantità senza segno viene identificata come positiva e, per rendere positivo un numero negativo, bisogna cambiargli il segno!

[93] Dovrebbe valere contemporaneamente $+1$ e -1 e questo è impossibile!

La derivata del valore assoluto, per come è da caratteristica prima definita è

$$D(|x|) = \begin{cases} +1 & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

che è, per come abbiamo scritto poco sopra, la funzione "segno" di x, ma, anche applicando la regola di derivazione del prodotto per $x \cdot sgn(x)$ si ottiene:

$$D(s \cdot sgn(x)) = 1 \cdot sgn(x) + x \cdot 0 = sgn(x)$$

che coincide proprio con la derivata del valore assoluto testé data. Insomma possiamo dire che **la derivata del valore assoluto è la funzione segno.** Questo sarà molto utile per "compattare" lo studio di funzioni in cui compare il valore assoluto di qualche quantità [94] .

Esempio: Si effettui uno studio della funzione al fine di determinarne il grafico, riconoscendo eventuali punti di massimo o minimo locale:

$$f(x) = \frac{x^3}{|x^2 - 1|}.$$

Soluzione: Iniziamo con il c.d.e: essendoci una frazione, la sola condizione che imponiamo è quella di esistenza, appunto, della frazione, ovvero $|x^2 - 1| \neq 0$. Questo significa che $x^2 - 1 \neq 0$ ovvero $x \neq \mp 1$. Ergo

$$\text{Dom} f(x) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

Per il segno la questione è molto più semplice: al denominatore il valore assoluto garantisce che la quantità sia sempre positiva o, al più nulla [95] , quindi il segno dipende unicamente dal numeratore e, evidentemente, esso è positivo per $x > 0$ e negativo per $x < 0$. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) \sim \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^3}{x^2 \cdot sgn(x^2 - 1)} = \mp\infty.$$

$$\lim_{x \to -1^{\mp}} f(x) = \frac{-1}{q \to 0} = -\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \to 1^{\mp}} f(x) = \frac{1}{q \to 0} = +\infty.$$

Dato che non c'è l'A.Or. ed il grado di differenza tra numeratore e denominatore è proprio uno, allora cerchiamo eventuali asintoti obliqui.

[94] Useremo la derivata del valore assoluto, per come abbiamo visto ora, associata alla regola della catena, per derivare l'argomento del valore assoluto stesso.

[95] Ma i valori che l'annullano li abbiamo già eliminati da c.d.e. della funzione.

Per altro rileviamo due A.V. in $x = \mp 1$. Per $x \to \mp\infty$ in ogni caso è:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{x} \cdot |x^2 - 1|} = \frac{\cancel{x^2}\,1}{\cancel{x^2} \cdot sgn(x^2 - 1)} \longrightarrow 1.$$

D'altra parte è

$$f(x) - mx = \frac{x^3}{|x^2 - 1|} - x = \frac{x^3 - x^3 \cdot sgn(x^2 - 1)}{x^2 \cdot sgn(x^2 - 1)} =$$

$$= \frac{x^{\cancel{3}} \cdot (1 - sgn(x^2 - 1))}{\cancel{x^2} \cdot sgn(x^2 - 1)} \longrightarrow 0$$

essendo la parentesi al numeratore identicamente nulla [96] Concludiamo che $y = x$ è un asintoto obliquo bilatero. Passiamo ora allo studio del segno della derivata prima.

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot |x^2 - 1| - x^3 \cdot sgn(x^2 - 1) \cdot 2x}{(|x^2 - 1|)^2} =$$

$$= \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 1) \cdot sgn(x^2 - 1) - 2x^4 \cdot sgn(x^2 - 1)}{\dots} =$$

$$= \frac{sgn(x^2 - 1) \cdot (x^4 - 3x^2)}{\dots} = \frac{sgn(x^2 - 1) \cdot (x^2 - 3) \cdot x^2}{\dots}.$$

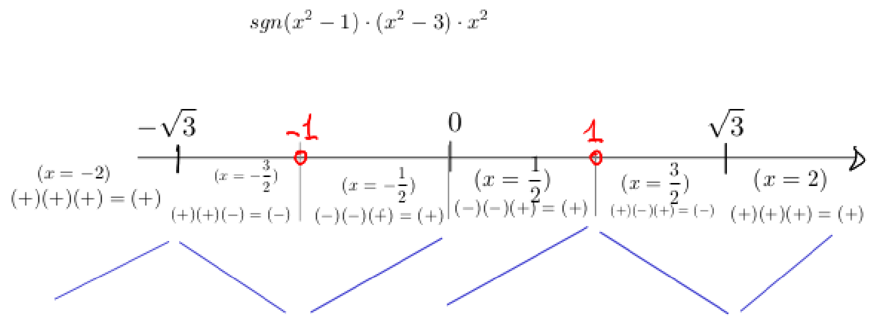
La derivata è nulla quando sarà nullo il numeratore, per cui scriviamo

$$f'(x) = 0 \quad \text{se} \quad x^2 - 3 = 0 \quad \text{oppure} \quad x = 0.$$

Quindi i punti critici della funzione sono $x_{1,2,3} = 0,\ \mp\sqrt{3}$. Per stabilire il segno della derivata e, conseguentemente determinare gli intervalli di crescenza/decrescenza e quindi la natura dei punti critici, al solito sistemiamo i valori trovati su una retta orientata e "testiamo" per ciascun intervallo il segno della derivata prima [97]

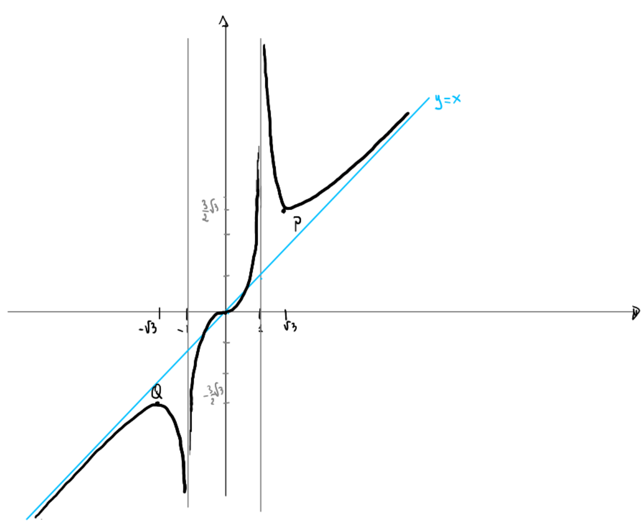
[96] Per $x < -1 \vee x > 1$ è $sgn(x^2 - 1) = 1$, per cui $1 - sgn(x^2 - 1) = 0$ per come affermato.

[97] Limitatamente al numeratore, dato che il denominatore è già -di suo- non negativo, essendo elevato al quadrato.



In -1 e +1 la funzione e la sua derivata non esistono, per cui sono punti rispetto ai quali la derivata perde il segno e, quando si andrà a verificare la positività o la negatività della derivata, essi devono essere tenuti in conto!

Deduciamo quindi che in corrispondenza di $x = -\sqrt{3}$ vi è un *punto di massimo* ed in corrispondenza di $x = \sqrt{3}$ un punto di minimo, relativi. In zero, pur essendo un punto critico, non si può identificare né un massimo né un minimo, infatti la funzione sia prima che dopo, in prossimità di $x = 0$ risulta sempre crescente: si dice che ha un **flesso a tangente orizzontale** [98] . Ovviamente [99] in $x = -1$ e $x = 1$ non ci sono punti estremi. Ora possiamo riportare i risultati su un piano cartesiano e determinare il grafico della funzione: intanto osserviamo, però, che $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $f(0) = 0$ e $f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, per cui il minimo in $P\left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ ed il massimo è nel punto $Q\left(-\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$.



[98]Di cui parleremo compiutamente e più diffusamente quando tratteremo il problema di determinare le concavità del grafico della funzione.

[99]Perché?

Esempio: Studiare la funzione al fine di determinarne il grafico:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-|x|}{1+|x|}}.$$

Soluzione: Procediamo in modo sistematico, come se ci fosse una "scaletta" da seguire.

$\boxed{C.d.E.}$

Imponiamo le condizioni di esistenza per le operazioni presenti in $f(x)$:

- C.E.Rad.:
$$\frac{1-|x|}{1+|x|} \geqslant 0$$
- C.E.Fraz.:
$$1+|x| \neq 0$$

Per determinare l'insieme in cui è rispettata la prima condizione, imponiamo numeratore e denominatore uguali a zero e, successivamente, studiamo il segno della frazione:

$$1-|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \mp 1.$$

D'altra parte la quantità $1+|x|$ è sempre strettamente positiva [100] e quindi non si annulla mai, né cambierà mai di segno. Da questa ultima osservazione deduciamo che la C.E.Fraz. è sempre rispettata. Evidentemente, senza scomodare la retta numerica ed il diagramma per le disequazioni, $1-|x| \geqslant 0$ se $x \in [-1,1]$ dato che sottraendo una frazione dell'unità da uno, il risultato è comunque positivo. Quindi:

$$\mathrm{Dom} f(x) = [-1,1].$$

$\boxed{SGN}$

Questo punto è abbastanza sbrigativo: una radice quadrata, dove esiste, è sempre positiva, per cui deduciamo che questa funzione è positiva nel suo C.d.E.:

$$f(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathrm{Dom} f(x).$$

$\boxed{\text{Limiti agli estremi del C.d.E.}}$

Ci sono solo due limiti da calcolare: per $x \to -1^+$ e per $x \to 1^-$.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

dato che in entrambi i casi verrebbe un frazione del tipo $\frac{q \to 0}{\text{“numero”}}$. Da notare che non possono esserci A.Or o A.Ob poiché il dominio è limitato e non ci sono A.V. poiché i limiti agli estremi del C.d.E. risultano finiti.

[100] Perché?

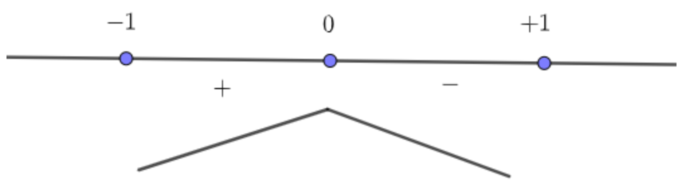
$\boxed{\text{Studio}\, sgn(f'(x))}$

Troviamo la derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-|x|}{1+|x|}}} \cdot \frac{-sgn(x)\cdot(1+|x|)-(1-|x|)\cdot sgn(x)}{(1+|x|)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+|x|}{1-|x|}} \cdot \frac{sgn(x)\cdot(-1-\cancel{|x|}-1+\cancel{|x|})}{(1+|x|)^2} = -\sqrt{\frac{1+|x|}{1-|x|}} \cdot \frac{sgn(x)}{(1+|x|)^2}$$

Considerando che la radice, dove esiste, è sempre positiva, idem per il quadrato del denominatore della seconda frazione, possiamo dedurre che il segno della derivata lo decide $sgn(x)$ e, nello specifico, la derivata risulta positiva prima di zero [101] e negativa per x più grande di zero.

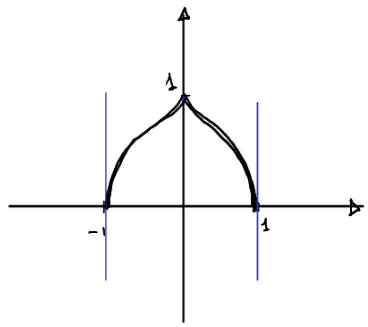


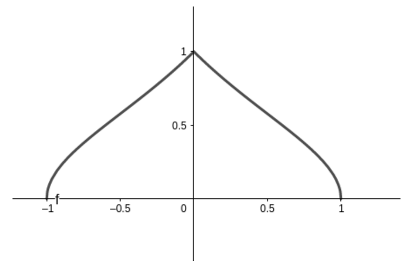
Possiamo mettere tutte le informazioni su un piano cartesiano e tracciare il grafico della funzione, premettendo qualche utile osservazione che giustifica la forma stessa che abbiamo voluto dare alla rappresentazione grafica della funzione data. Innanzitutto osserviamo che per $x \to \mp 1$ la derivata tende all'infinito, dato che nel denominatore della frazione sotto la radice è presente una quantità tendente a zero, mentre altrove sono tutti numeri diversi da zero. Questo significa che nei punti $(\mp 1, 0)$ la tangente si "sistema" verticalmente [102] . Inoltre osserviamo che per $x = 0$ la funzione esiste finita e vale 1, ma la derivata in tale punto non esiste, dato che $sgn(x)$ in zero non è definita: questo significa che il grafico <u>non è liscio</u> nel punto $(0, 1)$ ma "appuntito" [103]. Nella pagina seguente il grafico per come l'abbiamo studiato noi, per il quale deduciamo anche due cambi di concavità, uno nell'intervallo $(-1, 0)$ e l'altro in $(1, 0)$ e per come lo disegna Geogebra.

[101] Bisogna considerare che c'è un segno " $-$ " prima della radice quadrata.

[102] Quando classificheremo le discontinuità della derivata prima, ovvero i punti singolari delle funzioni, allora avremo le idee ancora più chiare!

[103] Anche in questo caso diciamo che in $(0, 1)$ è presente una *singolarità* della funzione.

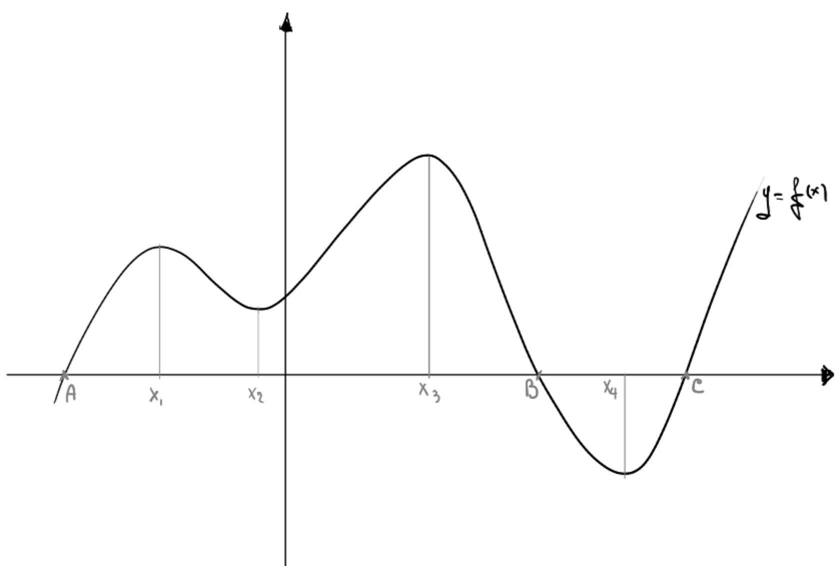




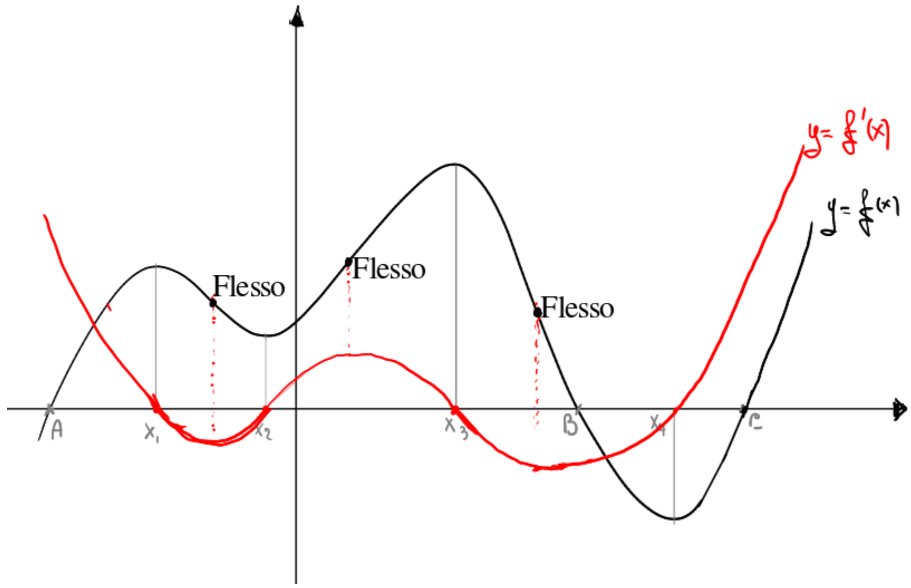
□

Un utile, interessante e divertente esercizio è ricavare il grafico "qualitativo" della derivata prima a partire da un grafico di funzione visto nel piano cartesiano, senza svolgere alcun calcolo, addirittura senza nemmeno conoscere la legge funzionale del grafico di funzione che vediamo tracciato nel piano cartesiano: faremo un esempio e suggeriamo agli studenti volenterosi di cimentarsi in questa "sfida", dato che stimola enormemente la comprensione del significato della derivazione di una funzione.

Esempio: Dato il grafico di funzione tracciato qui di seguito, determinare il grafico della sua derivata prima.



Soluzione: Iniziamo con delle considerazioni preliminari: se vediamo il grafico crescente, colà la derivata sarà positiva e se vediamo un "ramo" decrescente, allora troveremo nell'intervallo corrispondente la derivata negativa. Ovviamente, dove ci sono punti di massimo o minimi relativi, la derivata si annulla, ovvero il suo grafico deve intersecare l'asse delle ascisse. Anticipiamo che i punti della funzione dove il grafico *cambia di concavità* si chiamano **punti di flesso** [104] : in corrispondenza di tali punti [105] la derivata prima deve avere valori estremi di minimo o massimo relativo. Ora siamo davvero pronti a disegnare, in rosso, corrispondentemente al grafico della funzione proposto nella traccia dell'esercizio, il grafico "probabile" della sua derivata prima.



□

4. Le derivate successive

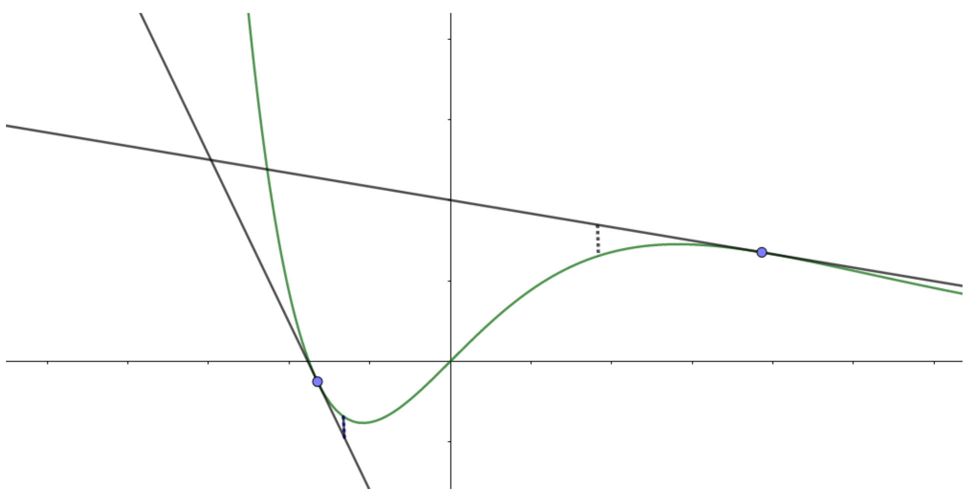
La derivata prima $f'(x)$, essendo una funzione, potrebbe ammettere anche essa una derivata che verrà denominata *derivata seconda* della funzione $f(x)$ e verrà indicata con $f''(x)$. Ma anche la derivata seconda potrebbe essere ulteriormente derivabile, per ottenere così la *derivata terza,* indicata con $f^{(3)}(x)$ e via di seguito. Se una funzione ammette le derivate di ogni ordine, si chiamerà di **classe** C^∞, altrimenti, se ad esempio è derivabile solo fino al quarto ordine, sarà di *classe* C^4 ecc... Ma cosa rappresenta la derivata seconda? e le derivazioni successive, a cosa potrebbero servire? In verità l'utilità delle derivate successiva alla prima è notevole e ne parleremo ampiamente nella sezione successiva alla presente, per ora, però, vediamo quali informazioni ci fornisce la conoscenza delle prime due derivate [106] .

[104] O semplicemente **flessi.**

[105] Per come vedremo nel prossimo paragrafo, introducendo lo studio della derivata seconda

[106] Della derivata prima, in verità, dovremmo già aver chiaro almeno l'informazione sulla crescenza/decrescenza della funzione.

4.1. Le concavità delle funzioni. Precisiamo finalmente, dopo averne anticipato intuitivamente il significato, cosa bisogna intendere quando si dice che **concavità** del grafico della funzione è verso l'alto o verso il basso. Anche questa nozione è di tipo *locale:* ovvero riguarda il punto ed un suo intorno sufficientemente piccolo. Si traccia la retta tangente in un punto del grafico della funzione e si osserva se il grafico stesso sta sopra o sotto questa retta, in un intorno sufficientemente piccolo del punto: se sta sopra, allora diremo che la **concavità volge verso l'alto,** se sta sotto, che la **concavità è rivolta verso il basso** e se sta prima del punto sopra e dopo di esso sotto, o viceversa, allora si dirà che nel punto c'è un cambio di concavità e quel punto lo si chiamerà **punto di flesso.** Se in tutti i punti di un intervallo la funzione volge la concavità verso l'alto, allora diremo che la concavità della funzione è verso l'alto in quell'intervallo, idem se volgesse la concavità verso il basso. Il discorso è quindi molto semplice, ora bisogna trovare un metodo che ci permetta di riconoscere le varie concavità, verso l'alto o verso il basso, senza effettivamente tracciare le rette tangenti e controllare "visivamente" la mutua posizione tra grafico di funzione e retta tangente. L'ideale sarebbe poter trovare un metodo analitico [107] che, a partire dalla funzione, ci indichi direttamente quali siano gli intervalli in cui le concavità sono verso l'alto o verso il basso: è quello che si può fare e faremo tra non molto. Consideriamo la situazione rappresentata in figura.



Sia $P(x_P, f(x_P))$ un punto del grafico della funzione $y = f(x)$, per il quale conduciamo anche la retta tangente r. Quest'ultima ha equazione

[107]Ovvero che si possa applicare senza nemmeno mettere a grafico alcunché, utilizzando solo le espressioni funzionali ed il calcolo.

$r: \ y = f'(x_P) \cdot (x - x_P) + f(x_P)$ e quindi, se consideriamo un punto "vicino" a P di coordinate $A(x_P + h, f(x_P + h))$ possiamo considerare la differenza tra A ed il punto B della retta tangente di pari ascissa [108] : evidentemente il segno di $B - A$ dirà se B si trova *sopra* o *sotto* A e, di conseguenza, se la funzione "vicino" al punto P abbia il grafico sopra o sotto la retta tangente presa nel punto. Ora, tale differenza è

$$\mathrm{d} = y_B - y_A \ = \ [f'(x_P) \cdot (\cancel{x_P} + h - \cancel{x_P}) + f(x_P)] \ - \ [f(x_P + h)]$$

ovvero, dopo le opportune semplificazioni:

$$\mathrm{d} = f'(x_P) \cdot h + f(x_P) - f(x_P + h).$$

Osserviamo che in questa espressione, l'unica quantità da cui dipende la distanza d, una volta fissato il punto P e la funzione $y = f(x)$ è h, quindi possiamo dire che [109] $\mathrm{d} = \mathrm{d}(h)$. Altresì osserviamo che:

$$\mathrm{d}(0) = f'(x_P) \cdot 0 + f(x_P) - f(x_P + 0) = 0.$$

Ora approssimiamo l'incremento della funzione $\mathrm{d} = \mathrm{d}(h)$ conseguente all'incremento della variabile h da 0 ad h^* tramite il differenziale calcolato in $h = 0$:

$$\Delta\,\mathrm{d} \ = \underline{\mathrm{d}(h^*) - d(0)} \approx d\,\mathrm{d}(0) \ = \mathrm{d}'(0) \cdot h^* = \underline{[f'(x_P) - f'(x_P + h) \cdot 1] \cdot h^*}$$

dove abbiamo usato la "regola della catena" per derivare l'ultimo addendo $f(x_P + h^*)$ rispetto ad h. Quindi si ha:

$$\mathrm{d}(h^*) \approx [f'(x_P) - f'(x_P + h^*)] \cdot h^*$$

e dividendo tutto per $(h^*)^2$, che sicuramente è una *quantità positiva,* si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}(h^*)}{(h^*)^2} = -\frac{f'(x_P + h^*) - f'(x_P)}{h^*}.$$

Il segno della funzione $\mathrm{d}(h)$ dipende quindi dal rapporto incrementale presente nel secondo membro che, per $h^* \to 0$ rappresenta -per definizione- la derivata seconda della funzione nel punto P :

$$\lim_{h^* \to 0} \frac{f'(x_P + h^+) - f'(x_P)}{h^*} = f''(x_P).$$

Possiamo quindi concludere, considerando un incremento h^* infinitesimo positivo, che se $f''(x_P) < 0$ allora $\mathrm{d}(h^*) > 0$ e quindi, nel passaggio dal punto P al punto A, la retta tangente si trova *sopra* il grafico della funzione, ergo la concavità della funzione è rivolta verso il basso. Se invece $f''(x_P) > 0$ allora $\mathrm{d} < 0$ il ché vuol dire che, in vicinanza di P, la funzione si trova sopra la retta tangente, ovvero la concavità

[108] Quindi allineato verticalmente con A.

[109] Abbiamo osservato che la distanza è una funzione di h.

è rivolta verso l'alto [110] . Se $f''(x_P) = 0$, il segno non c'è e quindi non possiamo concludere nulla sul verso della concavità del grafico di funzione, a meno che non sapessimo che prima e dopo il punto non ci sia un cambio di segno per la derivata seconda: in tal caso il punto prende il nome di **flesso** ed indica esattamente dove vi è il cambio di concavità. Osserviamo ora che la derivata seconda è la derivata prima della derivata prima della funzione pertanto, laddove essa si annulla, la funzione derivata prima presenta un *punto critico:* questo significa che in corrispondenza dei punti di flesso, la derivata prima può avere un punto di minimo o di massimo locale, dato che questi ultimi sono punti critici della funzione. Ecco perché nel paragrafo precedente, quando abbiamo disegnato il grafico della derivata a partire da quello della funzione, abbiamo affermato che in corrispondenza dei punti di flesso, il grafico della derivata presenta o massimi o minimi locali. Prima di andare avanti, diremo -come al solito- che se in un intervallo la funzione presenta per ciascun punto la concavità verso l'altro, allora diremo che in quell'intervallo la funzione è con concavità verso l'alto ed una analoga dicitura la applicheremo anche per il caso della concavità verso il basso.

Un'altra importante conclusione è la seguente osservazione [111] : *In un punto di minimo, la concavità della funzione è rivolta verso l'alto, mentre in un punto di massimo, è rivolta verso il basso!* Quindi, per decidere se un punto è di massimo o minimo, basta valutare la derivata prima e seconda nella sua ascissa e controllare, innanzitutto, che sia un punto critico -ovvero la derivata prima si annulli- e successivamente se la derivata seconda sia positiva o negativa. Segue, a chiusura di questa sezione, una tabella riepilogativa, dei risultati trovati.

$f'(x)$	$f''(x)$	P
$\neq 0$	0	Flesso
$= 0$	< 0	max
$= 0$	> 0	min
$\neq 0$	< 0	concavità verso basso
$\neq 0$	> 0	concavità verso l'alto

[110] Ragionamenti analoghi porterebbero alle stesse conclusioni se invece di muoversi “in avanti” con un h^* positivo, andassimo “verso indietro” con h^* incremento negativo.

[111] Che qualche autore, sicuramente esagerando, ha il coraggio di chiamare “criterio di massimalità o minimalità” oppure ancora “condizioni necessarie per gli estremi”.

Esempio: Determinare le concavità della funzione

$$f(x) = e^{-x^2} + x.$$

Soluzione: Soprassediamo sullo studio completo, dato che viene richiesta solo la concavità. Procediamo quindi direttamente con due derivazioni.

$$f'(x) = -2x\,e^{-x^2}+1 \quad \text{e} \quad f''(x) = -2\,e^{-x^2}+4x^2\,e^{-x^2} = (2x^2-1)\cdot 2\,e^{-x^2}.$$

La derivata seconda si annulla solo per $2x^2 - 1 = 0$ ovvero per $x_{1,2} = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$, che prendiamo come ascisse di riferimento per studiare il segno della derivata (seconda) stessa. Evidentemente essa è positiva per $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ e negativa per $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Ergo, la concavità volge verso l'alto nel primo insieme indicato e verso il basso nel secondo, mentre i punti di ascissa $\mp\frac{\sqrt{2}}{2}$ sono punti di flesso per la funzione.

□

Esempio: Si effettui uno studio completo [112] della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\,e^{-\frac{1}{x}}.$$

Soluzione: Intanto osserviamo che l'unica operazione non consentita è la divisione per zero nella frazione all'esponente, per cui il dominio è tutto $\mathbb{R}$ escluso lo zero:

$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

Poi osserviamo che la funzione esponenziale è sempre (strettamente) positiva e quindi il segno della funzione dipende unicamente dal radicando della radica cubica, ergo:

$$f(x) < 0, \quad \text{se} \quad x < 0 \quad \text{e} \quad f(x) > 0, \quad \text{se} \quad x > 0.$$

Ci sono solo quattro limiti da calcolare, per gli estremi del c.d.e:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

dato che l'esponenziale ha l'esponente che si avvicina a zero, quindi lei tende ad uno mentre il fattore costituito dalla radice cresce (in negativo) infinitamente. Considerazioni analoghe portano a dire che:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

[112] Si intende che vengano anche determinate le concavità, i punti di flesso e, possibilmente, le pendenze delle rette tangenti nei punti di flesso.

Quindi non ci sono asintoti orizzontali e, data la presenza della funzione esponenziale, possiamo anche stare tranquilli che non ce ne saranno di obliqui.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

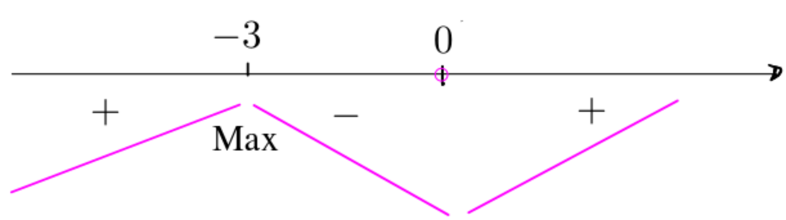
dato che l'esponente dell'esponenziale tende a $+\infty$ e l'esponenziale ha un ordine di crescita tale che "*trascina*" ogni altra funzione, che non sia essa stessa una esponenziale, all'infinito [113] .

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

dato che l'esponente della funzione esponenziale tende a $-\infty$ e quindi la funzione esponenziale tende a 0 così come la radice che la moltiplica. Quindi concludiamo che c'è un "semi-asintoto" verticale, a sinistra, corrispondente all'asse delle ordinate negative. Passiamo ora allo studio del segno delle derivate.

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1}\, e^{-\frac{1}{x}} + \sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x^{\cancel{2}} + 3\cancel{x}}{3\, x^{\cancel{2}} \sqrt[3]{x^2}} \cdot e^{-\frac{1}{x}}.$$

Questa derivata si annulla in $x = -3$ in cui verifichiamo che c'è un massimo locale.



I segni della derivata possono essere verificati, al solito, testando la funzione (derivata) nei punti -4, -1 e $+1$, considerando che $sgn(f'(x)) = sgn((x+3) \cdot x)$.

Ora calcoliamo la derivata seconda per determinare flessi e concavità. Per semplificare un po' i calcoli, osserviamo che la derivata di un prodotto tra una funzione $g(x)$ ed una esponenziale al cui esponente c'è un'altra funzione $h(x)$ è data da:

$$f''(x) = D(f'(x)) = D(g(x) \cdot e^{h(x)}) = g'(x)e^{h(x)} + g(x)h'(x)\, e^{h(x)}$$

ovvero da:

$$f''(x) = [g'(x) + g(x) \cdot h'(x)]\; e^{h(x)}$$

[113] Il segno lo decide il fattore "radice cubica", che abbiamo detto essere negativo prima dello zero.

e per determinare il segno di questa funzione, basta considerare unicamente quanto abbiamo scritto tra le parentesi quadre, a cui, pertanto, limiteremo la nostra attenzione. Per noi $g(x) = \frac{x+3}{3x\sqrt[3]{x^2}}$ e $h(x) = -\frac{1}{x}$. Allora troviamo:

$$g'(x) = \frac{3x\sqrt[3]{x^2} - (x+3)\cdot\left(3\sqrt[3]{x^2} + \cancel{3}\,x\frac{2}{\cancel{3}\sqrt[3]{x}}\right)}{[3x\sqrt[3]{x^2}]^2} = \frac{3x^2 - (x+3)\cdot 5x}{[\cdots]^2\cdot\sqrt[3]{x}};$$

$$g'(x) = \frac{-2x^2 - 15x}{[\cdots]^2\cdot\sqrt[3]{x}}.$$

D'altra parte:

$$h'(x) = \frac{1}{x^2},$$

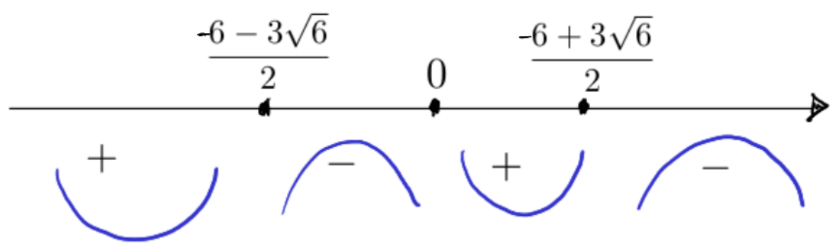
per cui:

$$g'(x) + g(x)\cdot h'(x) = \frac{-2x^2 - 15x}{[3x\sqrt[3]{x^2}]^2\cdot\sqrt[3]{x}} + \frac{x+3}{3x\sqrt[3]{x^2}}\cdot\frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 - 15x + (x+3)\cdot 3}{9x^2\cdot x\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-2x^2 - 12x + 9}{[9x^2\sqrt[3]{x^2}]\cdot x}$$

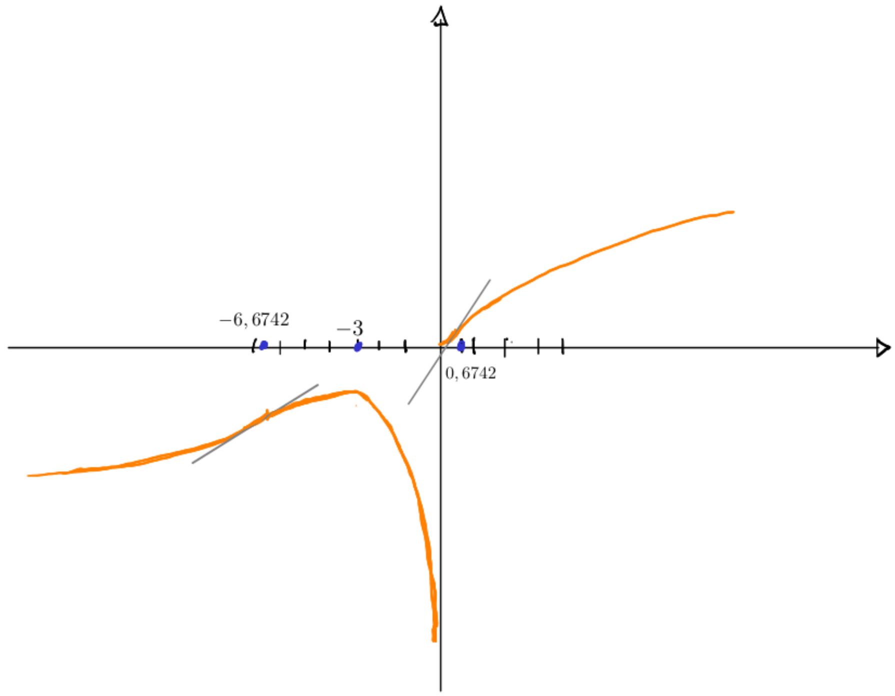
Possiamo concludere, quindi, che il segno della derivata seconda coincide con il segno del prodotto $-x\cdot(2x^2 + 12x - 9)$. Questo polinomio si annulla in 0 e in:

$$x_{1,2} = \frac{-6 \mp \sqrt{36+18}}{2} = \frac{-6 \mp 3\sqrt{6}}{2}.$$



Per determinare le pendenze delle rette tangenti nei punti di flesso, basta sostituire i valori trovati poc'anzi, che annullano la derivata seconda, nella derivata prima: non lo facciamo perché i valori non sono "facili da maneggiare" e potrebbero solo appesantire il discorso. Prima di disegnare il grafico della funzione, calcoliamo i valori approssimati per i due punti di flesso trovati:

$$\frac{-6 - 3\sqrt{6}}{2} \approx -6,6742 \quad \text{e} \quad \frac{-6 + 3\sqrt{6}}{2} \approx 0,6742.$$



□

5. Approssimazioni locali tramite polinomi

C'è un bellissimo teorema di Weierstrass che afferma una funzione continua, nel senso che chiariremo più avanti in questo capitolo, è approssimabile globalmente, ovvero su tutto il suo campo di esistenza, da una funzione polinomiale: però è un teorema di esistenza e non dice come si può trovare il polinomio approssimante, di cui si afferma l'esistenza. Noi però non siamo interessati ora alla "sostituzione" della funzione con un polinomio nell'intero suo dominio: ci limitiamo a trovare una "serie" di polinomi che approssimeranno vieppiù meglio la funzione, in un intorno opportunamente piccolo di un suo punto, ovvero siamo interessati ad una approssimazione locale della funzione tramite una funzione polinomiale. Per poter procedere con la determinazione dei polinomi approssimanti, *supporremo che la funzione sia derivabile finché serva,* ovvero che se, ad esempio, ci serve poter derivare cinque volta una data funzione, questo lo si possa fare. Detto questo il problema, posto nei giusti termini, è: "se $f(x)$ è una funzione derivabile per quanto si voglia nel punto x_0, come trovare un polinomio $P_n(x)$ di grado n tale per cui $f(x) \approx P_n(x)$ in un intorno $I_{x_0}(\epsilon)$ opportunamente piccolo del punto x_0? e come stimare l'errore massimo che si commette sostituendo il polinomio alla funzione in

$I_{x_0}(\epsilon)$? ” Per ora preoccupiamoci di determinare un possibile polinomio e poi ci occuperemo anche del problema di stimare l’errore massimo di approssimazione. Supponiamo, come primo approccio, che $x_0 = 0$ e scriviamo un polinomio “tipo”:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

È chiaro che bisogna determinare tutti i coefficienti a_k, $k = 0, \dots, n$ per poter definire il polinomio che ci interessa. All’uopo proponiamo delle innocenti e ragionevoli richieste:

- Un polinomio approssimante, almeno in $x_0 = 0$ deve coincidere, come valore, con il valore della funzione, pertanto richiediamo che $f(0) = P_n(0)$, ma sostituendo alla x nel polinomio il valore 0 l’unico termine che rimane è a_0, ergo:
$$a_0 = f(0).$$
- Poi richiediamo che la retta tangente nel punto $x_0 = 0$ sia coincidente, sia che la si calcoli per la funzione, sia che la si calcoli tramite il polinomio: questo significa, in fondo, richiedere che le derivate della funzione e del polinomio, valutate in $x_0 = 0$ coincidano, pertanto $f'(0) = P_n'(0)$. Ma $P_n'(x) = a_1 + a_2 \cdot 2x + a_3 \cdot 3x^2 + \cdots + a_n \cdot nx^{n-1}$ per cui, in zero, vale a_1, ergo:
$$a_1 = f'(0).$$
- Sarebbe anche il caso che un polinomio approssimante abbia la stessa concavità della funzione che andrà ad approssimare, per cui richiediamo che anche le derivate seconde, valutate in $x_0 = 0$ coincidano. Ora $P_n''(x) = a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 3 \cdot 2x^2 + \cdots + a_n \cdot n \cdot (n-1)x^{n-1}$ che valutato in zero dà $a_2 \cdot 2$, ergo:
$$a_2 = \frac{f''(0)}{2}.$$
- A questo punto dovremmo aver capito che il trucco, per trovare i coefficienti del polinomio approssimante, sta nell’imporre le derivate, valutate in $x_0 = 0$, uguali, sia che le si calcolino tramite la funzione, sia che le si calcolino tramite polinomio. In generale, quindi, richiederemo che $f^{(k)}(0) = P_n^{(k)}(0)$. La derivata k-esima del polinomio, valutata in zero, è rappresentata da $P_n^{(k)}(0) = k! \cdot a_k$ per cui
$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$
e questa formula va bene per qualsiasi valore di k da 0 ad n.

Alla fine siamo riusciti a trovare un polinomio approssimante $f(x)$, in un intorno di $x_0 = 0$, tramite la formula:

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{h=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k}.$$

La formula evidenziata nel riquadro viene detta **espansione polinomiale di MacLaurin** ed il polinomio che si trova tramite quella formula, prende il nome di **polinomio di MacLaurin.** In generale, se $x_0 \neq 0$ possiamo semplicemente effettuare un *traslazione* del sistema di riferimento in modo che l'origine sia portata nuovamente a coincidere con il valore x_0 dato e la formula di MacLaurin si riscrive nel seguente modo:

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k}$$

che prende il nome di **espansione polinomiale di Taylor** ed il polinomio che si ricava, di conseguenza, si chiamerà **polinomio di Taylor.** Vediamo qualche esempio e poi studiamo l'errore di approssimazione nell'utilizzo di queste formule.

Esempio: Trovare un'approssimazione polinomiale di quinto grado, intorno a $x_0 = 0$ della funzione $\sin(x)$

Soluzione: Intanto ci scriviamo le prime cinque derivate della funzione $\sin(x)$.

$$f(x) = \sin(x),\ f'(x) = \cos(x),\ f''(x) = -\sin(x),$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos(x),\ f^{(4)}(x) = \sin(x),\ f^{(5)}(x) = \cos(x).$$

Da queste ricaviamo i coefficienti del polinomio:

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 0$$

$$a_3 = -\frac{1}{3!},\ a_4 = 0,\ a_5 = \frac{1}{5!}.$$

Quindi possiamo scrivere

$$\sin(x) \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5.$$

□

Riprendendo il discorso della funzione seno: è evidente che tutte le potenze pari del polinomio approssimante devono essere nulle, dato che i coefficienti, al numeratore, avranno sempre da calcolare il $\sin(0) = 0$. Le potenze dispari, invece, avanzano a segni alterni, dato che la derivazione delle funzioni elementari è ciclica e dopo quattro derivazioni si ripetono gli stessi numeratori che sono solo -1 oppure $+1$. Volendo, si può esprimere una formula generale per l'espansione di Maclaurin della funzione seno:

$$\boxed{\sin(x) \approx \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}}.$$

Una formula analoga si può ricavare anche per la funzione $\cos(x)$ [114]

$$\boxed{\cos(x) \approx \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k}}$$

Esempio: Sviluppare in polinomio di MacLaurin la funzione esponenziale.

Risposta: La funzione esponenziale rimane fantasticamente sempre se stessa dopo ogni derivazione, per cui, valutate in zero, tutte le derivate danno costantemente il valore 1. Questo significa che $\forall k,\ a_k = \frac{1}{k!}$, ergo:

$$\boxed{e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k}.$$

Osservazione: Arrestando gli sviluppi di MacLaurin ai primi termini (almeno per le funzioni già trovate), si ottiene che $\sin(x) \approx x$, (guarda tu, in un intorno di 0!), $\cos(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ e $e^x \approx 1 + x$: ovvero abbiamo ritrovato le equivalenze di infinitesimi, utilizzate per il calcolo dei limiti all'inizio del nostro percorso nell'analisi infinitesimale. Questo è vero anche per le altre equivalenze studiate precedentemente: esse sono approssimazioni di MacLaurin arrestate ai primi ordini! chiaramente se serve una approssimazione migliore per il calcolo di qualche limite, dato che le approssimazioni al primo ordine non sono sufficienti, eliminandosi le une con le altre, si potranno e si dovranno utilizzare sviluppi polinomiali più estesi per arrivare ad un risultato apprezzabile. Molto interessante, almeno dal punto di vista del calcolo, la possibilità di determinare gli sviluppi polinomiali a partire da quelli noti delle funzioni di maggior utilizzo: a tale fine si può compilare una tabella di sviluppi da tenere a mente ed a partire da questi, ricavare -senza passare dal calcolo diretto dei coefficienti tramite le derivate- gli sviluppi delle funzioni che serve approssimare. Facciamo ora un po' di esempi di utilizzo degli sviluppi polinomiali per il calcolo dei limiti, poi "pubblicheremo" una tabella dei principali sviluppi di

[114] Invitiamo lo studente a scrivere almeno i primi quattro termini del polinomio di MacLaurin per il coseno.

MacLaurin e faremo qualche esempio di come utilizzarli per ricavare altri sviluppi polinomiali e, infine, tratteremo il problema dell'errore massimo di approssimazione, facendo vedere anche graficamente come l'approssimazione migliori mano a mano che il grado del polinomio aumenta. Prima di procedere per come abbiamo indicato, introduciamo questa utilissima **notazione**, detta **simbolo di Landau** : si dice che $f(x)$ è un $o(g(x))$ e si legge " $f(x)$ è un o-piccolo di $g(x)$ ", se il limite $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, ovvero se $f(x)$ è un infinitesimo di ordine maggiore rispetto a $g(x)$. Ad esempio, $x^3 = o(x^2)$. Molto semplicemente nell'o-piccolo si può mettere *il resto* di una espansione polinomiale di cui non interessa nulla per il proseguo del calcolo: è una specie di cestino che si utilizza con molta intelligenza e discrezione.

Esempio: Si calcoli il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$$

Soluzione: Notiamo innanzitutto che non basta utilizzare l'equivalenza tra infinitesimi, infatti il numeratore della frazione, al primo ordine di approssimazione, si annulla e quindi non avremmo "funzioni da rapportare" con il denominatore. Espandendo invece in polinomi di MacLaurin, arrestati ad secondo ordine, si ottiene:

$$f(x) \sim \frac{1 + x + x^2 + o(x^2)\ + 1 + (-x) + (-x)^2 + o(x^2) - 2}{1 - (1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))} =$$

$$= \frac{2x^2 + o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} = 4.$$

□

Esempio: Si calcoli il limite:

$$\lim_{xto0} \frac{e^x - 1 + \ln(1 - x)}{\tan(x) - x}$$

Soluzione: Anche qui, se ci fermassimo alle equivalenza tra infinitesimi, non ne caveremmo un ragno dal buco: sia al numeratore che al denominatore uscirebbe zero! Per calcolare il limite abbiamo bisogno si ricavare qualche termine dei polinomi approssimanti $\ln(1 + x)$ e $\tan(x)$. Iniziamo con la prima funzione. Se $f(x) = \ln(1 + x)$ allora $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ e $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$; troviamo ancora altre due derivate, giusto per essere sicuri di come funziona il discorso: $f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ e $f^{(4)}(x) = -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4}$. Quindi, i coefficienti del polinomio di MacLaurin sono $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, poi vediamo che $a_3 = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$, e $a_4 = -\frac{2 \cdot 3}{4!} = -\frac{1}{4}$. Dovremmo aver capito che al denominatore sta proprio in numero k che indica il coefficiente che stiamo calcolando, al numeratore sempre uno e questi coefficienti sono a segni alterni: quelli pari con il segno meno e quelli dispari con il segno positivo. In conclusione:

$$\boxed{\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)}.$$

Per la tangente abbiamo invece: $f(x) = \tan(x)$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ deriviamo quest'ultima con la regola della catena applicata a $\cos^{-2}(x)$ ottenendo $f''(x) = -2\cos^{-3}(x) \cdot (-\sin(x)) = 2\cos^{-3}(x)\sin(x)$. Deriviamo quest'ultima, ottenendo $f'''(x) = 2[-3\cos^{-4}(x)\sin(x) + \cos^{-3}(x)\cos(x)]$ ecc... da queste derivate si ottengono i seguenti primi quattro coefficienti del polinomio di MacLaurin per la tangente: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ e $a_3 = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$. Si può continuare per realizzare che la formula della tangente contiene solo termini ad indice dispari ed il successivo è $a_5 = \frac{2}{15}$. Comunque a noi ora non serve spingerci tanto oltre.

$$\boxed{\tan(x) \approx x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)}.$$

Sostituendo fino ad un ordine opportuno otteniamo il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{x^2} + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \cancel{-1} + \cancel{(-x)} - \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{(-x)^2} + \frac{1}{3}(-x)^3 + o(x^3)}{\cancel{x} + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - \cancel{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)} = -\frac{1}{2}$$

$\square$

Aggiungiamo, agli sviluppi precedentemente trovati, altri polinomi di MacLaurin di alcune tra le funzioni più utilizzate, invitando a verificare che i coefficienti siano quelli indicati, calcolandone alcuni in modo diretto tramite la definizione.

$$\boxed{\sqrt{x+1} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \cdots}$$

Particolari sviluppi polinomiali sono dati dalla somma dei primi n termini di una serie geometrica e dalla sviluppo del binomio di Newton, che abbiamo incontrato già in altri capitoli di questo libro.

$$\boxed{\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{n} x^k + o(x^n)}.$$

$$\boxed{(1+x)^p = 1 + C_{p,1}\, x + C_{p,2}\, x^2 + \cdots \approx \sum_{k=1}^{n} C_{p,k}\, x^k + o(x^n), \quad n < p}.$$

5.1. Trovare polinomi a partire dagli sviluppi noti. Vediamo come la conoscenza dei polinomi di MacLaurin, per le funzioni presentate precedentemente, permettono di ricavare in modo abbastanza veloce e, soprattutto, senza la fatica di passare attraverso il calcolo delle derivate, gli sviluppi polinomiali di funzioni composte.

Esempio: Ricavare l'approssimazione polinomiale di MacLaurin di $f(x) = \ln(1 + \sin(x))$ a meno di infinitesimi del quarto ordine.

Risposta: Consideriamo gli sviluppi noti del logaritmo (naturale) e del seno:

$$\ln(1+x) \approx \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \quad \text{e} \quad \sin(x) \approx \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Sostituiamo a posto del seno tutti i termini del suo polinomio fino al quarto grado, poi sviluppiamo il logaritmo, anche questo utilizzando tutti i suoi termini fino al quarto ordine, mettendo a posto della x lo sviluppo del seno:

$$\ln(1 + \sin(x)) \approx \ln\left(1 + \left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right]\right) =$$

$$= \left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right] - \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right]^2}{2} + \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right]^3}{3} +$$

$$- \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right]^4}{4} = x - \frac{1}{3!}x^3 - \frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) =$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4).$$

□

Esempio: Trovare un polinomio, in prossimità di $x_0 = 0,$ di almeno quinto grado, che approssimi la funzione $f(x) = \cos(x \cdot (e^x - 1))$

Soluzione: Consideriamo gli sviluppi noti dell'esponenziale e del coseno:

$$e^x - 1 \approx x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5), \ \cos(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5).$$

Sostituiamo, come fatto nell'esempio precedente, nello sviluppo del $cos(x),$ quello dell'esponenziale moltiplicato per x :

$$f(x) \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + \frac{x^3}{2} + \underbrace{\cancel{\frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}}_{o(x^5)} \right)^2 +$$

$$+ \underbrace{\cancel{\frac{1}{24} \cdot \left(x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right)^4}}_{o(x^5)} = 1 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^5).$$

Evidentemente ci siamo risparmiati parecchi calcoli inutili.

□

Qui di seguito una tabella riassuntiva dei principali sviluppi noti [115].

$f(x)$	$P(x)$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$
$\sqrt{1+x}$	$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + o(x^4)$
e^x	$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$
$\ln(x)$	$x - \frac{x^2}{x} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ox^7$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$
$\tan(x)$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$
$\arctan(x)$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7)$

[115]Per le funzioni riportate, il cui sviluppo non è stato ancora calcolato, si invita lo studente scrupoloso a verificare il coefficienti calcolandone almeno un paio, direttamente, tramite definizione: è comunque un utile esercizio.

5.2. Controllo dell'errore di approssimazione. Se una funzione $f(x)$ è approssimabile tramite un polinomio di MacLaurin (o Taylor) $P_n(x)$ di grado n, allora l'errore che si commette è dato da:

$$E_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x).$$

L'errore $E_{n+1}(x)$ deve esprimere un quantità infinitesima necessariamente di ordine superiore a quello del polinomio, infatti, aumentando i monomi di $P_n(x)$, ovvero prendendo n sempre più grande, l'approssimazione deve migliorare e quindi questo errore deve diminuire. Tale resto può essere espresso con il *simbolo di Landau* che, però, non ci permette di *quantificare* l'errore massimo che si commette nell'utilizzare l'approssimazione polinomiale: conviene quindi trovare una espressione "calcolabile" dell'errore. L'idea è che se $f(x) - P_n(x)$ è differenziabile, allora, soddisfacendo le ipotesi del Teorema di Lagrange [116] si può affermare che esiste un punto ξ tra x_0 e x per il quale:

$$\boxed{E_{n+1}(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}.$$

L'espressione nel riquadro prende il nome di **errore alla Lagrange.** Non avendo, attualmente, a disposizione il Teorema di Lagrange, la dimostrazione di questa affermazione la rimandiamo alla parte finale del capitolo, per ora vediamo come utilizzare questa scrittura per determinare l'errore massimo di approssimazione, nella sostituzione della funzione con il suo polinomio di MacLaurin/Taylor.

Esempio: Determinare un valore approssimato di $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ a meno di un millesimo.

Soluzione: Conosciamo lo sviluppo polinomiale del coseno e sappiamo anche che tale funzione è limitata dal suo valore massimo 1, per cui, nel nostro caso, possiamo scrivere:

$$E_{n+1}(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ora imponiamo che quest'ultimo termine, valutato in $x = \frac{\pi}{3}$ sia al più $\frac{1}{1000}$ che, riscritto con le formule giuste, diventa:

$$\frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{1}{1000}.$$

Dobbiamo ora risolvere questa equazione esponenziale di tipo misto: lo faremo "a tentativi" con l'aiuto di un foglio di calcolo [117] .

[116] Di cui parleremo nell'ultima sezione di questo capitolo

[117] Oppure aiutandoci con una semplice calcolatrice tascabile.

n	((pi/3)^{n+1})/(n+1)!	<0,001
0	1,0471975511966	No
1	0,5483135561608	No
2	0,19139676963148	No
3	0,05010755711626	No
4	0,01049450222172	No
5	0,00183163617127	No
6	0,00027401213046	Sì

Da questo si vede che dobbiamo considerare il polinomio di MacLaurin fino al quinto ordine e, dato che

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$$

allora il valore cercato è

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{3}\right)^4 \approx 0,501.$$

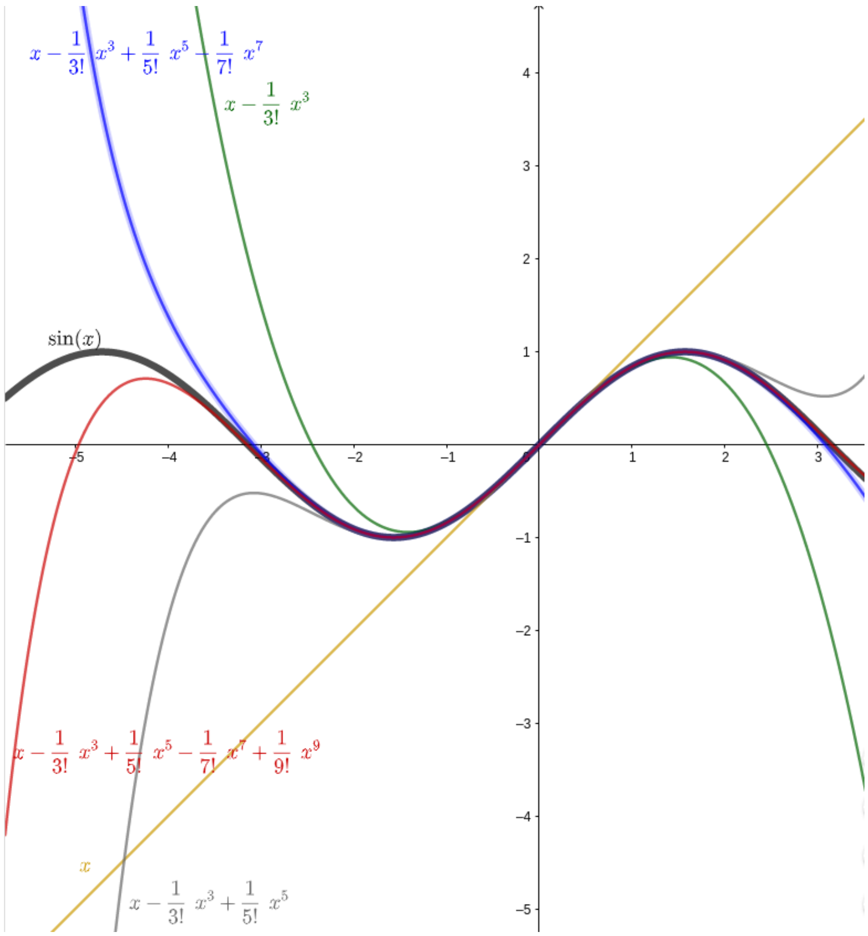
Facciamo presente che noi già sappiamo che $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = 0,500$ e quindi rimane confermato che l'errore massimo compiuto è al più un millesimo, per come richiesto nella traccia.

□

In ultimo presentiamo il grafico della funzione sinusoidale e la rappresentazione dei suoi polinomi di MacLaurin per il primo, terzo, quinto e settimo grado. Osserviamo che in un piccolo intorno dello zero sono [118] tutte coincidenti: facendo un ingrandimento nell'origine del sistema di coordinate noi vedremmo un'unica linea! solo "a distanza" da $O(0,0)$ riusciamo a distinguere le varie curve disegnate ma, comunque, esse, per intervalli sufficientemente grandi attorno ad O, continuano ad essere disegnate sovrapposte. C'è da notare che più monomi si inseriscono nell'approssimazione, più si "allarga" l'intorno dell'origine entro cui noi non si distingue un polinomio dalla funzione di partenza: questo è il senso dell'approssimazione e, effettivamente, si vede chiaramente nella rappresentazione grafica seguente. Al limite, se potessimo non fermare lo sviluppo polinomiale e, quindi, potessimo continuare ad aggiungere monomi su monomi, potremmo ben immaginare che la funzione *diventa* la sua approssimazione polinomiale: ebbene, quando tratteremo le **serie,** sarà esattamente quello che faremo [119] . Allora

[118] O, per lo meno, sembrano.
[119] Almeno per alcune funzioni "buone".

parleremo di sviluppi in serie di MacLaurin/Taylor e non più di espansioni polinomiali approssimanti. Rimandiamo questo discorso ad un altro capitolo.



In ultimo osserviamo che dall'approssimazione polinomiale della funzione esponenziale, per $x = 1$ si ottiene un valore approssimato del numero di Nepero, con arbitraria precisione [120], ad esempio, sommando i monomi fino al decimo grado, si ottiene :

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} = 2,718281801.$$

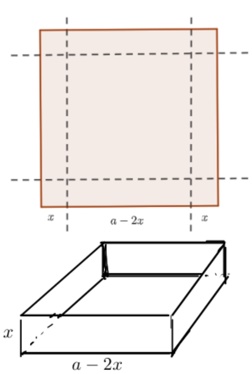
[120] Perché arbitrariamente possiamo aggiungere monomi per migliorare l'approssimazione stessa.

6. Problemi di Ottimizzazione

La possibilità di individuare i valori di massimo o minimo locale tra i punti critici di una funzione, rende molto facile risolvere problemi altrimenti difficoltosi da affrontare. Si chiamano *problemi di ottimizzazione* tutti quelli che richiedono di determinare un valore massimo od uno minimo di una data quantità variabile [121] . Tipici problemi di questo tipo sono quelli isoperimetrici: "tra tutte le figure di un dato tipo, con perimetro assegnato, trovare quella di area massima", che fa il paio con il suo *duale*: "tra tutte le figure di area assegnata, trovare quella di perimetro minimo". Il mondo dell'industria e dell'economia è pieno di problemi di ottimizzazione da risolvere per ridurre gli sprechi, massimizzare i guadagni, utilizzare minore materia prima o determinare capacità massime a parità di materiale impiegato. Altresì dicasi per la Fisica, la Chimica, la Biologia ecc... ecc..: già basti pensare che il principio cardine su cui si basano i fenomeni naturali è quello di *minima azione* o *minima energia.* Noi qui tratteremo gli esempi più significativi e molti altri verranno proposti nel capitolo dedicato agli esercizi, ma gli esempi che si possono dare, saranno, sempre e comunque, non esaustivi dell'immenso campo di applicabilità delle idee che abbiamo incontrato e che continueremo a presentare qui di seguito. Iniziamo con qualche esempio di problema tratto da uno straordinario libro, che consigliamo vivamente di comprare: "**Boris P. Demidovic**: -Esercizi e problemi di Analisi Matematica- ed.Riuniti".

Problema n.865-Demidovic-: Da un foglio quadrato di cartone di lato a si chiede di fare una scatola rettangolare, senza coperchio, di capacità massima, tagliando sugli angoli del foglio quadrati e piegando in alto i bordi della figura a forma di croce così ottenuta.

Soluzione:



Chiamando x il lato dei quadratini da ritagliare e ripiegando lungo la linea tratteggiata, evidentemente essa rappresenta l'altezza della scatola, il cui lato di base è $a - 2x$

[121] In particolare, quindi, di funzioni reali.

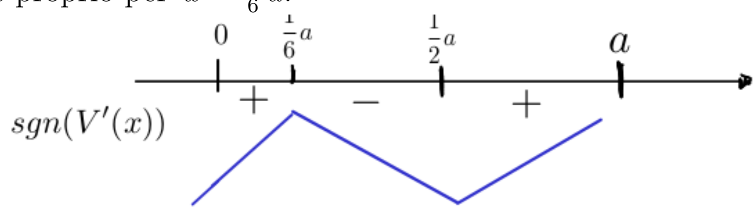
Ricordando che il volume di un parallelepipedo è il prodotto dell'area di base per la sua altezza, allora si chiede di trovare il valore massimo per la funzione "volume" dipendente da x :

$$V(x) = (a-2x)^2 \cdot x.$$

Non essendo richiesto lo studio completo di questa funzione, semplicemente cerchiamo quale tra i suoi punti critici corrisponde al valore di massimo locale.

$$V'(x) = 2(a-2x)\cdot(-2)\cdot x + (a-2x)^2; \; V'(x) = (a-2x)\cdot(a-6x).$$

Tale derivata si annulla per due valori: $x = \frac{1}{2}a$ e $x = \frac{1}{6}a$. A parte il fatto che il primo valore non sarebbe accettabile, dato che esso corrisponde ad un taglio fatto a metà del lato del quadrato, ovvero non genererebbe alcuna scatola se dovessimo piegare lungo quell'asse di taglio e, quindi, l'unico valore accettabile come soluzione del problema è il secondo, ora, comunque, verifichiamo che il "taglio ottimale" si ottiene proprio per $x = \frac{1}{6}a$.



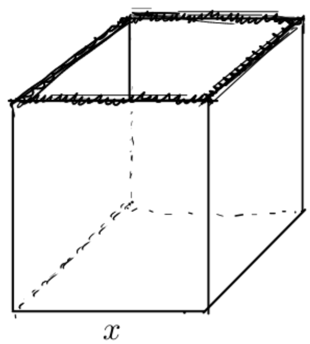
Osserviamo che, comunque, il taglio richiesto non dovrebbe sforare la metà del lato del quadrato iniziale; inoltre, se il taglio viene effettuato nel valore ottimale per il volume, allora la scatola dovrà essere larga e lunga $\frac{2}{3}a$. Il volume massimo ottenibile è dato da:

$$V\left(\frac{1}{6}a\right) = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 \cdot \frac{1}{6}a = \frac{2}{27}a^3.$$

□

Problema n.866-Demidovic-: Un serbatoio aperto di base quadrata deve avere una capacità di v litri. Quali debbono essere le dimensioni del serbatoio perché la quantità di latta utilizzata per la sua fabbricazione sia minima?

Soluzione:



Possiamo scegliere di "piazzare" la variabile x indifferentemente al lato di base o all'altezza del serbatoio: il fatto che il volume sia fissato, permetterà di ricavare una dimensione dall'altra. Per semplicità abbiamo chiamato x il lato del quadrato di base.

Dal volume assegnato ricaviamo che l'altezza h del serbatoio è $h = \frac{v}{x^2}$ per cui la superficie del serbatoio, pari a quattro pareti rettangolati $x \times h$ ed una fondo quadrato $x \times x$ è rappresentata dalla funzione:

$$F(x) = 4 \cdot \frac{\cancel{x} \cdot v}{x^{\cancel{2}}} + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = \frac{4\,v}{x} + x^2.$$

Procediamo come per il problema precedente.

$$F'(x) = -\frac{4\,v}{x^2} + 2\,x; \quad F'(x) = 0 \quad \text{se} \quad \frac{4\,v}{x^2} = 2x$$

da cui ricaviamo

$$2\,v = x^3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{2\,v}.$$

Ora, a parte il fatto che questo è l'unico punto critico trovato e che il problema ha senso solo nel richiedere il valore minimo della superficie, corrispondente alla quantità di latta da utilizzare, verifichiamo che esso corrisponde al punto di minimo. Possiamo procedere come prima, ovvero ricavare il segno della derivata prima e vedere che per valori minori di $\sqrt[3]{2\,v}$ essa è negativa mentre, a destra, risulta positiva ma, anche per variare un po', verifichiamo che nel punto critico la concavità della funzione è rivolta verso l'alto.

$$F''(x) = \frac{8\,v}{x^3} + 2 \quad \text{e} \quad F''(\sqrt[3]{2\,v}) = \frac{8\,v}{2\,v} + 2 = 6 > 0$$

da cui deduciamo che $\sqrt[3]{2\,v}$ è effettivamente un punto di minimo.
Osservazione: in corrispondenza del punto di minimo l'altezza vale

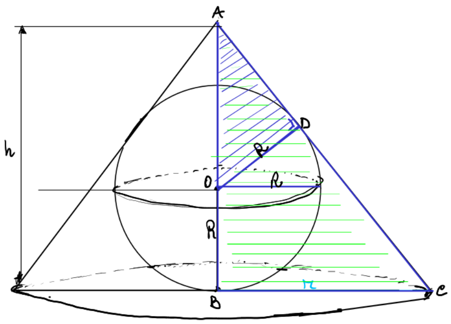
$$h = \frac{v}{\left(\sqrt[3]{2\,v}\right)^2} = \frac{\cancel{v} \cdot \sqrt[3]{2\,v}}{2\cancel{v}} = \frac{1}{2}\,l$$

dove l rappresenta il lato del quadrato di base ottimale per il serbatoio, ergo: il serbatoio deve avere l'altezza pari alla metà della base o, come scrive Demidovic: "Il serbatoio deve avere l'altezza due volte inferiore al lato della base".

□

Problema n.873-Demidovic-: Quale cono circoscritto a una data sfera è di volume minimo?

Soluzione:



La sfera è data, il ché significa che il suo raggio R è fissato. Nella figura a fianco, abbiamo circoscritto un cono ed indicato il suo raggio di base con r, che sarà anche la nostra variabile x. L'altezza del cono è ricavabile dalla similitudine dei due triangolo rettangoli tratteggiati in figura.

$$\overline{OA} : \overline{AC} = \overline{OD} : \overline{BC}$$

da cui:

$$(h - R) : \sqrt{r^2 + h^2} = R : r$$

e quindi:

$$r \cdot (h - R) = R \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$$

ed elevando al quadrato:

$$r^2 \cdot (h - R)^2 = R^2 \cdot (r^2 + h^2) \quad \Longleftrightarrow \quad r^2 h^2 - 2\, r^2 R\, h + \cancel{r^2 R^2} = \cancel{r^2 R^2} + R^2 h^2$$

e dato che $h \neq 0$, dividendo tutto per h ed isolando ad un membro:

$$(r^2 - R^2)\, h = 2r^2 R \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{2r^2 R}{r^2 - R^2}.$$

Ricordiamo che il volume del cono è un terzo del volume del cilindro avente la stessa base e la stessa altezza, per cui, nel nostro caso, è:

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{2r^2 R}{r^2 - R^2}.$$

Osserviamo che $\frac{1}{3}\pi\, 2\, R$ è un fattore costante e quindi, nel calcolo della derivata, esso non conta nulla se non come fattore moltiplicativo finale, quindi possiamo studiare la funzione, posto $r = x$, semplificata:

$$f(x) = \frac{x^4}{x^2 - R^2}.$$

Procediamo al solito con la ricerca e classificazione dei punti critici.

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2 - R^2) - x^4 \cdot 2x}{(x^2 - R^2)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 \cdot (2x^2 - 2R^2 - x^2)}{\dots} = \frac{2x^3 \cdot (x^2 - 2\, R^2)}{\dots}$$

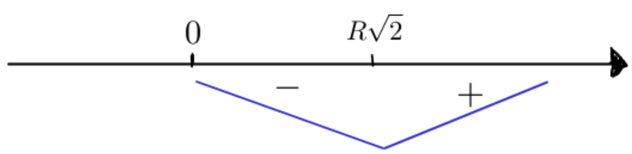
questa derivata si annulla o per $x = 0$, che non è un valore interessante, o per $x = \mp R\sqrt{2}$. Il valore negativo non ha senso, per cui rimane l'unico valore utilizzabile come possibile soluzione del problema:

$$x = R\sqrt{2}.$$

Verifichiamo che, effettivamente, in questo valore si ottiene l'ottimo richiesto. Studiamo il segno testando la derivata nei valori R e $2R$ che sono rispettivamente minori e maggiori di $R\sqrt{2}$.

$$f'(R) = \frac{2R^3 \cdot (R^2 - 2R^2)}{(\cdots)^2} < 0; \quad \wedge \quad f'(2R) = \frac{16R^3 \cdot (4R^2 - 2R^2)}{(\cdots)^2} > 0$$

per cui il punto trovato è, effettivamente, un punto di minimo relativo.



Osservazione: nel punto ottimale l'altezza del cono vale:

$$h = \frac{2 \cdot (R\sqrt{2})^2 \cdot R}{(R\sqrt{2})^2 - R^2} = \frac{4R^3}{R^2} = 4R$$

ovvero l'altezza del cono è doppia del diametro della sfera o, come scrive Demidovic: [il cono di volume minimo è] "quello la cui altezza supera di due volte il diametro della sfera".

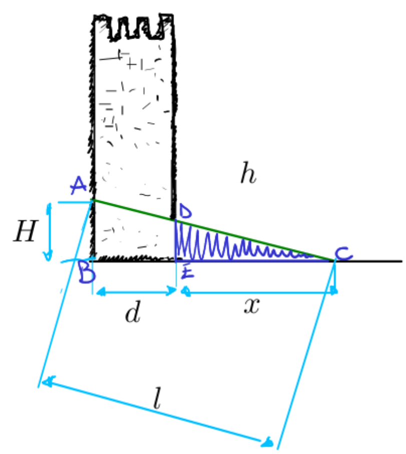
□

Problema n.877-Demidovic-: Determinare l'altezza minima h della porta di una torre verticale perché si possa far passare per questa porta un palo rigido di lunghezza l, la cui estremità [122] scivola sull'orizzontale [123]. La larghezza della torre è $d < l$.

Soluzione:

[122] quella più lontana dalla porta.

[123] Sul pavimento esterno alla torre.



Chiamiamo x la proiezione sul pavimento della parte di palo che rimane fuori dalla torre: dalla similitudine dei triangoli $\overline{ABC}$ e $\overline{CDE}$ si riesce a ricavare l'altezza della porta h in funzione di questa variabile x. Trovata questa relazione, basta poi applicare il calcolo differenziale per determinare i punti critici ed individuare il punto di massimo relativo, che corrisponde all'altezza massima raggiunta dal palo in corrispondenza della porta e, pertanto, l'altezza minima della porta acciocché il palo possa passare.

Dalla similitudine dei triangoli otteniamo:

$$H : h = (d + x) : x$$

da cui

$$h = \frac{x \cdot H}{d + x}.$$

Ora, tramite teorema di Pitagora, otteniamo:

$$H = \sqrt{l^2 - (d + x)^2}$$

ergo:

$$h = \frac{x\sqrt{l^2 - (d + x)^2}}{d + x}.$$

Per semplificarci la vita, possiamo studiare la funzione $f(x) = h^2$, dato che se la base di un quadrato è massima, anche il quadrato stesso risulta massimizzato, per cui considereremo la funzione, da ottimizzare,

$$f(x) = \frac{x^2\,(l^2 - (d + x)^2)}{(d + x)^2} \quad\Longleftrightarrow\quad f(x) = \frac{x^2}{(d + x)^2} \cdot l^2 - x^2.$$

La derivata è:

$$f'(x) = l^2 \cdot D\left(\frac{x}{d + x}\right)^2 - 2x = l^2 \cdot 2 \cdot \frac{x}{d + x} \cdot \frac{d + \cancel{x} - \cancel{x}}{(d + x)^2} - 2x =$$

$$= \frac{2x \cdot d\,l^2 - (d + x)^3}{(d + 3)^3}$$

Essa si annulla per $x = 0$ o per:

$$d\,l^2 = (d+x)^3 \quad \Longleftrightarrow \quad x = l^{\frac{2}{3}} d^{\frac{1}{3}} - d.$$

Dal segno della derivata prima ci si può convincere che il punto critico non nullo è di massimo relativo [124] . Osserviamo che:

$$(d+x) = l^{\frac{2}{3}}\, d^{\frac{1}{3}} \quad \text{e quindi} \quad (d+x)^2 = l^{\frac{4}{3}}\, d^{\frac{2}{3}}.$$

Corrispondentemente al valore ottimale della x trovato, si ottiene l'altezza minima richiesta dal problema:

$$h = \frac{\left(l^{\frac{2}{3}}\, d^{\frac{1}{3}} - d\right) \cdot \sqrt{l^2 - l^{\frac{4}{3}}\, d^{\frac{2}{3}}}}{l^{\frac{2}{3}}\, d^{\frac{1}{3}}} \left(1 - l^{-\frac{2}{3}}\, d^{\frac{2}{3}}\right) \cdot \sqrt{l^2 \left(1 - l^{-\frac{2}{3}}\, d^{\frac{2}{3}}\right)} =$$

$$= \sqrt{l^2 \cdot \left(1 - l^{-\frac{2}{3}}\, d^{\frac{2}{3}}\right)^3} = \sqrt{\left(l^{\frac{2}{3}} - d^{\frac{2}{3}}\right)^3}.$$

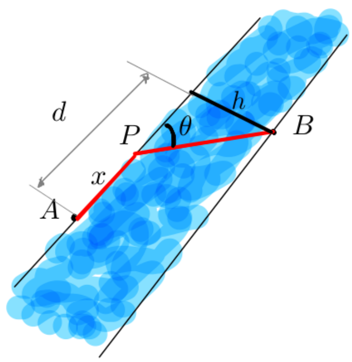
□

Problema n.882-Demidovic-: Un corriere deve arrivare dal punto A, situato su una riva del fiume, al punto B sulla riva opposta. Sapendo che il corriere di muove sulla riva ad una velocità di k volte più grande che per acqua, determinare l'angolo sotto il quale egli deve attraversare il fiume per raggiungere al più presto il punto B. h è la larghezza del fiume e d la distanza (lungo la riva) tra i punti A e B. [125] .

Soluzione:

[124] Si invita lo studente a verificare che tra zero e tale valore la derivata è positiva e successivamente diventa negativa.

[125] Questo problema è simile al problema della **rifrazione** della luce, che quando "viaggia" in mezzi di densità diversa, non si muove su una linea retta, ma su una spezzata, dovendo essa minimizzare il tempo di propagazione per andare dal punto A al punto B : infatti guardando un cucchiaio immerso per metà in un bicchiere, sembra che esso non sia dritto, ma piegato in corrispondenza del punto in cui entra nel liquido.



Indichiamo con x lo spazio percorso sulla riva dove sta il punto A e con P il punto dove dovrà attraversare il corso d'acqua. Dalla semplice relazione $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ si ricava, detta v_T la velocità con cui si muove sulla "terra" e v_{H_2O} quella con cui si muove in acqua, che il tempo "trascorso" sulla sponda di A è $t_1 = \frac{x}{v_T}$ e nell'acqua è $t_2 = \frac{d(P,B)}{v_{H_2O}}$.

Il tempo totale è, evidentemente, $t_1 + t_2$ e può essere scritto come funzione della sola x. Infatti, per il teorema di Pitagora, $d(P,B) = \sqrt{h^2 + (d-x)^2}$ ed inoltre, per come dice il testo, $v_T = k \cdot v_{H_2O}$. Sostituendo nelle espressioni dei due tempi otteniamo

$$t = t(x) = \frac{x}{k \cdot v_{H_2O}} + \frac{\sqrt{h^2 + (d-x)^2}}{v_{H_2O}}.$$

Possiamo ottimizzare la funzione ottenuta moltiplicando $t(x)$ per il valore costante $v_T = k \cdot v_{H_2O}$ che, nel calcolo delle derivate, non conta proprio nulla!

$$f(x) = x + k \cdot \sqrt{h^2 + (d-x)^2}.$$

$$f'(x) = 1 + k \cdot \frac{-\cancel{2}(d-x)}{\cancel{2} \cdot \sqrt{h^2 + (d-x)^2}}$$

e quindi $f'(x) = 0$ se $1 - \frac{k\,(d-x)}{\sqrt{h^2+(d-x)^2}} = 0$ ovvero se:

$$k\,(d-x) = \sqrt{h^2 + (d-x)^2}.$$

Elevando al quadrato e svolgendo qualche semplice passaggio algebrico, si ottiene:

$$k^2\,(d-x)^2 = h^2 + (d-x)^2 \iff (k^2-1) \cdot (d-x)^2 = h^2$$

e quindi:

$$(d-x)^2 = \frac{h^2}{k^2-1} \implies d - x = \sqrt{\frac{h^2}{k^2-1}}$$

ergo:

$$x = d - \frac{h}{\sqrt{k^2-1}}.$$

Questo solo punto critico rappresenta il valore che minimizza il tempo di percorrenza [126] : ora che sappiamo in quale punto il corriere dovrà "abbandonare" la sponda dove si trova il punto A, calcoliamo l'angolo per come richiesto dal testo. Dal triangolo rettangolo disegnato si ricava che:

$$\tan(\theta) = \frac{h}{d-x} = \frac{\cancel{h}}{\frac{\cancel{h}}{\sqrt{k^2-1}}} = \sqrt{k^2-1}.$$

Quindi $\theta = \arctan(\sqrt{k^2-1})$. C'è da notare che $\tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)} - 1$ e quindi anche

$$(\sqrt{k^2-1})^2 = \frac{1}{\cos^2(\theta)} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos^2(\theta) = \frac{1}{k^2}$$

e quindi

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{k}\right),$$

risultato che viene riportato dal Demidovic. Osserviamo infine che se k è minore o uguale ad uno [127] allora al corriere converrebbe attraversare il fiume direttamente dal punto A : significa che, in questo caso, $\theta = \arctan\left(\frac{h}{d}\right)$, per come afferma l'autore dell'esercizio: "L'angolo è uguale al più grande dei numeri $\arccos\left(\frac{1}{k}\right)$ e $\arctan\left(\frac{h}{d}\right)$". Come ogni problema di ottimizzazione, anche se il risultato a cui si perviene sarà sempre lo stesso, a seconda di dove noi scegliamo di mettere la variabile, la funzione da ottimizzare sarà, di conseguenza, diversa e, a volte, con una scelta "fortunata" della variabile rispetto alla quale si determinano le quantità dipendenti, la funzione stessa può risultare molto più semplice da studiare che le altre. Come esempio, risolviamo questo stesso problema in modo alternativo: dato che nessuno ha chiesto quanto percorso fare, sulla terraferma, il corriere, prima di attraversare il fiume, potremmo pensare di utilizzare proprio l'angolo θ come variabile rispetto a cui determinare il percorso da seguire e, quindi, il tempo impiegato nel portarsi dal punto A al punto B. Dalla figura risulta che $d(B,P) = \frac{h}{\sin(\theta)}$ e $d(A,P) = d - h\cdot\cot(\theta)$. Il tempo totale, quindi, sarà dato dall'espressione:

$$t = t(\theta) \; = \frac{d - h\cdot\cot(\theta)}{k\, v_{H_2O}} + \frac{h}{\sin(\theta)\cdot v_{H_2O}}.$$

[126] Verificare studiando i segni della derivata!

[127] E quindi ci si muove nell'acqua con uguale velocità o, addirittura, meglio che sulla terraferma!

Per cui possiamo studiare la funzione $f(\theta) = k\, v_{H_2O} \cdot t(\theta)$ che si scrive come:

$$f(\theta) = \frac{d \cdot \sin(\theta) - h \cdot \cos(\theta) + h \cdot k}{\sin(\theta)}.$$

Ora troveremo i punti critici di questa funzione e ne determiniamo il valore minimo: la derivata $f'(\theta)$ è data dall'espressione seguente.

$$\frac{[\cancel{d \cdot \cos(\theta)} + h \cdot \sin(\theta)] \cdot \sin(\theta) - [\cancel{d \cdot \sin(\theta)} - h \cdot \cos(\theta) + h \cdot k] \cdot \cos(\theta)}{\sin^2(\theta)}$$

ergo:

$$f'(\theta) = \frac{h - h \cdot k \cdot \cos(\theta)}{\dots}$$

e questa funzione si annulla per

$$h = h \cdot k \cdot \cos(\theta) \quad \Longleftrightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{1}{k}$$

da cui

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{k}\right)$$

per come trovato precedentemente, utilizzando la variabile x, corrispondente al percorso $\overline{AP}$. Ma si noti come questa scelta della variabile indipendente, porti al risultato finale con molta meno fatica e numero di calcoli! Pertanto invitiamo sempre, quando il discorso sembra "complicarsi molto" o quando si è di fronte ad espressioni "poco amichevoli", di *tentare di* *cambiare* la scelta della variabile rispetto a cui far dipendere le quantità da studiare, nella speranza di trovare una funzione molto più semplice da derivare e più "carina" (anche solo) da guardare.

□

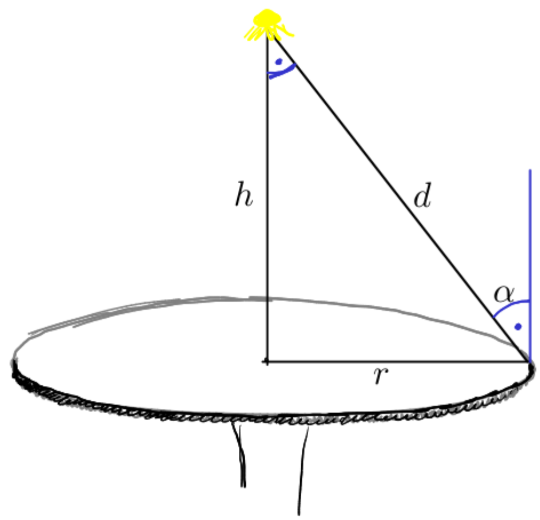
Problema n.884-Demidovic-: Una lampada è sospesa al centro di una tavola tonda di raggio r. A quale altezza bisogna fissare la lampada perché un oggetto che si trova sull'orlo della tavola sia illuminato nel modo migliore? (l'illluminazione è direttamente proporzionale al coseno dell'angolo d'incidenza dei raggi luminosi ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza della sorgente di luce).

Soluzione: Con la notazione presente nella figura seguente, possiamo scrivere le due proporzionalità dell'illuminazione I come:

$$I \propto \cos(\alpha) \quad \wedge \quad I \propto \frac{1}{d^2}.$$

Questo significa che, a meno di una costante moltiplicativa,

$$I = \frac{\cos(\alpha)}{d^2}.$$



Dal triangolo rettangolo ricaviamo le relazioni

$$\cos(\alpha) = \frac{h}{d} \quad \text{e} \quad h^2 + r^2 = d^2.$$

Sostituendo nell'espressione dell'illuminazione si ottiene:

$$I = \frac{h}{d^3} = \frac{h}{(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Basta ora trovare il punto di massimo per questa funzione di h.

$$I'(h) = \frac{(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} - h \cdot \frac{3}{2}(h^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2h}{\left[(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}\right]^2} =$$

$$= (h^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{(h^2 + r^2 - 3h^2)}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots} \cdot (r^2 - 2h^2).$$

Pertanto la derivata si annulla [128] per

$$r^2 = 2h^2 \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{r}{\sqrt{2}} = r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Che questo punto corrisponda ad un punto di massimo (relativo), si vede immediatamente dal segno della derivata prima: la frazione che abbiamo indicato con i puntini sospensivi al numeratore ed al denominatore è -evidentemente- un fattore sempre positivo; se h è minore

[128] Considerando solo il valore positivo di h, dato che la lampada è posta sopra il tavolo e non sotto!

del valore trovato, allora $2h^2$ risulta minore di r^2 e quindi il fattore in parentesi tonda è positivo e, di conseguenza, la derivata stessa risulta positiva. Per un ragionamento analogo, per $h > \frac{r}{\sqrt{2}}$ la derivata risulta negativa, essendo negativa la quantità espressa in quella stessa parentesi tonda.

□

Problema n.890-Demidovic-: Se $x_1,\, x_2, \ldots, x_n$ sono risultati di misure egualmente precise di una grandezza x, il suo valore più probabile è quindi quella per il quale la somma dei quadrati degli errori

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n}(x - x_i)^2$$

è minima (*principio dei minimi quadrati*) Dimostrare che il valore più probabile della grandezza x è la media aritmetica dei risultati di misurazione.

Soluzione: Quella somma è derivabile, essendo somma di quadrati e possiamo quindi determinare i valori critici per σ, applicando il calcolo differenziale.

$$\sigma' = 2\sum_{i=1}^{n}(x - x_i) = 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 2 \cdot \left(n \cdot x - \sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

Quindi $\sigma' = 0$ se

$$n \cdot x - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}.$$

Il valore medio, trovato come punto critico della funzione σ, corrisponde ad un punto di minimo: infatti, se $x < \bar{x}$ allora il primo addendo risulta minore del secondo e quella differenza è negativa; se invece $x > \bar{x}$ la derivata, per un ragionamento analogo, risulta positiva, essendo positiva la parentesi tonda presente nella funzione derivata. Ora, dato che σ è lo scarto quadratico calcolato rispetto ai valori trovati, ovvero misura "la dispersione" dei dati rispetto al valore x, allora, ove essa raggiunge il suo minimo, si ottiene il "valore più affidabile" delle misure trovate, ovvero il "valore più probabile", che essa dovrebbe avere.

c.v.d.

Dopo questi esempi "classici" di problemi di ottimizzazione, invitiamo a svolgere quelli proposti negli esercizi: soprattutto per divertimento e soddisfazione personale, dato che, risolvere problemi del genere, fornisce una gratificazione straordinaria allo spirito dell'uomo.

7. Applicazioni varie del calcolo differenziale

La derivata, dal punto di vista geometrico, per come abbiamo visto e per come l'abbiamo introdotta, rappresenta la pendenza della retta tangente, ma essa ha una interpretazione molto utile come **velocità di cambiamento** di una data quantità, ovvero, **tasso di crescita.** In effetti se la funzione di cui noi volessimo calcolare la derivata rappresenta una legge oraria, ovvero come varia lo spazio al passare del tempo, allora la derivata prima rappresenta la velocità istantanea e la seconda, l'accelerazione. Consideriamo infatti $s = s(t)$ e scriviamone il rapporto incrementale:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_f) - s(t_i)}{t_f - t_i},$$

[129] esso rappresenta la *velocità media* nell'intervallo di tempo $[t_i, t_f]$ e, per $\Delta t \to 0,$ tale rapporto definisce la **velocità istantanea** del corpo al tempo t_i. Ma se noi pensiamo che $t_f = t_i + h$ allora quello stesso rapporto incrementale lo riscriveremmo nella più familiare forma:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_i + h) - s(t_i)}{h}$$

e per $\Delta t = h \to 0$ si ottiene proprio la derivata prima di $s(t)$:

$$v(t_i) = \frac{d\,s(t_i)}{d\,t}.$$

D'altra parte, l'accelerazione è la variazione della velocità nell'intervallo di tempo, per cui

$$a = \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \frac{v(t_f) - v(t_i)}{t_f - t_i}$$

e, con considerazioni e scritture analoghe a quelle utilizzate precedentemente, otteniamo l'**accelerazione istantanea** al tempo t_i :

$$a(t_i) = \frac{d\,v(t_i)}{d\,t} = \frac{d^2\,s(t_i)}{d\,t^2}.$$

Il grande successo della fisica newtoniana è che la seconda legge della dinamica [130] afferma la diretta proporzionalità tra l'accelerazione subita da un corpo a seguito della forza impressa su di esso: il fatto che l'accelerazione sia la derivata seconda della legge oraria, tramite l'operazione inversa della derivazione [131], applicata due volte, permette

[129] I pedici stanno per "finale" e "iniziale", rispettivamente.

[130] La nota $F = m \cdot a$ che sarebbe meglio scrivere, come primo approccio, $a \propto F$.

[131] Un operatore che incontreremo tra non molto.

di risalire alle leggi orarie dei moti a partire dalla conoscenza delle sole forze (esterne) agenti sui corpi. Altri esempi di applicazione sono dati dalle correnti che percorrono un circuito elettrico, in *Elettrodinamica* [132] . Se $q = q(t)$ è la funzione che descrive la quantità di carica elettrica che, nell'intervallo di tempo [0; t], attraversa la sezione di un conduttore elettrico, allora il rapporto incrementale:

$$\frac{\Delta q(t)}{\Delta t} = \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}$$

rappresenta l'intensità di corrente elettrica media che attraversa il conduttore nell'intervallo $(t, t+\Delta t)$. Facendo tendere Δt a zero, si ottiene la derivata della funzione $q(t)$, che fornisce il valore della corrente elettrica che attraversa il conduttore all'istante di tempo t. D'altra parte, considerando un **condensatore,** la quantità di carica elettrica che si "accumula" sulle armature è direttamente proporzionale alla *differenza di potenziale* che si applica tra le armature stesse: detta $Q(t)$ la carica presente al tempo t e $V(t)$ la differenza di potenziale allo stesso tempo t, allora possiamo scrivere che:

$$Q(t) = C \cdot V(t).$$

La costante di proporzionalità C viene detta **capacità** del condensatore e dipende, chiaramente, dal condensatore stesso. Comunque sia, il rapporto incrementale

$$\frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}$$

rappresenta l'intensità media della corrente di carica (o di scarica) del condensatore, relativa all'intervallo di tempo Δt. Per $\Delta t \to 0$ si ottiene l'**intensità di corrente** di carica (o di scarica) del condensatore istantanea. Sostituendo nel rapporto incrementale la relazione che "definisce" $Q(t)$ si ottiene:

$$i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{C \cdot V(t + \Delta t) - C \cdot V(t)}{\Delta t} = C \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V(t)}{\Delta t} = C \cdot V'(t),$$

ovvero, in definitiva:

$$i(t) = C \cdot V'(t),$$

che esprime la relazione esistente tra l'intensità di corrente di carica (o di scarica) di un condensatore di capacità C e la tensione V ai capi del condensatore stesso. Vi sono innumerevoli altre applicazioni delle derivate nel campo dell'elettromagnetismo, oltre che dell'elettrodinamica ma, chiaramente, ovunque si debba o si possa considerare un

[132] Oppure dai "flussi" di un liquido in una conduttura, in *Fluidodinamica*.

rapporto incrementale, ovvero una variazione relativa, lì vi sarà sempre presente una derivata!

A parte la *Fisica,* la derivata si incontra anche nella *Dinamica delle popolazioni:* se, ad esempio, indichiamo con $N = N(t)$ il numero di individui presenti al tempo t di una data popolazione, allora il *tasso di crescita medio* della popolazione è dato da quanto essa aumenta relativamente all'intervallo di tempo trascorso: $\frac{\Delta N(t)}{\Delta t}$. Se facciamo tendere a zero il lasso di tempo, allora tale rapporto (incrementale) definisce il **tasso di crescita istantaneo** della popolazione e corrisponde alla derivata prima della funzione di numerosità della popolazione stessa:

$$\text{“Tasso di crescita istantaneo”} = \frac{d\,N(t)}{d\,t}.$$

Uno dei primi e più semplici modelli di “dinamica delle popolazioni”, che funziona egregiamente per descrivere la crescita di colonie batteriche, virali [133] o processi di decadimento radioattivo, è supporre che “*il tasso di crescita istantaneo è direttamente proporzionale alla numerosità della popolazione al tempo t.* Questa semplice ipotesi, che si scrive semplicemente come:

$$N'(T) = k \cdot N(t)$$

produce una *equazione differenziale* di facile risoluzione [134] che, risolta, fornisce una legge di crescita della popolazione in funzione del tempo, permettendo, così, di fare previsioni sul numero di individui che saranno presenti nel futuro.

Altre applicazioni, notevoli, del concetto di derivata, si ritrovano in *Economia:* infatti, quando in tale disciplina si utilizza l'aggettivo **marginale,** si sta indicando proprio la derivata delle funzioni *costo, ricavo e profitto* [135] : le funzioni costo marginale, ricavo marginale, profitto marginale indicano rispettivamente la derivata delle corrispondenti funzioni costo, ricavo e profitto rispetto alla variabile indipendente che, di solito, è la quantità prodotta o venduta di un dato bene/prodotto. Prendendo l'incremento di una unità della quantità prodotta, il profitto marginale, ad esempio, rappresenta una approssimazione della conseguente variazione di profitto, dato che la derivata moltiplicata l'incremento [136] rappresenta il differenziale che, come abbiamo visto, è una prima approssimazione dell'incremento delle funzioni.

[133] Almeno per le prime fasi di accrescimento della popolazione... studieremo tali modelli nel prossimo capitolo.

[134] Si chiama **equazione differenziale** una relazione in cui compare, oltre a qualche variabile o funzione, anche qualche derivata della funzione stessa.

[135] Sempre ammesso che esse siano derivabili

[136] Che abbiamo considerato unitario.

8. Continuità e discontinuità

Dopo aver studiato un po' di calcolo infinitesimale e calcolo differenziale, vogliamo ora chiarire meglio dei concetti essenziale per tutta l'Analisi Matematica e vedere le proprietà conseguenti alle definizioni che daremo. Il primo fondamentale concetto che incontriamo è quello di **continuità** di una funzione. L'idea è semplice: quando ne tracciamo il grafico, non dobbiamo "staccare" la penna dal foglio! però questa idea adesso la dobbiamo "trasformare" in qualcosa di operativo e matematico. Come prima osservazione, evidentemente, se una funzione non è definita in qualche punto, ivi non potrà essere continua [137]: pertanto la *continuità* è una **proprietà locale,** ovvero riguarda i singoli punti e, al più, piccoli intorni di essi. In secondo luogo osserviamo che se la funzione è definita il x_0, con valore $f(x_0)$, allora -al fine di "non staccare la penna dal foglio"- sia percorrendo il grafico sulla sinistra del punto, sia percorrendolo sulla destra, la funzione dovrà arrivare, come valore, sempre a $f(x_0)$: ovvero, per non esserci *salti,* i limiti a destra ed a sinistra devono coincidere con il valore della funzione nel punto x_0. Questa osservazione è conclusiva e quindi possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 6. *Un punto del dominio della funzione, $x_0 \in Dom(f)$, si dice **punto di continuità** se:*

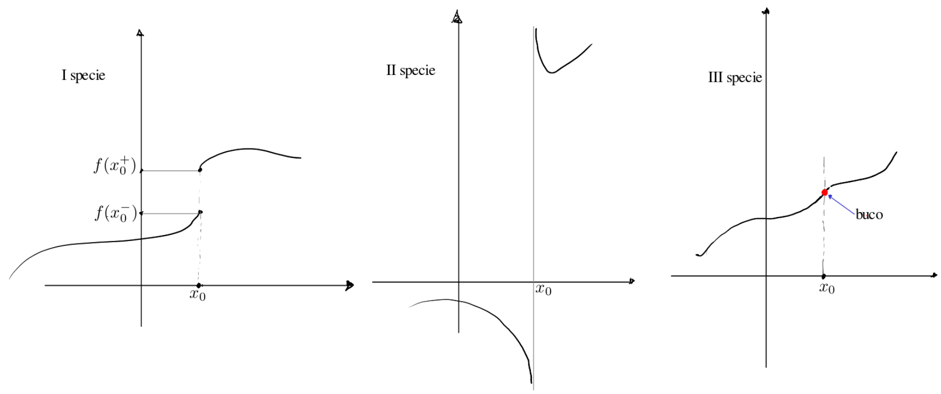
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \ = f(x_0)$$

*e si dice anche che la **funzione** $f(x)$ **è continua in** x_0 **.** Se la fuzione è continua in tutti i punti di un intervallo $I \subseteq Dom(f)$, allora la si dirà **continua sull'intervallo** I, se poi I coincide con il $Dom(f)$, allora la si chiamerà, semplicemente, **funzione continua.***

Da questa definizione, ricordando il significato della scrittura di limite, possiamo dire che una funzione è *continua* in x_0 se per un qualsiasi intorno, arbitrariamente piccolo, di $f(x_0)$, si può determinare un intorno di x_0, i cui valori abbiano tutti immagine nell'intorno di $f(x_0)$ o, meglio ancora, nel linguaggio topologico, se la *controimmagine* di un qualsiasi insieme aperto (del codominio), è sempre un insieme aperto (nel dominio). Questa definizione ci dice, in soldoni, che se ci spostiamo poco dal valore x_0 allora anche la funzione si scosta poco dal valore $f(x_0)$. La continuità è una proprietà molto diffusa e, in generale, a meno di esempi costruiti ad hoc di funzioni "patologiche", tutte le funzioni che noi abbiamo considerato finora, sono continue nel proprio dominio!

[137] Presenta, come dice, **un buco!**

i **punti di discontinuità,** laddove la funzione è -per definizione- non continua, si classificano in base al comportamento della funzione "nei loro pressi", ovvero in un intorno sufficientemente piccolo di tali punti: ci possono essere solo tre tipi di discontinuità e, per comprenderli meglio, osserviamo il seguente disegno [138] .



Consideriamo, in tutt'e tre i casi, il punto $x_0 \notin \mathrm{Dom}(f)$, per cui la funzione non può essere sicuramente continua in x_0 [139] . Nel primo caso, i limiti a destra ed a sinistra di x_0 sono finiti, ma distinti e la loro differenza definisce il valore del *salto finito.* Nel secondo caso il *salto non è quantificabile,* dato che i limiti, a destra e a sinistra del valore x_0, hanno un valore infinito: in verità basterebbe che uno solo di essi sia infinito per non poter quantificare il salto! L'ultimo caso è il più interessante, dato che i limiti, a destra ed a sinistra di x_0, sono entrambi finiti ed uguali tra di loro, ma non uguagliano il valore della funzione nel punto, dato che il punto stesso non appartiene al dominio della funzione! In ordine essi si classificano come discontinuità di prima, seconda o terza specie. Osserviamo che la discontinuità di seconda specie corrisponde alla presenza di un *asintoto verticale* per il grafico della funzione. La discontinuità di terza specie, invece, spesso viene riferita come **discontinuità eliminabile,** dato che, seppur sia vero che in x_0 la funzione *presenta un buco,* è anche vero che di un buco "grande quanto un punto" [140] nessuno se ne può accorgere, a meno che non glielo si indichi e, pertanto, si può *reintrodurre* il valore del limite

[138] In cui abbiamo riportato tutt'e tre i casi, che definiremo e commenteremo subito appresso.

[139] In verità, come vedremo negli esempi a seguire, non è nemmeno necessario che $x_0 \notin \mathrm{Dom}(f)$, dato che in x_0 potrebbe benissimo essere definita la funzione, ma nelle vicinanze essa presenta comportamenti "di salto".

[140] Che per definizione è privo di dimensione!

come valore della funzione nel punto, eliminando, di fatto, il buco stesso [141] . In alcuni casi si conviene, addirittura, di assegnare un valore alla funzione in x_0 anche nel caso del salto finito: basta considerare il *valore medio tra i due limiti,* a sinistra ed a destra di x_0, e *imporre* il valore della funzione, in x_0, proprio uguale a tale valore medio. Solo nel caso di discontinuità di seconda specie non si può, in alcun modo, assegnare un valore "ragionevole" alla funzione in x_0 : proprio per questo, la discontinuità di seconda specie, viene anche indicata col nome di **discontinuità essenziale.** In generale presentiamo il seguente schema classificatorio [142] : sia che il punto x_0 appartenga al dominio della funzione, sia che non ci stia, le discontinuità si "leggono" negli intorni di x_0, precipuamente: se indichiamo con:

$$l_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad \wedge \quad l_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x),$$

	I specie	II specie	III specie
$x_0 \in$ (oppure $\notin$) Dom(f)	$l_1 \neq l_2 < \infty$	$l_1 \vee l_2 = \infty$	$l_1 = l_2 \underline{\neq f(x_0)}$

Esempio: Considera la funzione $f(x)$ definita come di seguito e studiane la continuità al variare del parametro k.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2kx & \text{se}\, x \leqslant 1 \\ 3k\,x - 2 & \text{se}\, x > 1 \end{cases}$$

Studio: I due "rami" della funzione sono polinomi che non hanno problemi di esistenza e sono continui ovunque si considerino. Il solo problema potrebbe essere nel punto dove la funzione *cambia la propria legge associativa,* ovvero in $x = 1$. Basta quindi calcolare i limiti a destra ed a sinistra di tale punto per capire quando vi è continuità e quando no.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + 2k\,x) = 2k + 1$$

mentre,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3k\,x - 2) = 3k - 2.$$

Se questi limiti sono distinti, essendo valori finiti, vi sarà una *discontinuità di prima specie,* altrimenti la funzione sarà continua dappertutto:

$$2k + 1 = 3k - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3 = k,$$

[141] Si dice che la funzione **viene estesa per continuità** anche su x_0.

[142] Per chi avesse necessità di classificare le discontinuità: in generale è importante sapere che la funzione non è continua in un punto, in che modo, poi, è solo una questione di "dettaglio".

ergo: per $k = 3$ la funzione risulta dappertutto continua, per $k \neq 3$ la funzione presenta una discontinuità di prima specie, con salto pari a $|k-3|$, nel punto $x = 1$. Osserviamo che $f(1) = 2k+1$ qualsiasi sia il valore di k, quindi la funzione in $x_0 = 1$ è sempre definita! ma "procedendo" sul ramo della funzione a destra di tale valore, non si arriva necessariamente al valore $f(1)$, per questo motivo, pur essendo $1 \in \mathrm{Dom}(f)$, la funzione comunque potrebbe presentare una discontinuità di prima specie!

□

Esempio: Considera la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2-4} & \text{se } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \\ x+1 & \text{se } x \in [-2, 1) \\ 0 & \text{se } x = 1 \\ -x+3 & \text{se } x \in (1, 2] \end{cases}$$

e studiane la continuità.

Studio: Anche in questo caso la funzione è formata da polinomi su tre intervalli distinti, più una "razionale fratta" considerata nel proprio campo di esistenza, per cui in tali intervalli essa risulta continua: i casi interessanti sono dati dai punti in cui cambia la legge associativa: ∓ 2 e $x = 1$. Ora si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -2^-} f(x) &= \lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x^2-4} = +\infty \\ \lim_{x\to -2^+} f(x) &= \lim_{x\to -2^+} (x+1) = -1 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} (x+1) = 2 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} (-x+3) = 2 \end{aligned}$$

ed infine:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} (-x+3) = 1 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x^2-4} = -\infty. \end{aligned}$$

Da questi limiti deduciamo i seguenti fatti: il $x = -2$ c'è una *discontinuità di seconda specie,* dato che il salto non è quantificabile, essendo il limite, a sinistra del punto, (più) infinito. In $x = 1$ i limiti destro e sinistro coincidono, ma non sono uguali al valore della funzione $f(1) = 0$, per cui siamo in presenza di una *discontinuità di terza specie*

[143] . In $x = 2$ è presente un discontinuità essenziale, come nel primo caso considerato, dato che il limite a destra esce (meno) infinito.

□

Esempio: Studiare la continuità e classificare, se presenti, i punti di discontinuità della funzione definita come

$$f(x) = \frac{|x+2|}{x^2+2x}.$$

Soluzione: Il C.d.E. di questa funzione si trova "annullando" il denominatore:

$$x^2 + 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x+2) = 0 \quad \Longrightarrow x = 0 \ \vee \ x = -2.$$

D'altra parte, il valore assoluto al numeratore si annulla proprio in $x = -2$, per cui possiamo affermare che la funzione è sicuramente continua in tutti i punti diversi da zero e meno due [144] .

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{-\cancel{(x+2)}}{x \cdot \cancel{(x+2)}} = \frac{1}{2}$$

d'altra parte è anche:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{\cancel{(x+2)}}{x \cdot \cancel{(x+2)}} = -\frac{1}{2}$$

per cui, in $x = -2$, c'è una discontinuità di prima specie. Inoltre, si osserva che il limite, nell'altro punto in cui non è definita la funzione, è:

$$\lim_{x\to 0^{\mp}} f(x) = \pm\infty$$

per cui, in $x = 0$, vi è una discontinuità di seconda specie.

□

Esempio: Studiare, al variare del parametro k la continuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} k\,x + 4 & \text{se}\, x > 2 \\ 4 + x & \text{se}\, x < 2 \end{cases}$$

Soluzione: Intanto osserviamo che "i due rami" sono costituiti da due rette e, pertanto, sono funzioni continue. Inoltre osserviamo che la funzione <u>non è definita</u> in $x = 2$: vuol dire che, questa funzione, è sempre e comunque discontinua per tale valore della x. Ora, se $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$, ovvero per $2k + 4 = 4 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1$,

[143]Il salto qui non è nullo, ma pari a due unità! sarebbe da classificare come discontinuità con salto quantificabile e quindi di prima specie, però i limiti a destra e a sinistra coincidono, quindi quel salto è stato artificiosamente introdotto su una discontinuità a salto nullo: proprio per questo la classifichiamo come terza specie!

[144]Per questi due punti dobbiamo controllare, con i limiti, cosa succede.

la discontinuità sarà di terza specie (eliminabile imponendo $f(2) = 6$) altrimenti sarà di prima specie, con salto pari a $|2k - 2|$.

□

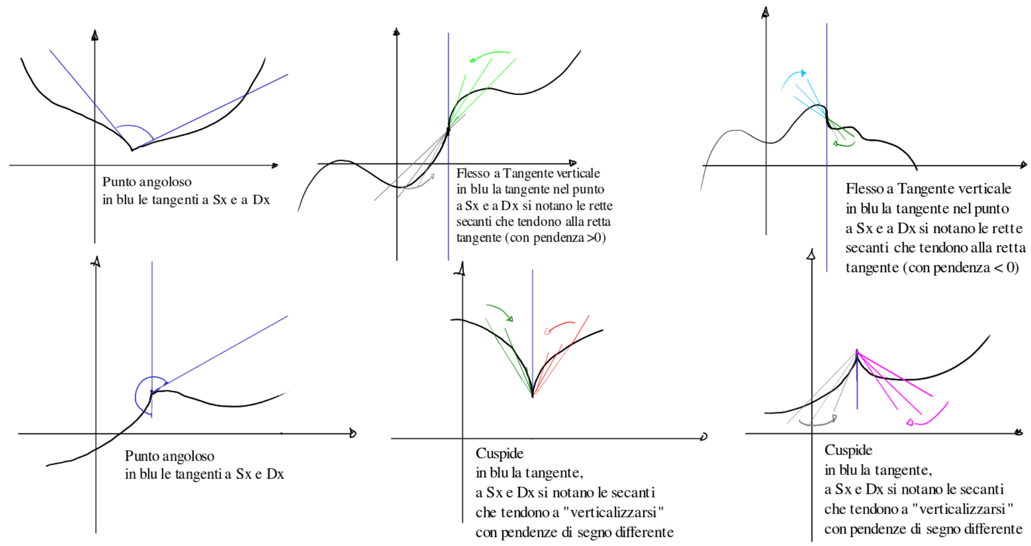
9. I punti singolari

Ricordiamo che abbiamo chiamato *regolari* i punti in cui la funzione ammette la derivata, pertanto i **punti singolari** sono quelli per i quali la derivata non può essere determinata. Il fatto è che la derivata prima è una funzione, il cui dominio non deve coincidere necessariamente con quello della funzione di partenza, ma potrebbe ben esserne un suo sottoinsieme proprio e, in tal senso, essa potrebbe avere dei punti di discontinuità laddove, in quegli stessi punti, la funzione risulta invece continua! Distinguiamo tre tipi di singolarità: quelle per le quali la funzione presenta un **punto angoloso** , quelle per le quali la funzione presenta un **punto di flesso a tangente verticale** e, infine, quelle per le quali la funzione presenta un **punto di cuspide** o, semplicemente, una **cuspide** [145] . Nel primo caso la derivata prima presenta una discontinuità di prima specie oppure di seconda specie in cui, però, uno dei due limiti è finito: infatti, a sinistra di quel punto, il rapporto incrementale tenderebbe ad un valore finito diverso dal valore del limite che si andrebbe a calcolare a destra, ovvero una delle due pendenze della derivata è verticale, ma dall'altro lato essa è inclinata con pendenza finita. Questo significa, semplicemente, che nel punto in questione, il grafico della funzione arriva con tangenti posizionate con inclinazione differente tra prima e dopo il punto: l'angolo formato tra le due tangenti sarà calcolabile e non nullo, il ché motiva la definizione di punto angoloso. Resta inteso che non è possibile avere due rette tangenti distinte in uno stesso punto della funzione: per questo motivo in tali punti la derivata *non è calcolabile.* Se invece, in un punto, la derivata tende all'infinito [146], sia a sinistra che a destra della funzione, con lo stesso segno, allora si identificano i punti di flesso a tangente verticale mentre, se questi limiti vanno entrambi all'infinito, ma con segni opposti, allora si determineranno delle cuspidi. Vediamo qui di seguito le motivazioni a queste affermazioni e successivamente porteremo degli esempi: sarà utile capire, più che le condizioni analitiche "dettate" dai limiti che si andranno a calcolare, cosa succede effettivamente sui

[145] O anche **punto cuspidale.**

[146] E quindi si è in presenza di **una discontinuità di seconda specie** per la derivata prima.

grafici disegnati qui di seguito. Le condizioni che alla fine compendieremo, al solito, in una tabella riassuntiva, derivano direttamente dalle osservazioni che faremo sulle figure che presentiamo qui sotto.



Sia chiaro che, in tutti i casi, stiamo considerando punti di continuità per le funzioni, in cui la derivata prima presenta una discontinuità. È utile definire la **derivata sinistra,** indicata con $f'_-(x)$ e la **derivata destra,** indicata con $f'_+(x)$, tramite i rapporti incrementali presi rispettivamente unicamente a sinistra o a destra del punto in cui si voglia calcolare la derivata: se la funzione è derivabile, queste due derivate sono uguali, laddove invece sono differenti, non esistono, oppure tendono all'infinito, la funzione presenta una discontinuità nella derivata prima. Consideriamo $h > 0$ e definiamo, quindi:

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$$

e

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^+} f'(x).$$

Forti di queste definizioni, le situazioni riportate nella figura precedente, supposto x_0 il valore delle ascisse ove si riscontra il punto singolare, corrispondono alle condizioni:

- Punto angolo nella prima figura:

$$f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0) < \infty.$$

- Flesso a tangente verticale nella seconda figura:
$$f'_-(x_0) \to +\infty \quad \wedge \quad f'_+(x_0) \to +\infty.$$
- Flesso a tangente verticale nella terza figura:
$$f'_-(x_0) \to -\infty \quad \wedge \quad f'_+(x_0) \to -\infty.$$
- Punto angoloso nella quarta figura:
$$f'_-(x_0) \to +\infty \quad \wedge \quad f'_+(x_0) < \infty.$$
[147]
- Punto di cuspide nella quinta figura:
$$f'_-(x_0) \to -\infty \quad \wedge \quad f'_+(x_0) \to +\infty.$$
- Punto di cuspide nella sesta figura:
$$f'_-(x_0) \to +\infty \quad \wedge \quad f'_+(x_0) \to -\infty.$$

Possiamo riassumere il tutto in questa tabella sinottica:

Almeno uno tra $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ finito	Punto Angoloso
$f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ infiniti con segni uguali	Flesso a tan.vert.
$f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ infiniti con segni diversi	Cuspide

Esempio: Effettuare uno studio completo della funzione, al fine di disegnarne il grafico, in particolare indicando la natura dei punti singolari (non si richiede lo studio della derivata seconda):
$$f(x) = |x+1|e^{\sqrt[3]{x}}.$$

Soluzione: Non ci sono problemi di esistenza e la funzione è il prodotto di due funzioni positive, non strettamente, poiché il primo fattore, per $x = -1$, si annulla. Quindi possiamo scrivere, in linguaggio simbolico:
$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, +\infty) \quad \wedge \quad f(x) \geqslant 0,\ \forall x \in \mathrm{Dom}(f).$$
I limiti all'infinito sono "dominati" dal fattore esponenziale, per cui:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
Vi è quindi un unico asintoto orizzontale, a sinistra, che è l'asse delle ascisse. Studiamo ora le derivate.
$$f'(x) = D(|x+1|) \cdot e^{\sqrt[3]{x}} + |x+1| \cdot D\left(e^{\sqrt[3]{x}}\right) =$$

[147] C'è un analogo caso in cui la derivata destra tende all'infinito e quella sinistra è finita.

$$= sgn(x+1) \cdot e^{\sqrt[3]{x}} + (x+1) \cdot sgn(x+1) \cdot e^{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} =$$

$$= sgn(x+1) \cdot e^{\sqrt[3]{x}} \cdot \left(1 + \frac{x+1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right).$$

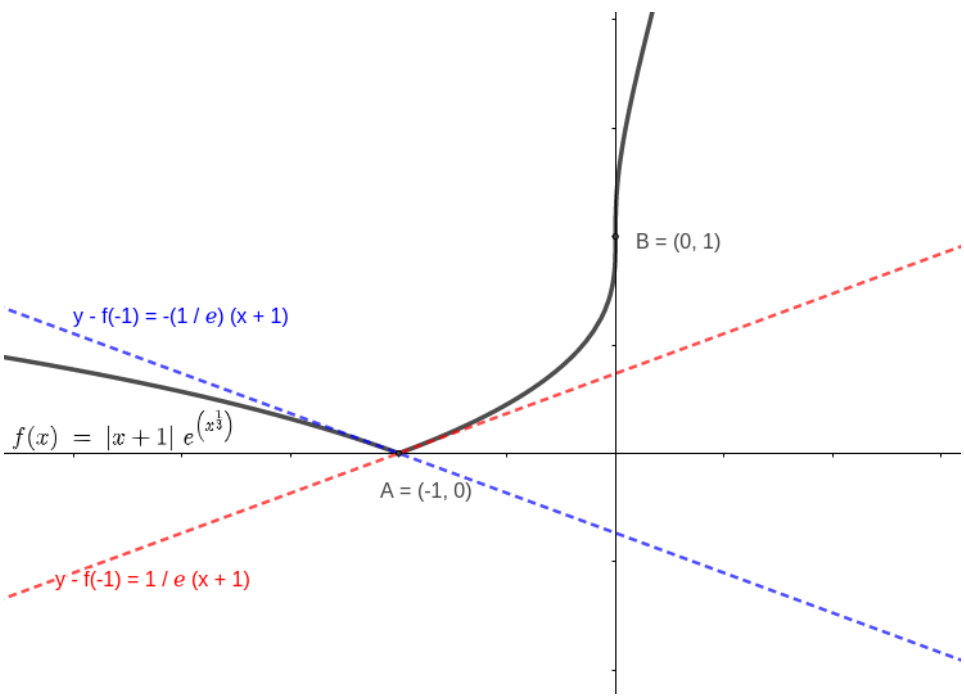
Il campo di esistenza della derivata coincide con quello della funzione di partenza, infatti bisogna *eliminare* $x = 0$ che annulla il denominatore della frazione e, in più, in $x = -1$ la funzione *segno* presenta un discontinuità, quindi vanno studiati i limiti, della derivata prima, per x tendente a zero o a meno uno.

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \frac{1}{q \to 0} = +\infty, \quad \wedge \quad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \frac{1}{q \to 0} = +\infty.$$

Quindi nel punto $(0, 1)$ c'è un punto di flesso a tangente verticale.

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = -\frac{1}{e}, \quad \wedge \quad \lim_{x \to -1^+} f'(x) = \frac{1}{e}.$$

Ergo in $(-1, 0)$ c'è un punto angoloso con le pendenze delle due rette tangenti tendenti a $-\frac{1}{e}$ e $\frac{1}{e}$, rispettivamente, a sinistra ed a destra del punto.



□

10. I Teoremi sulle funzioni continue

Le funzioni continue godono di particolari ed interessanti proprietà che, nel corso degli anni, sono state intuite, osservate e dimostrate. Il principale studioso che si occupò della continuità, almeno nel mondo dell'Analisi Matematica, è sicuramente Weierstrass , a cui si possono ascrivere, senza tema di smentite, i principali risultati riguardanti la continuità delle funzioni. Alcuni teoremi, che dimostreremo, sono riconducibili a proprietà dei limiti: in particolare al *teorema di unicità del limite* ed al *teorema della permanenza del segno.* Può sembrare strano che abbiamo utilizzato finora queste proprietà in modo intuitivo, ad esempio nel calcolo dei limiti e del segno delle espressioni algebriche e solo ora dimostriamo che, quanto fatto, sia giusto anche da un punto di vista teorico: in verità, lo sviluppo teorico dell'Analisi infinitesimale e del calcolo differenziale, è effettivamente avvenuto successivamente al suo utilizzo nel corso dei secoli e, di fatto, i primi Matematici che utilizzarono questi nuovi strumenti, ottenendo risultati strepitosi, furono molto criticati perché non era stato ancora sviluppato un apparato ipotetico-deduttivo perfettamente coerente ed ineccepibile. Il simbolismo "$\epsilon - \delta$", ad esempio, introdotto e sviluppato da Cauchy, per dimostrare i teoremi dell'Analisi infinitesimale in modo ineccepibile, risale solo ad un periodo di tempo che va dal 1827 al 1833, dopo che già molti progressi, nel campo della Matematica e della Fisica, furono fatti proprio ad opera dell'introduzione del calcolo infinitesimale e differenziale. Si ricorda, a tal proposito, la polemica di Berkeley contro Leibniz e Newton, ancora un secolo prima dell'introduzione rigorosa del succitato linguaggio $\epsilon - \delta$:

> *"Nel 1734, con The analyst, George Berkeley (1685-1753) accusò i matematici di commettere errori logici. L'obiettivo polemico di Berkeley erano proprio le definizioni dei termini fondamentali e le procedure argomentative adottate nel calcolo leibniziano e nel metodo delle flussioni newtoniano. Nell'Analyst si sosteneva che il ricorso agli infinitesimi (tanto i 'momenti' newtoniani, quanto i 'differenziali' leibniziani) era mal fondato, poiché non vi sarebbe alcun fondamento empirico nell'idea di una grandezza diversa da zero, ma più piccola di qualsiasi grandezza finita. Sappiamo che Newton, in alcune sue opere – soprattutto in quelle scritte in polemica con Leibniz come l'Account*

> *to the commercium epistolicum (1715) – aveva sostenuto che il suo metodo non era basato sugli infinitesimi ma piuttosto sulle fluenti, le flussioni e i limiti dei primi e ultimi rapporti. Berkeley faceva però osservare che anche il concetto di flussione ha una definizione empiricamente mal fondata. La flussione è definita da Newton come velocità istantanea di accrescimento di una grandezza fluente nel tempo. Secondo il vescovo anglicano noi abbiamo una determinazione empirica soltanto della velocità media, poiché possiamo misurare e percepire solamente intervalli finiti di spazio e di tempo. Anche i limiti di cui Newton si serviva erano messi sotto accusa nell'Analyst. Nella teoria dei "limiti delle quantità evanescenti" viene stabilito il limite a cui tende un rapporto fra due grandezze nell'istante in cui queste 'svaniscono' contemporaneamente. Ma, obiettava Berkeley, prima che le grandezze siano svanite il limite non è l'ultimo, quando sono svanite il limite è indeterminato (0/0). I leibniziani venivano invece messi di fronte all'obiezione secondo la quale la regola di cancellazione degli infinitesimi (x+dx=x) è valida soltanto se si accetta che dx sia uguale a zero. Tanto i newtoniani quanto i leibniziani avrebbero quindi basato i loro calcoli su nozioni empiricamente mal fondate e su procedure argomentative viziate da una fallacia suppositioni: alcune grandezze sarebbero considerate diverse da zero nella parte iniziale della dimostrazione, per poi essere uguagliate a zero negli ultimi passaggi deduttivi."* [148]

È incredibile pensare che questa polemica è stata risolta solo in tempi recenti, da parte di un Logico-Matematico di nome Abraham Robinson che, nel 1966 pubblicò il fondamentale libro "Non-standard Analysis", giustificando e recuperando, in modo coerente, l'impostazione del calcolo infinitesimale e differenziale utilizzata da Leibniz. Noi abbiamo preferito giustificare a posteriori alcuni fatti, perché entrare nel merito di ogni cosa -in modo pignolo- potrebbe generare un senso di pesantezza indigesta: si fa sempre in tempo a recuperare le temporanee lacune o le questioni lasciate in sospeso, ma è sempre utile considerare la

[148] Brano tratto da: "Enciclopedia Treccani: -L'età dei lumi della matematica: gli sviluppi del calcolo in Gran Bretagna - Storia della Scienza.

massima [149] : ***"Il troppo rigore uccide la Matematica",*** riferita soprattutto al fatto che si perde una delle componenti fondamentali per "fare Matematica", ovvero ***la fantasia.***

LEMMA 3 (Disuguaglianza triangolare). *Date due quantità qualsiasi* A *e* B, *si ha sempre:*

$$|A+B| \leqslant |A|+|B|.$$

Dimostrazione: Questa disuguaglianza è stata già dimostrata nel corso del biennio per i lati di un triangolo: la lunghezza della somma di due lati è sempre maggiore della lunghezza del terzo lato, basta considerare A e B due vettori applicati nello stesso punto e la disuguaglianza scritta nella tesi non è altro la relazione data sui lati del triangolo, trascritta per le lunghezze dei vettori. Ma possiamo anche dimostrare la tesi in almeno un altro paio di modi diversi [150] : scegliamo di ragionare direttamente sul significato del "valore assoluto". Evidentemente si ha

$$-|A| \leqslant A \leqslant |A| \quad \wedge \quad -|B| \leqslant B \leqslant |B|.$$

Sommando membro a membro le disuguaglianze si ottiene quindi:

$$-(|A|+|B|) \leqslant A+B \leqslant (|A|+|B|),$$

ovvero proprio:

$$|A+B| \leqslant |A|+|B|.$$

c.v.d.

LEMMA 4 (Unicità del limite). *Il limite, se esiste, è unico, ovvero se:*

$$\lim_{x \to Q} f(x) = l$$

dove Q *è "qualcosa", allora* l, *sia che sia finito, sia che sia infinito, è unico.*

Dimostrazione: Supponiamo che $f(x)$ tenda sia ad l che ad l', quando x tende da qualche parte e dimostriamo che questi due limiti coincidono. Allora, per definizione di limite, in corrispondenza di un intorno arbitrariamente piccolo $I_l(\epsilon)$ di l, deve esistere un intorno

---

[149] Che ricordiamo detta anche da un nostro ottimo docente universitario di Analisi Matematica: prof. Espedito De Pascale, a cui va la nostra riconoscenza per i tanti insegnamenti e l'incoraggiamento dato nel proseguire gli studi in Matematica.

[150] Molto interessante sarebbe far discendere la disuguaglianza triangolare da quella di Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky, ma non è ora il caso di divagare su questi argomenti.

$I_Q(\delta)$ di Q, tale che $f(x) \in I_l(\epsilon)$ per ogni $x \in I_Q(\delta)$. La stessa cosa dovrà essere vera se noi considerassimo intorni arbitrariamente piccoli di l' : quindi, per ogni intorno arbitrariamente piccolo $I_{l'}(\epsilon')$ di l', esiste un intorno $I_Q(\delta')$ di Q, tale che $f(x) \in I_{l'}(\epsilon')$ per ogni $x \in I_Q(\delta')$. Se noi consideriamo ora la differenza: $|l-l'|$ ed applichiamo la disuguaglianza triangolare dimostrata testé, otteniamo:

$$|l - l'| = |l - f(x) + f(x) - l'| \leqslant |l - f(x)| + |f(x) - l'|.$$

Queste due differenze, però, possono essere rese arbitrariamente piccole scegliendo un opportuno intorno di Q, che esiste per la definizione di limite appena ricordata, in particolare, scelti ϵ ed ϵ' arbitrariamente piccoli, noi abbiamo detto che si determinano due intorni “di raggio” δ e δ', rispettivamente, di Q tali che $f(x) \in I_l(\epsilon)$ e $f(x) \in I_{l'}(\epsilon')$, ovvero tali che $|f(x)-l| \leqslant \epsilon$ e $|f(x)-l'| \leqslant \epsilon'$, prendendo le x in tali intorni. Scegliendo $\bar{\delta} = \min(\delta, \delta')$, ovvero l'ampiezza più piccola per l'intorno di Q, allora entrambe le disuguaglianze risultano contemporaneamente verificate, ergo, posto $\bar{\epsilon} = \epsilon + \epsilon'$, sia ha che

$$|l - l'| \leqslant \bar{\epsilon}$$

per ogni $\bar{\epsilon}$ arbitrariamente piccolo assegnato [151] . Questo però significa che tra l ed l' non ci può essere alcuna “differenza positiva”, dovendo essa essere più piccola di ogni quantità arbitrariamente piccola, ovvero i due limiti l ed l' devono coincidere.

c.v.d.

LEMMA 5 (Permanenza del segno). *Se la funzione tende ad un limite* l, *per* $x \to Q$:

$$\lim_{x \to Q} f(x) = l$$

allora deve esistere un intorno completo di Q *tale che*

$$sgn(f(x)) = sgn(l).$$

Da notare che questo teorema significa che una funzione qualsiasi non può avere limite positivo se essa si mantiene negativa e, viceversa, non può avere limite negativo dove essa risulta positiva!

Dimostrazione: Per dimostrare il lemma basta considerare un intorno di l arbitrariamente piccolo: $I_l(\epsilon)$. Per definizione di limite esiste un intorno di Q, che indichiamo con $I_Q(\delta)$, tale che per ogni x in tale intorno si ha $f(x) \in I_l(\epsilon)$. Quest'ultima condizione significa anche: $|f(x) - l| \leqslant \epsilon$ per tutte le $x \in I_Q(\delta)$, ovvero $l - \epsilon \leqslant f(x) \leqslant l + \epsilon$.

[151] L'arbitrarietà della grandezza di $\bar{\epsilon}$ è dovuta dall'arbitraria piccolezza di ϵ ed ϵ'.

Questa relazione è vera *qualsiasi sia la grandezza scelta* per ϵ, quindi, in particolare, sarà vera anche per la scelta di $\epsilon = \frac{1}{2}|\,l\,|$. Ci sono solo due casi: se $l > 0$ si ha

$$l - \frac{1}{2}\,l \leqslant f(x) \leqslant l + \frac{1}{2}\,l$$

equivalentemente

$$\frac{1}{2}\,l \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2}\,l$$

in un intorno completo di Q, corrispondente all'intorno scelto di l di raggio $\frac{1}{2}|\,l\,|$. Ma l è supposta positiva e, pertanto, anche $f(x)$ risulterà positiva, essendo compreso tra due frazioni di l. D'altra parte, se $l < 0$ allora possiamo riscrivere la disuguaglianza di prima come:

$$l - \left(-\frac{1}{2}\,l\right) \leqslant f(x) \leqslant l + \left(-\frac{1}{2}\,l\right)$$

ovvero:

$$\frac{3}{2}\,l \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}\,l$$

che, per rendere ancor meglio l'idea, riscriviamo come:

$$-\frac{3}{2}\,|\,l\,| \leqslant f(x) \leqslant -\frac{1}{2}\,|\,l\,|$$

da cui capiamo subito che se x appartiene all'intorno $I_Q(\delta)$, trovato in corrispondenza dell'intorno $I_l\left(\frac{1}{2}|\,l\,|\right)$, la funzione $f(x)$ risulta anche essa negativa esattamente come il suo limite l.

c.v.d.

Potremmo dimostrare altri teoremi interessanti sui limiti, ma per il proseguo questi bastano, quindi ora siamo pronti a dimostrare i principali teoremi sulle funzioni continue.

Teorema 6 (Teorema di Bolzano). [152] *Una funzione* $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *che sia continua nell'intervallo* I *e tale per cui esistono due valori* $a, b \in I$ *per i quali* $f(a) \cdot f(b) < 0$, *deve ammettere almeno un valore* ξ, *interno all'intervallo* $(a, b,)$ *in cui si annulla, ovvero per il quale* $f(\xi) = 0$. *In altre parole, una funzione continua che assume valori di segni opposti agli estremi di un intervallo, deve necessariamente annullarsi in almeno un punto interno all'intervallo stesso.*

Dimostrazione: Senza ledere alla generalità della dimostrazione, supponiamo che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Consideriamo il punto medio dell'intervallo $I_0 = [a, b]$, dato da $\frac{a+b}{2}$. I casi sono due: o è

[152] Detto anche **Teorema dell'esistenza degli zeri.**

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, ed in questo caso non ci sarebbe proprio nulla da dimostrare, oppure la funzione, valutata in tale punto, è diversa da zero e quindi ha un segno. Se è $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ chiamiamo $a_1 = \frac{a+b}{2}$ e $b_1 = b$, se invece è $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, indichiamo con b_1 tale valore medio, $b_1 = \frac{a+b}{2}$ e rinominiamo a in a_1 : $a_1 = a$; poscia ricominciamo il discorso per il nuovo intervallo $I_1 = [a_1, b_1]$ generando così, possibilmente, un nuovo intervallo $I_2 = [a_2, b_2]$ ecc.... Ora, a meno che in uno dei punti medi che andremo a calcolare la funzione si annulli, ottenendo di fatto una dimostrazione dell'affermazione tramite questo *metodo di bisezione,* fermando questo procedimento iterativo ad un certo "passo", in linea di principio potremmo determinare un'infinità di **intervalli inscatolati,** ovvero tali che $I_{k+1} \subset I_k$ e, in particolare, potremmo ottenere due successioni di valori, a_n e b_n, che sono entrambe monotòne e limitate. Infatti la successione a_n è non decrescente e limitata da un qualsiasi valore della successione [153] b_n, mentre quest'altra successione b_n, è non crescente e limitata da un qualsiasi valore della successione a_n. Per il teorema fondamentale della successioni monotòne esse sono entrambe convergenti: quindi $a_n \to a$ e $b_n \to b$. Ma dato che la "lunghezza" dell'intervallo I_n è data proprio da $|\, I_n \,| = b_n - a_n$ e, per altro:

$$|\, I_n \,| = \frac{1}{2} \,|\, I_{n-1} \,| = \cdots = \frac{1}{2^n}\, I_0$$

allora per $n \to \infty$

$$b_n - a_n \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b - a \to 0$$

e da questo deduciamo che le due successioni a_n e b_n convergono ad un limite comune che indichiamo con $\xi = a = b$. Ora dimostreremo che in ξ la funzione si deve annullare! all'uopo consideriamo il *teorema della permanenza del segno:* dato che $f(a_k) < 0$ per ogni valore di k allora il limite della successione di tali valori non può essere positivo; d'altra parte per ogni indice k, si ha anche $f(b_k) > 0$ e quindi il limite della successione di tali valori non può essere negativo. Dato che il limite comune [154] delle due successioni di valori $f(a_n)$ e $f(b_n)$ è proprio $f(\xi)$, che non può assumere valore né negativo, né positivo, allora $f(\xi) = 0$.

c.v.d.

[153]Perché?

[154]Dimostrare questo per esercizio: "Se una funzione è continua, allora il limite della successione dei valori della funzione, ottenuta applicando la funzione su una successione convergente, è uguale alla funzione applicata al limite della successione stessa" ovvero "l'operazione di limite è interscambiabile con quello di funzione": $\lim f(a_n) = f(\lim a_n)$, come si dice in gergo: "La continuità preserva i limiti di successione".

Teorema 7 (Teorema di Bolzano-Cauchy). [155] *Sia* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua sull'intervallo* I *e siano* $a, b \in I$ *con* $a < b$ *e* $f(a) < f(b)$. *Allora, dato un qualsiasi valore* $y_0 \in (f(a), f(b))$ *esiste* $c \in (a, b) : f(c) = y_0$. *In altre parole, una funzione continua "trasforma" intervalli di* $\mathbb{R}$ *in invervalli di* $\mathbb{R}$, *dato che si potrebbe riscrivere l'affermazione del teorema, in modo equivalente,* $f(I) = J$ *dove sia* I *che* J *sono entrambi intervalli di* $\mathbb{R}$.

Dimostrazione: Questo teorema lo dimostriamo come *corollario* del Teorema di Bolzano dimostrato testé. Consideriamo la funzione

$$g(x) = f(x) - y_0$$

con $x \in [a, b]$: essa è continua e soddisfa alle ipotesi del teorema di Bolzano, infatti $f(a) - y_0 < 0$ e $f(b) - y_0 > 0$. Pertanto deve esistere un valore $\xi \in (a, b)$ tale per cui $g(\xi) = 0$ e da questo, rinominando $c = \xi$ si ottiene proprio $f(c) = y_0$.

c.v.d.

Teorema 8 (Teorema di Weierstrass). *Una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato* [156] *deve avere un punto di minimo ed uno di massimo nell'intervallo considerato.*

Dimostrazione: Senza ledere alla generalità della dimostrazione, trattiamo il caso del "massimo", essendo il ragionamento, per dimostrare che $f(x)$ raggiunge il valore minimo nell'intervallo, del tutto analogo. Pertanto vogliamo dimostrare che $f(x)$ raggiunge il suo valore massimo nell'intervallo $[a, b]$ precedentemente fissato. Iniziamo col chiamare S l'estremo superiore dei valori di $f(x)$, quando x varia in $[a, b]$:

$$S = \sup_{[a,b]}(f).$$

In linea di principio S potrebbe anche non esistere, ovvero la funzione potrebbe non essere limitata superiormente. Noi dimostreremo che non solo esiste, ma che esso viene raggiunto in un punto dell'intervallo dato e, quindi, essendo anche uno dei valori assunti da $f(x)$, esso rappresenta il valore massimo [157] . Come fatto per dimostrare il teorema di Bolzano, bisechiamo l'intervallo di partenza $I_0 = [a, b]$ generando,

[155] Detto anche **Teorema dei valori intermedi** .

[156] Un intervallo chiuso e limitato si chiama anche **compatto** dato che si può dimostrare che i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che soddisfano la definizione "topologica" di compattezza -per la cronaca: "tali che ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito" - sono solo gli intervalli chiusi e limitati.

[157] Ricordiamo che il valore massimo di un insieme è il suo estremo superiore, quando esso appartiene all'insieme stesso.

tramite il punto medio $m_1 = \frac{a+b}{2}$, due intervalli (di uguale lunghezza): $[a, m_1]$ e $[m_1, b]$. Ora, S deve stare in corrispondenza di uno dei due intervalli, che indicheremo con I_1. A questo punto, dimezziamo I_1 e con ragionamento analogo troviamo I_2, poi I_3, ecc... creando, in tal modo, una successione di **intervalli inscatolati,** la cui grandezza tende a zero. Consideriamo allora l'intersezione di tutti questi infiniti intervalli inscatolati: essa individua un punto $c \in [a, b]$ che, tra l'altro, corrisponde al limite, per $n \to \infty$, di I_n. Per la supposta continuità di $f(x)$ sull'intervallo $[a, b]$ e, quindi, in particolare nel punto c, possiamo affermare che, fissato un intorno arbitrariamente piccolo di $f(c)$, che chiamiamo $I_{f(c)}(\epsilon)$, esiste un intorno di c, che indichiamo con $I_c(\delta)$, per il quale $f(x) \in I_{f(c)}(\epsilon)$ per ogni $x \in I_c(\delta)$. Dato che I_n "definitivamente" appartiene all'intorno $I_c(\delta)$, dato che c rappresenta il limite della successione degli intervalli inscatolati [158] , allora possiamo asserire che $S \leqslant f(c) + \epsilon$, dovendo $f(x)$ essere in $I_{f(c)}(\epsilon)$ se $x \in I_c(\delta)$. Questo significa, innanzitutto, che $f(x)$ è limitata, dato che $f(c) + \epsilon$ è un valore finito "maggiorante" dell'estremo superiore dei valori di $f(x)$ in $[a, b]$. Ma dato che $f(c) \leqslant S$, per definizione di S, allora

$$f(c) \leqslant S \leqslant f(c) + \epsilon.$$

Ne deduciamo, data l'arbitraria piccolezza di ϵ, che

$$S = f(c),$$

ovvero che il valore massimo è raggiunto proprio nel punto c.

c.v.d.

Questo ultimo teorema sarà di fondamentale importanza per quanto diremo nella prossima sezione, dedicata ai teoremi sulle funzioni che ammettono derivata o, come si dice, differenziabili. Il metodo di bisezione, per altro, è un primo strumento, che permette di determinare approssimazioni numeriche di soluzioni di equazioni che non si potrebbero risolvere altrimenti: infatti "a furia di bisecare" ci si avvicina ad una soluzione ragionevole dell'equazione data [159]

[158] E si ricordi che S lo stiamo supponendo interno a tutti questi intervalli I_n.

[159] Dedicheremo un capitolo, probabilmente nel terzo volume di questa opera, ai metodi numerici di risoluzione delle equazioni ed ad altri metodi appartenenti all'area dell'*Analisi Numerica* che, dopo l'avvento e la diffusione dei calcolatori, è diventata una branca molto viva ed importante di tutta la Matematica, specialmente Applicata, ma anche Teorica.

11. I Teoremi sulle funzioni differenziabili

La caratteristica di differenziabilità dona alle funzioni ulteriori proprietà, che si aggiungono a quelle della continuità: infatti è facile dimostrare che una ***funzione differenziabile deve essere per forza continua,*** mentre il viceversa non è una affermazione vera, come si è visto "classificando" i punti di singolarità, ove le funzioni sono continue, ma le loro derivate prime no. Supponiamo che $f(x)$ sia differenziabile, ovvero che abbia derivata prima finita in ogni punto del suo dominio, allora possiamo dire che il suo differenziale approssima gli incrementi, per come ampiamente discusso in questo stesso capitolo:

$$\Delta f(x) \approx \mathrm{d}\, f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Ora, per $x \to x_0$ il secondo membro di questa approssimazione tende a zero e quindi l'incremento $f(x) - f(x_0)$ tende ad annullarsi: possiamo quindi scrivere che:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

la quale (scrittura) afferma esattamente la continuità di $f(x)$ nel punto x_0. Evidentemente x_0 può essere un qualsiasi punto dove si possa calcolare la derivata prima della funzione, quindi l'affermazione iniziale è del tutto generica e non dipende dalla particolare scelta di x_0 nel dominio della funzione.
I principali teoremi del calcolo differenziale sono legati ai nomi di Fermat, Rolle, Lagrange e Cauchy. Altri risultati [160] sono ascrivibili a De l'Hopital che, a quanto pare, apprese il teorema, che oggi porta il suo nome, dal suo precettore privato Johann Bernoulli.

Teorema 9 (Teorema di Fermat). *In un punto di massimo o minimo regolare della funzione* $f(x)$, *la derivata prima si deve annullare.*

Dimostrazione: Senza ledere alla generalità della dimostrazione, vediamo che in un punto di massimo regolare la derivata è nulla: un ragionamento analogo dimostrare che lo stesso deve essere vero per i punti di minimo regolare. Pertanto supponiamo che in x_0 ci sia un punto di massimo regolare e consideriamo il rapporto incrementale, che definisce la derivata nel punto x_0 : $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Osserviamo che il numeratore *deve essere negativo,* dato che, "localmente", il valore della funzione in x_0 è il maggiore tra tutti quelli nell'intorno. Quindi,

[160] Che noi, personalmente, consideriamo **minori** e dimostreremo solo per completezza del testo.

se consideriamo l'incremento h positivo ed infinitesimo, si ha:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0.$$

Ma questa stessa derivata la si ottiene anche per incrementi h infinitesimi negativi, ovvero:

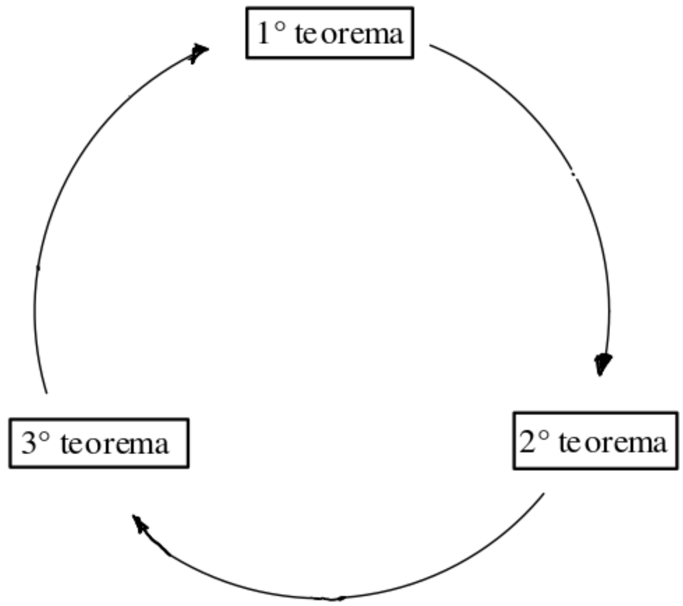
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0.$$

Ergo, $f'(x_0)$, dovendo essere contemporaneamente "maggiore o uguale" e "minore o uguale" a zero, è proprio zero.

c.v.d.

Osserviamo il fatto che geometricamente il teorema lo interpretiamo -e già lo avevamo dato per "scontato"- che la retta tangente, nei punti di massimo o minimo regolari, deve posizionarsi orizzontalmente. I punti che annullano la derivata prima si definiscono anche **punti critici** o **stazionari** e tra essi vanno ricercati i punti estremanti, ovveri quelli di massimo o minimo regolare. Bisogna stare attenti che essere punto critico non garantisce che al punto corrisponda sempre un punto estremo (locale) della funzione: come sappiamo, anche i punti di flesso a tangente orizzontale annullano la derivata prima! si può dire, quindi, che: "la criticità è una condizione necessaria ma non sufficiente alla estremalità".

I seguenti tre teoremi sono logicamente equivalenti l'un l'altro, ovvero se uno di essi è vero, allora devono essere veri anche gli altri due! Per vedere questo, in generale, si parte con il dimostrare uno di essi, dal quale si ottiene, come corollario un secondo e da quest'ultimo, il rimanente teorema: poi si dimostra che dall'ultimo teorema dimostrato, segue il primo e si completa l'equivalenza, per via dell'implicazione circolare delle affermazioni. Si può partire con il dimostrare uno qualsiasi dei tre teoremi e noi sceglieremo la "via classica", ovvero dimostreremo il Teorema di Rolle; da esso faremo seguire il Teorema di Lagrange e, in ultimo, dimostreremo il Teorema di Cauchy, ma non avendo l'esigenza di dimostrarne l'equivalenza logica e, sopratutto, volendoci soffermare sul Teorema di Lagrange, che riteniamo -dei tre- il più utile e pregno di significato, non completeremo il ciclo di implicazioni.



Tutt'e tre i teoremi condividono le stesse ipotesi iniziali che, pertanto, scriveremo una sola volta e le richiameremo come "ipotesi Rolle-Lagrange-Cauchy" - **Hp R.L.C.**: *Deve essere* $f(x)$ *una funzione continua in* $[a, b]$ *e derivabile in* (a, b), ovvero si deve supporre che la funzione sia continua in tutto l'intervallo chiuso e limitato e derivabile al suo interno.

TEOREMA 10 (Teorema di Rolle). *Nelle* ***Hp R.L.C.***

$$\textit{se } f(a) = f(b) \quad \Longrightarrow \quad \exists\, \xi \in (a, b) \,:\, f'(\xi) = 0.$$

[161]

Dimostrazione: Se $f(x)$ è costante non ci sarebbe proprio nulla da dimostrare infatti, in tal eventualità, $\forall\, x \in [a, b]$, $f'(x) = 0$; se $f(x)$ non è costante, allora o il massimo o il minimo [162] , che esistono in virtù del teorema di Weierstrass, deve stare internamente all'intervallo (a, b) : infatti, se $f(a)$ e $f(b)$ fossero l'uno il massimo e l'altro il minimo (o viceversa), la funzione sarebbe "appiattita" ad un valore costante in virtù dell'ipotesi $f(a) = f(b)$. Quindi, in un caso o nell'altro,

[161] Osserviamo che si richiede la continuità su tutto l'intervallo $[a, b]$, estremi inclusi, dato che $f(x)$ deve potersi calcolare anche negli estremi dell'intervallo e perché si vuole che valga il *Teorema di Weierstrass*. Inoltre la funzione è richiesta avere derivata in tutti i punti interni all'intervallo, dato che la tesi afferma che in un punto interno ad (a, b) la derivata si annulla, ma non dice quale sia questo punto: quindi bisogna essere sicuri che la derivata si possa sempre calcolare!

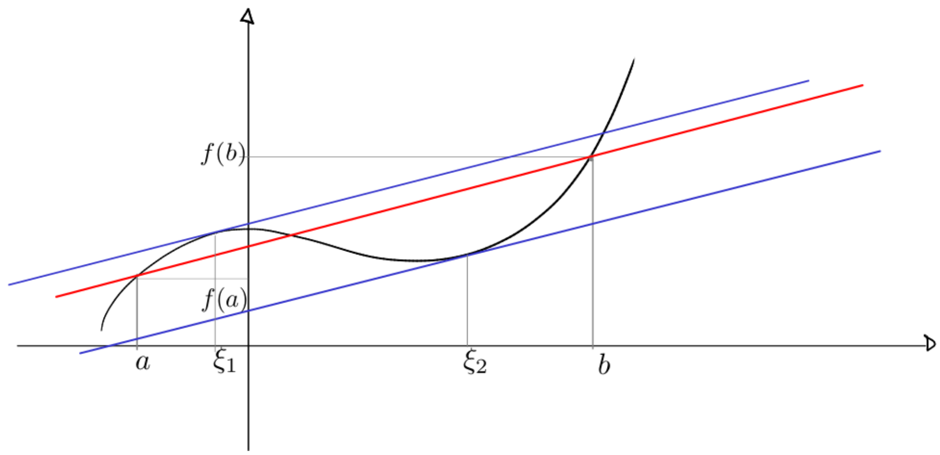
[162] O entrambi... insomma, almeno un punto tra il massimo ed il minimo locale deve stare dentro all'intervallo dato!

per il teorema di Fermat [163] , in quel punto la derivata si deve annullare e questo basta per dimostrare la tesi.

c.v.d.

TEOREMA 11 (Teorema di Lagrange). *Nelle* ***Hp R.L.C.***

$$\exists\, \xi \in (a, b) \;:\; f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



La retta r, passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, ha pendenza data da $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Il teorema di Lagrange afferma che esiste (almeno) un punto dentro (a, b) in cui la retta tangente risulta parallela alla retta r : ovvero $m_{\tan} = m$. Questo è anche abbastanza ragionevole: traslando "parallelamente" la retta r verso il basso o verso l'altro, essa incontrerà il grafico della funzione fino ad un punto "estremo", di tangenza, oltre il quale non ci saranno più punti di intersezione tra retta e "curva", all'interno di quell'intervallo considerato.

Dimostrazione: Visto che le ipotesi sono quelle del teorema di Rolle, andremo a definire una funzione $F(x)$ la cui derivata coincide con:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e negli estremi dell'intervallo $[a, b]$ assume valori uguali: così facendo, la dimostrazione seguirebbe immediatamente dal teorema di Rolle. "Manipoliamo" un po' la scrittura precedente:

$$f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \longrightarrow \frac{f'(x) \cdot (b - a) - [f(b) - f(a)]}{b - a}$$

[163] Dato che stiamo supponendo la funzione "regolare" in (a, b)

se deve essere $f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ allora lo stesso dovrà accadere per il numeratore della frazione di prima:

$$f'(x) \cdot (b-a) - [f(b) - f(a)] = 0.$$

Ora osserviamo che $f'(x)$ si ottiene derivando $f(x)$ mentre $f(b) - f(a)$ si può ottenere derivando $[f(b) - f(a)] \cdot x$; ricordiamo, inoltre, che le derivate delle costanti sono nulle. Proviamo, pertanto, a definire:

$$F(x) = [f(x) - f(a)] \cdot (b-a) - [f(b) - f(a)] \cdot (x-a).$$

Si osserva immediatamente che $F(a) = 0$ e:

$$F(b) = \underbrace{[f(b) - f(a)] \cdot (b-a)} - \underbrace{[f(b) - f(a)] \cdot (b-a)} = 0$$

ovvero:

$$F(a) = F(b)$$

ed inoltre, essendo essa definita solo tramite $f(x)$ e x (come loro combinazione lineare), le proprietà di $f(x)$ vengono "lasciate in eredità" [164] a $F(x)$: possiamo quindi applicare il teorema di Rolle ed affermare che:

$$\exists\, \xi \in (a, b) \;:\; F'(\xi) = 0$$

ma

$$F'(\xi) = f'(\xi) \cdot (b-a) - [f(b) - f(a)]$$

da cui

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

c.v.d.

Teorema 12 (Teorema di Cauchy). [165] *Siano f e g due funzioni per le quali valgono le* ***Hp R.L.C.*** *e supponiamo $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$. In tali ipotesi*

$$\exists\, \xi \in (a.b) \;:\; \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Dimostrazione: Il trucco è trovare una funzione definita tramite $f(x)$ e $g(x)$, che si annulli agli estremi dell'intervallo: sulla falsariga della dimostrazione del teorema di Lagrange, proviamo a definire:

$$F(x) = [f(b) - f(a)] \cdot g(x) - [g(b) - g(a)] \cdot f(x).$$

[164] Nel senso che per $f(x)$ valgono le **Hp R.L.C.** e quindi anche per $F(x)$ valgono le stesse ipotesi.

[165] Detto anche **degli incrementi finiti**

Dobbiamo solo verificare che $F(a) = F(b)$, dato che le proprietà di $f(x)$ e $g(x)$ si trasferiscono in eredità a $F(x)$. Nei fatti si ha:

$$F(a) = f(b)g(a) - \cancel{f(a)g(a)} - g(b)f(a) + \cancel{g(a)f(a)}$$

e

$$F(b) = \cancel{f(b)g(b)} - f(a)g(b) - \cancel{g(b)f(b)} + g(a)f(b),$$

da cui la desiderata uguaglianza:

$$F(a) = F(b).$$

Per il teorema di Rolle, quindi, afferminamo che:

$$\exists\, \xi \in (a, b) \; : \; F'(\xi) = 0$$

ma

$$F'(\xi) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(\xi) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(\xi)$$

quindi si ha:

$$[f(b) - f(a)] \cdot g'(\xi) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(\xi)$$

da cui la tesi:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

c.v.d.

Dal teorema di Cauchy deriva in modo abbastanza "banale" il seguente teorema "attribuito" a de L'Hopital.

TEOREMA 13 (Teorema di "de L'Hopital"). *Siano* $f(x)$ *e* $g(x)$ *due funzioni derivabili in un intorno di* x_0, *tali che:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Se in un intorno di x_0 *sia* $g(x)$ *che* $g'(x)$ *sono diverse da zero* [166] *allora:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

[167]

[166] Spesso si applica questo teorema senza controllare che le ipotesi di partenza siano rispettate!

[167] Analoghe affermazioni sono vere nel caso $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ ed anche nel caso $x \to x_0$ sia sostituito con $x \to \infty$.

Dimostrazione: Nelle ipotesi di questo teorema, dato che $f'(x)$ e $g'(x)$ esistono in un intorno di x_0, ivi le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono continue: questo signica che $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Allora possiamo scrivere che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

c.v.d.

Osserviamo che è pericoloso utilizzare il Teorema di "de L'Hopital" a *testa bassa,* senza verificare che le ipotesi di applicabilità siano verificate e, soprattutto, pensando che "a furia di derivare" si possono risolvere i più complicati limiti, riducendoli sempre a forme più semplici: in verità non è così, anzi i seguenti esempi fanno capire esattamente il contrario, ovvero, tramite equivalenze, si ottengono velocemente i valori dei limiti, con l'applicazione ottusa ed a raffica del teorema di de L'Hopital, non si perviene ad alcun risultato ma, addirittura, si complicano, in modo esasperante, i calcoli.

Esempio: Trovare il valore del limite:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\cos(x)}{x+\sin(x)}$$

Soluzione: Tramite equivalenze asintotiche si ottiene immediatamente:

$$L \sim \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

Provando con il "rapporto delle derivate" (tentando stupidamente di applicare il teorema di "de L'Hopital") si ottiene:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}$$

che *non esiste!*

□

Esempio: Determinare il valore del limite:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x\,\tan(x)}{\ln(1+3x^2)}.$$

Soluzione: Tramite equivalenze è di calcolo immediato:

$$L \sim \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3\,x^2} = \frac{1}{3}.$$

Volendo utilizzare il rapporto delle derivate, ancora una volta "fissandosi ottusamente" sulla (non verificata) efficienza del teorema di de L'Hopital, si ottiene, per il numeratore:

$$D(x\tan(x)) = \tan(x) + x \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\sin(x)\cos(x) + x}{\cos^2(x)}$$

e per il denominatore:

$$D(\ln(1+3x^2)) = \frac{1}{1+3x^2} \cdot 6x = \frac{6x}{1+3x^2}.$$

Quindi il limite del rapporto tra le derivate è:

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\sin(x)\cos(x) + x] \cdot (1+3x^2)}{\cos^2(x) \cdot 6x}$$

che, a parte essere oggettivamente più brutto del limite di partenza, ancora è della "forma indeterminata $\frac{0}{0}$". Dovremmo pertanto ricorrere nuovamente al rapporto tra le derivate del numeratore e del denominatore, nella speranza che il limite, che si troverà, non sia ancora in forma indeterminata. In effetti si troverebbe quest'altro limite [168] :

$$\lim_{x\to 0} \frac{(6x^2+2)\cdot\cos^2(x) + 6x\cdot\sin(x)\cos(x) + 6x^2}{6\cos^2(x) - 12x\cdot\sin(x)\cos(x)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

che, "per fortuna"! riesce a darci già ora il valore del limite che noi, all'inizio, avevamo calcolato "molto elegantemente" con un unico passaggio (ad occhio, in verità). Siete disposti ad affrontare calcoli simili o peggiori, nella speranza di arrivare ad un risultato che si potrebbe ottenere più velocemente, senza utilizzare ripetutamente, come esseri decerebrati, il teorema di de L'Hopital?

□

12. Una questione lasciata in sospeso

Dopo tanti argomenti, possiamo chiudere il capitolo con il problema lasciato in sospeso sul *controllo dell'errore* nell'utilizzo dell'approssimazione polinomiale di Taylor/MacLaurin. In 5.2 , a pagina 286 , abbiamo

[168]Ci rifiutiamo di calcolare effettivamente le due derivate e metterle a rapporto: ci siamo fatti aiutare da un programma di calcolo simbolico

affermato che "[...] se $f(x) - P_n(x)$ è differenziabile, allora, soddisfacendo le ipotesi del Teorema di Lagrange, esiste un punto ξ tra x_0 e x per il quale:

$$\boxed{E_{n+1}(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}.$$

Vogliamo ora dimostrare la formula nel riquadro. A tal fine consideriamo la differenza tra la funzione ed il polinomio di Taylor di grado n, che, poi, non è altro l'errore commesso nella sostituizione della funzione con il polinomio:

$$E(x) \;=\; f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k.$$

Osserviamo che:

$$E(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0,$$

così come la sua derivata prima, valutata in x_0, è uguale a zero, infatti:

$$E'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

Continuando con le derivazioni, si può osservare che **per tutti gli ordini di derivazione**:

$$E^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0) = 0.$$

La prima derivata, successiva alla prima, che non si annulla sicuramente in x_0 è la $n+1$-esima:

$$E^{(n+1)}(x_0) = f^{(n+1)}(x_0) - 0 = f^{(n+1)}(x_0).$$

D'altra parte $(x{-}x_0)^{n+1}$ ha la sua derivata $n{+}1$-esima che non dipende da x_0 e vale

$$D^{n+1}\left[(x-x_0)^{n+1}\right] = (n+1)!.$$

Chiamiamo per comodità $g(x) = (x-x_0)^{n+1}$ ed applichiamo il teorema di Cauchy alla coppia di funzioni $E(x)$ e $g(x)$: dato che queste soddisfano alle **Hp R.L.C.** ed alle ipotesi aggiuntive del teorema di Cauchy, allora possiamo dire che esiste $\xi_1 \in (x_0, x)$ tale per cui:

$$\frac{E(x) - E(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{E'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}.$$

Ma i sottraendi sono entrambi nulli, per cui concludiamo:

$$\frac{E(x)}{g(x)} = \frac{E'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}.$$

Possiamo reiterare il procedimento, dato che anche le funzioni $E'(x)$ e $g'(x)$ soddisfano alle ipotesi del teorema di Cauchy, per cui, dato che ancora una volta si ha $E'(x_0) = g'(x_0) = 0$, deve esistere un $\xi_2 \in (x_0, \xi_1)$ tale per cui:

$$\frac{E'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{E''(\xi_2)}{g''(\xi_2)}$$

e così via fino all'n-esima derivata per la quale, successivamente, si otterrebbe l'uguaglianza:

$$\frac{E^{(n)}(\xi_n)}{g^{(n)}(\xi_n)} = \frac{E^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{g^{(n+1)}(\xi_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}.$$

Si osservi che $x_0 < \xi_{n+1} < \xi_n < \cdots < \xi_1 < x$ e, considerando l'uguaglianza tra tutti questi rapporti, soffermandoci solo sul primo e l'ultimo, possiamo scrivere:

$$\frac{E(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}.$$

Sostituendo a $g(x)$ la quantità che essa rappresenta, chiamando $\xi_{n+1} = \xi \in (x_0, x)$ ed "esplicitando" l'errore $E(x)$, aggiungendo il pedice indicante il monomio di grado massimo, a cui ci si è fermati, nell'approssimazione polinomiale, otteniamo:

$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad E_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}$$

c.v.d.

CAPITOLO 11

Serie numeriche ed Integrali

Sia data una successione a_n e sommiamone tutti i termini:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

evidentemente questa somma non può essere effettivamente trovata, non avendo abbastanza tempo -in tutta la nostra vita- per sommare un numero infinito di termini! Quindi trovare una somma di infiniti termini, almeno per ora, sembra un problema privo di senso: urge, allora, trovare un metodo e, soprattutto, dare una interpretazione alla somma di un'infinità di termini, ovvero dire cosa potrebbe rappresentare, effettivamente e indubbiamente, la scrittura: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. L'idea utile è di considerare le *somme finite* che, al contrario del caso precedente di un'infinità di termini, hanno senso e si possono calcolare, seppur ci volesse tanto tempo e, poi, far tendere all'infinito il numero degli addendi considerati. Per fare questo associamo alla successione di partenza un'altra, detta **successione delle somme parziali,** definita come segue:

$$\mathbf{s_1} = a_1,\ \mathbf{s_2} = a_1 + a_2,\ \mathbf{s_3} = a_1 + a_2 + a_3, \cdots$$

$$\mathbf{s_4} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \cdots,\ \mathbf{s_n} = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ \cdots$$

Come successione essa può avere limite finito, divergere all'infinito oppure essere indeterminata. Nel primo caso, diremo che la somma degli infiniti termini della successione, detta **serie,** converge ed il limite trovato indicherà il valore della *somma degli infiniti termini* della successione; nel secondo caso si dirà che serie diverge e nel terzo caso, che è indeterminata:

$$\text{Se } s_n \to s < \infty, \text{ allora } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s, \text{ (la serie converge, con somma } s).$$

$$\text{Se } s_n \to (\mp)\,\infty, \text{ allora } \sum_{n=1}^{\infty} a_n > \infty \quad \text{(la serie diverge).}$$

$$\text{Se } s_n \text{ non ha limite, allora } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ è indeterminata.}$$

Avvisiamo subito che, determinare il limite della successione delle somme parziali, è spesso una impresa ardua: ci si accontenta di stabilire, almeno, se la serie è convergente, divergente o indeterminata. Studiare il *carattere di una serie* significa appunto solo questo: stabilire se ha somma finita, diverge oppure è indeterminata. Per studiare le serie, dato che -in fondo- esse sono limiti di successioni, possiamo avvalerci di quanto visto ed appreso durante lo studio di questi ultimi. In particolare ricordiamo che $a_n \sim b_n$ se il limite del loro rapporto è uno. Se due successioni sono simili, anche il comportamento delle serie ad esse associate deve essere identico, ovvero, se $\sum a_n$ converge, anche $\sum b_n$ converge; se una delle due diverge, anche l'altra lo farà e, chiaramente, se una è indeterminata, lo sarà anche l'altra [1] . Questo non significa che, ad esempio, se una converge ad un certo valore n, anche l'altra convergerà allo stesso identico valore n : la somma, evidentemente, se si "sopprimono" quantità irrilevanti all'infinito, o le si cambiano con altre, non potrà coincidere con quella che dovrebbe essere lasciando i termini iniziali! quello che però non può cambiare è il carattere, ovvero di essere convergente. Altra utile osservazione è che sopprimere finitamente molti termini non può cambiare il carattere di una serie ma, al più, modificarne la somma, qualora essa dovesse risultare convergente. Inoltre, una condizione necessaria per la convergenza di una serie, è che il termine generico a_n risulti infinitesimo. Infatti, considerando s_n e s_{n-1}, qualora la serie risultasse convergente con somma s, si avrebbe:

$$s_n - s_{n-1} = a_n \,, \text{ d'altra parte: } \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$$

da cui la tesi affermata precedentemente.

Esempio: La serie seguente non può essere convergente (e nemmeno essere indeterminata):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n-5}$$

Infatti

$$a_n = \frac{2n+1}{3n-5} \sim \frac{2n}{3n} \to \frac{2}{3} \neq 0.$$

D'altra parte i termini della successione a_n sono definitivamente positivi e, pertanto, la successione delle somme parziali risulta monotòna

[1] Qualcuno chiama questa osservazione **principio del confronto asintotico.**

crescente: ergo essa diventa più grande di una qualsiasi quantità arbitrariamente grande, non essendo superiormente limitata da nulla. Questo significa che la serie è divergente.

□

Vogliamo enfatizzare questa ultima affermazione, espressa nell'esempio di cui prima: se una serie è formata da termini definitivamente positivi, essa o converge o diverge: di certo non potrà mai essere indeterminata! Limitiamo la nostra attenzione, per ora, alle serie a termini positivi o, almeno, definitivamente positivi.

1. Serie a termini (definitivamente) positivi

Per operare con le serie in modo semplice, ma efficace, osserviamo preliminarmente che se una serie è *dominata* [2] da un'altra convergente, allora deve convergere, se invece essa diverge, allora anche la sua dominante lo farà "a fortiori". Ovvero, in formule:

$$\text{Sia } \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ allora: } \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n > \infty \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n > \infty \end{cases}$$

[3] . Serve, a questo punto, determinare qualche *serie di carattere noto,* in modo da poter operare i confronti con le serie che potremmo dover studiare. La prima serie che presentiamo, di cui si conosce il carattere, è la **serie geometrica:** essa deriva il suo nome dalla caratteristica della successione di cui si sommano i termini, essendo dati in *progressione geometrica.* Ricordiamo che nel capitolo 8, sezione 2 , a pagina 167 , abbiamo determinato la somma dei primi n termini di una progressione geometrica di ragione q; essa rappresenta il termine generico della successione delle somme parziali ed è data da:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}$$

Evidentemente, se $|q| < 1$ il numeratore della frazione tende ad 1 e quindi la serie converge, altrimenti diverge [4] . Osserviamo che una P.G. è data, partendo dal primo termine a_1, con la ragione q,

$$a_1,\, a_2 = a_1 \cdot q,\, a_3 = a_1 \cdot q^2, \cdots$$

[2] Ovvero è minore di una altra serie, che chiamiamo "la dominante".

[3] Questa osservazione, qualche autore lo denomina **criterio del confronto**

[4] Le serie geometriche sono tra le poche di cui si riesce a calcolare anche il valore, proprio grazie alla formula riportata nel riquadro! le altre, che incontreremo tra poco, sono le **serie telescopiche.**

pertanto la somma di tutti i suoi termine è

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; = a_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

trascurando il primo fattore a_1, che comunque si "semplificherebbe" con il rispettivo primo fattore nel secondo membro, si ottiene quindi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ \infty & \text{se } |q| \geqslant 1 \end{cases}$$

[5] Questa serie, $\sum q^n$, si chiama **serie geometrica** e, ribadiamo, risulta convergente per $|q| < 1$ e divergente negli altri casi.

Esempio: Studiare la convergenza di:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^{2n} - 4\cos(n^n)}{10^n - \log(3 + 10n^2) + n^{10}}$$

Soluzione: Il termine generico a_n equivale, all'infinito, a

$$a_n \sim \frac{3^{2n}}{10^n} = \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

pertanto la serie iniziale si comporta come $\sum \left(\frac{9}{10}\right)^n$ che è convergente essendo una *serie geometrica di ragione* $\frac{9}{10} < 1$.

□

Esempio: Determinare se la serie è convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

Soluzione: Osserviamo che *definitivamente* $n^n > 2^n$ ergo $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}$. Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \; < \infty$$

quest'ultima essendo convergente, dato che la identifichiamo come una serie geometrica di ragione minore di uno.

□

[5] Si osservi che per $q = 1$ la serie corrisponde a $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ ovvero è la somma di un'infinità di uno.

Presentiamo ora un'altra famiglia di serie a carattere noto: le serie armoniche (generalizzate). Si chiama **serie armonica** quella ottenuta sommando i reciproci dei numeri naturali a partire da 1. Per **serie armoniche generalizzate** si intendono quelle che si ottengono sommando i reciproci delle potenze dei numeri naturali, sempre a partire da 1.

PROPOSIZIONE 14. *La serie armonica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge* [6] .

Dimostrazione: Consideriamo la somma di un po' di termini e usiamo un trucco di immediata comprensione [7] :

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}+\cdots$$

se sostituiamo alle frazioni che precedono, l'ultima presente sotto ogni raggruppamento, evidentemente la somma "diminuisce", infatti, ad esempio, $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, così come tutte le frazioni da $\frac{1}{5}$ fino a $\frac{1}{7}$ sono minori di $\frac{1}{8}$ ecc... quindi la somma di prima è maggiore di quest'altra:

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}+\cdots$$

che possiamo riscrivere come:

$$1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{16}+\cdots = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2} > \infty.$$

In definitiva abbiamo ottenuto questo risultato:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} > 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2} > \infty$$

da cui la tesi.

c.v.d.

Consideriamo un *primo esempio* di **serie telescopica:** la **serie di Mengoli,** definita come $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)}$. Una serie si definisce telescopica se il suo termine generico a_n si può riscrivere come differenza tra due termini consecutivi di qualche successione:

$$a_n = b_{k+1} - b_k.$$

[6]Si noti che il termine generico è infinitesimo ma la serie risulta divergente: questo è il primo controesempio che dimostra come la condizione del termine generico tendente a zero sia necessaria ma non sufficiente per la convergenza della serie.

[7]Dopo aver scritto i termini si vede facilmente, sennò non è così comprensibile!

La grande meraviglia delle serie telescopiche è che se si iniziano a sommare i termini, si annullano tutti a due a due, tranne il primo e l'ultimo ottenuto per $n \to \infty$. Infatti si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \cancel{b_2} - b_1 + \cancel{b_3} - \cancel{b_2} + \cancel{b_4} - \cancel{b_3} + \cancel{\cdots} + b_k - \cancel{b_{k-1}} = b_k - b_1$$

e per $n \to \infty$, ovvero per $k \to \infty$ si ottiene [8] :

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \left(\lim_{k\to\infty} b_k\right) - b_1$$

Proposizione 15. *La seri di Mengoli è convergente (ad 1):*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1$$

Dimostrazione: Osserviamo che:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Quindi la serie risulta telescopica e la sua somma è data da:

$$1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\cdots} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} + \cdots = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1$$

c.v.d.

Corollario 1. *Le serie armoniche generalizzate, con "parametro" maggiore di due, sono convergenti:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}, \quad k > 2, \quad \textit{sono convergenti.}$$

Dimostrazione: Definitivamente si ha $n^k \geqslant n^2$ per $k \geqslant 2$. Quindi anche:

$$\frac{1}{n^k} \leqslant \frac{1}{n^2} \quad \text{se} \quad k \geqslant 2.$$

Ma la serie di Mengoli equivale, asintoticamente, alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ e quindi hanno la stessa caratteristica: convergono entrambe! e questo basta.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \infty \quad \text{se} \quad k \geqslant 2.$$

c.v.d.

[8]Da questo risultato si capisce anche perché delle serie telescopiche si riesca anche a conoscere la somma.

Ora siamo nella condizione di dire che le serie armoniche con parametro [9] maggiore o uguale a due, sono tutte convergenti. D'altra parte, quelle con paramentro minore o uguale ad uno sono tutte divergenti. Rimane da vedere come si comportano le serie armoniche con parametro tra uno e due. Per determinare il comportamento di queste serie armoniche generalizzate, utilizziamo il seguente teorema, conosciuto come *criterio di condensazione di Cauchy:* esso prende spunto dalla dimostrazione della divergenza della serie armonica (semplice) e dimostra una equivalenza interessante.

Teorema 14 (Criterio di condensazione di Cauchy). *Se la serie* $\sum a_n$, *a termini positivi, è formata con gli elementi* a_n *di una successione infinitesima, monotòna non crescente, allora essa ha lo stesso comportamento di quest'altra serie* $\sum 2^n a_{2^n}$, *ovvero:*

$$\sum a_n \sim \sum 2^n a_{2^n}.$$

Dimostrazione: Come per la dimostrazione della serie armonica, scriviamo i primi termini e "raggruppiamoli" in modo opportuno.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \underbrace{a_2 + a_3}_{\leqslant a_2+a_2} + \underbrace{a_4 + a_5 + a_6 + a_7}_{\leqslant a_4+a_4+a_4+a_4} + \underbrace{a_8 + a_9 + \cdots + a_{16}}_{a_8+a_8+\cdots+a_8} + \cdots$$

quindi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant a_1 + 2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + 8 \cdot a_8 + \cdots = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}.$$

D'altra parte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \underbrace{a_3 + a_4}_{\geqslant a_4+a_4} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}_{\geqslant a_8+a_8+a_8+a_8} + \underbrace{a_9 + \cdots + a_{16}}_{a_{16}+a_{16}+\cdots+a_{16}} + \cdots$$

e quindi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geqslant a_1 + a_2 + 2 \cdot a_4 + 4 \cdot a_8 + 8 \cdot a_{16} + \cdots = a_1 + a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} a_{2^n}$$

ovvero anche:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geqslant a_1 + a_2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}.$$

[9] L'esponente a cui si elevano i reciproci dei numeri naturali, a volte, viene anche chiamato **parametro**.

In definitiva abbiamo la seguente catena di disuguaglianze:

$$\boxed{a_1 + a_2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \, a_{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \, a_{2^n}}$$

è evidente che se $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \, a_{2^n}$ diverge, il primo membro della disuguaglianza nel riquadro diventa infinitamente grande e, a fortiori, così dovrà fare la serie di partenza $\sum a_n$. D'altra parte, se questa stessa serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \, a_{2^n}$ converge, il terzo membro della disuguaglianza risulta "finito" e quindi, a maggior ragione, dovrà esserlo il termine centrale, dato dalla serie iniziale $\sum a_n$. Rimane pertanto dimostrato che le due serie o convergono entrambe, o divergono entrambe [10] .

c.v.d.

Corollario 2. *Le serie armoniche generalizzate convergono se e soltanto se il parametro è maggiore (strettamente) di uno, altrimenti divergono:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad k > 1.$$

Dimostrazione: Applichiamo il criterio di condensazione:

$$2^n \, a_{2^n} = 2^n \, \frac{1}{2^{k\,n}} = \left(\frac{2}{2^k}\right)^n = \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^n$$

e questo è il termine generico di una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2^{k-1}}$. Affinché $\sum 2^n \, a_{2^n}$ converga, quindi, deve essere

$$\frac{1}{2^{k-1}} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{k-1} > 1 \quad \Longrightarrow \quad k - 1 > 0$$

ovvero

$$k > 1.$$

c.v.d.

A questo punto abbiamo due "famiglie" di serie a carattere noto, con cui poter operare confronti: le serie geometriche, convergenti per ragione minore di uno e le serie armoniche generalizzate, convergenti per parametro maggiore di uno. Applicando il confronto con le serie geometriche riusciamo a dimostrare altri due usuali criteri di convergenza: quello del *rapporto* e quello della *radice,* di cui discuteremo subito dopo aver portato qualche esempio di studio di serie per confronto con

[10] Si noti che la soppressione di un numero finito di termini non condiziona la convergenza/divergenza della serie, quindi quei termini "spuri", a_1 e a_2 nel primo membro della disequazione e a_1 nel terzo membro, non contano assolutamente nulla al fine del confronto tra le serie considerate.

le geometriche o le armoniche.

Esempio: Discutere sul carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cdot(4+\sin(n))}{\sqrt[3]{n^5}}.$$

Soluzione: Intanto osserviamo che $\sin(n) \geqslant -1$ quindi il secondo fattore [11] al numeratore è sempre maggiore o uguale a 3 e, a maggior ragione, a 1. Da questa semplice osservazione ricaviamo la maggiorazione:

$$\frac{(n+1)\,(4+\sin(n))}{\sqrt[3]{n^5}} \geqslant \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^5}} \sim \frac{\cancel{n}^1}{\cancel{n}\cdot\sqrt[3]{n^2}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

L'ultima quantità scritta è il termine generico di una serie armonica con parametro $\frac{2}{3} < 1$, quindi essa diverge e, a fortiori, dovrà divergere la serie di partenza, che le è maggiore.

$\square$

Esempio: Dire se converge o diverge la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[7]{\frac{n^6+n^3}{n^{15}+1}}$$

Soluzione: Il termine generico equivale a

$$\sqrt[7]{\frac{n^6+n^3}{n^{15}+1}} \sim \left(\frac{n^6}{n^{15}}\right)^{\frac{1}{7}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{9}{7}}.$$

Essendo quest'ultima quantità il termine generico di una serie armonica di parametro $\frac{9}{7}$, maggiore di 1, allora converge.

$\square$

Esempio: Dire se una delle due serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \quad \text{o} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}$$

Soluzione: Il termine generico della prima serie è

$$\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2n}{n-1}} \longrightarrow e^2$$

[11]Rappresentato dalla seconda parentesi.

ergo, non essendo, il termine generico della serie, infinitesimo, la serie non può converge. La seconda serie, invece, ha il suo termine generico equivalente a:

$$\frac{2^n + n^2}{3^n + n^3} \sim \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

e quindi converge poiché equivale ad una serie geometrica di ragione $\frac{2}{3}$ minore di 1.

□

Tornano utili, come accennato precedentemente agli ultimi esempi, i seguenti due criteri di convergenza, le cui dimostrazioni si ottengono confrontando le serie di partenza, con le serie geometriche.

TEOREMA 15 (Criterio della radice). *Data la serie (a termini positivi)* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *ammesso che esista il* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, *allora se* $L > 1$ *la serie diverge, se* $L < 1$ *la serie converge mentre* nulla si può dire *se* $L = 1$.

Dimostrazione: Per definizione di limite, definitivamente la successione $\sqrt[n]{a_n}$ appartiene ad un intorno arbitrariamente piccolo di L e, pertanto, possiamo dire che $L - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \epsilon$. Chiamato $q = L + \epsilon < 1$, se $L < 1$, avremo che:

$$a_n < q^n, \quad \text{con} \quad q < 1.$$

Ergo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} q^n, \quad q < 1$$

ovvero essa è dominata da una serie geometrica convergente e quindi deve convergere pure lei. D'altra parte, se $L > 1$, consideriamo l'altra parte della disuguaglianza: $\sqrt[n]{a_n} > L - \epsilon$ e, posto $q = L - \epsilon > 1$, si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n > \sum_{n=1}^{\infty} q^n, \quad q > 1$$

e quindi la serie domina una serie geometrica divergente, ergo diverge. Per $L = 1$ la serie né domina una serie divergente, né è dominata da una convergente con certezza, quindi in quel caso non possiamo concludere nulla.

c.v.d.

TEOREMA 16 (Criterio del rapporto). *Data la serie (a termini positivi)* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *ammesso che esista il* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, *allora se* $L > 1$ *la serie diverge, se* $L < 1$ *la serie converge mentre* nulla si può dire *se* $L = 1$.

Dimostrazione: Supponiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L$ e che questo limite sia minore di 1. Per definizione di limite, definitivamente quel rapporto appartiene ad un intono arbitrariamente piccolo di L, quindi possiamo scrivere:

$$L - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon.$$

Se $L < 1$ allora si può scegliere ϵ abbastanza piccolo in modo che ancora sia $q = L + \epsilon < 1$. A questo punto possiamo considerare solo la parte destra della disuguaglianza, che deve valere, definitivamente, per tutti gli n : ovvero

$$\exists \bar{n} : n > \bar{n} \Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < q.$$

Ma questa ultima disuguaglianza si può riscrivere come

$$a_{n+1} < q\, a_n \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} < q \cdot (q\, a_{n-1}) = q^2\, a_{n-1}$$

e continuando in tal guisa:

$$a_{n+1} < q^{n+1-\bar{n}}\, a_{\bar{n}},$$

ovvero, scalando di un posto sugli indici n [12] :

$$a_n < q^{n-\bar{n}}\, a_{\bar{n}}.$$

Quindi possiamo concludere che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} \left(q^n \cdot \frac{a_{\bar{n}}}{q^{\bar{n}}} \right) = \frac{a_{\bar{n}}}{q^{\bar{n}}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

e quest'ultima converge, essendo una serie geometrica a ragione minore di uno. Un ragionamento analogo dimostra che se $L > 1$, la serie diverge, dominando una serie geometrica di ragione maggiore di uno: si provi, come esercizio, completare la dimostrazione [13] .

c.v.d.

Osservazione: Il criterio del rapporto e quello della radice sono equivalenti: significa che se si applica uno dei due criteri ed il limite esce 1, anche l'altro limite darà 1. Questo fatto si può utilizzare per "trasformare" un tipo di limite in un altro, facendo i dovuti aggiustamenti del caso; ma, soprattutto, non ha senso cercare di applicare

[12] Non necessario, ma si scriverà poi qualcosa di più carino.

[13] Si consideri inizialmente la parte a sinistra della disuguaglianza definita dal limite.

l'altro criterio se, avendo utilizzato uno dei due, il limite non fa concludere sulla convergenza o divergenza della serie [14] .

Esempio: Dire se la serie è convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

Soluzione: Fermo restando che se si può evitare l'utilizzo del criterio del rapporto o della radice, è sempre meglio farlo, vogliamo vedere come si utilizza, ad esempio, per questo caso, il criterio del rapporto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Dato che questo limite è minore di uno, allora la serie converge.

□

Esempio: Dire se la serie è convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot e^n}{5^{\frac{n}{5}}}.$$

Soluzione: Dato che agli esponenti troviamo n possiamo tentare di utilizzare il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^2 \cdot e^n}{5^{\frac{n}{5}}}} = \frac{\sqrt[n]{n^2} \cdot e}{5^{\frac{1}{5}}} \longrightarrow \frac{e}{\sqrt[5]{5}} > 1.$$

Dato che questo limite è maggiore di uno, allora la serie diverge.

□

Risulta molto utile applicare il criterio del rapporto quando si è in presenza di *fattoriali,* dato che nel rapporto essi si semplificano "parecchio".

Esempio: Che comportamento ha la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)!} \quad ?$$

[14] Se però uno dei due criteri non si può applicare, perché il limite L non esiste, allora i due criteri non sono equivalenti. Ad esempio, alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$ non si può applicare il criterio del rapporto, essendo il limite di $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ non esistente, mentre si può applicare il criterio della radice, per il quale la serie risulta convergente, essendo il limite $L = \frac{1}{2} < 1$.

Risposta: Utilizziamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^2+1}{(n+2)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{(n+1)!}}{(n+1)^2+1} = \frac{(n+2)^2+1}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{1}{n+2}$$

e quindi, utilizzando l'equivalenza all'infinito,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \frac{n^2}{n^3} \longrightarrow 0.$$

Dato che 0 è minore di 1, allora concludiamo che la serie converge.

□

2. Serie a termini alterni

Particolari serie sono quelle il cui termine generale presenta alternanza di segno, a seconda esso sia di posto dispari o di posto pari; esse possono essere scritte sempre nella forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, a_n$$

oppure:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \, a_n,$$

in ogni caso, comunque, un addendo è di segno negativo ed il suo successivo è positivo o, mutatis mutandis, uno è di segno positivo ed il successivo, di segno negativo. Queste serie non devono necessariamente divergere o convergere, possono benissimo essere indeterminate: basti pensare a $S = \sum (-1)^n$. Dalla successione delle somme parziali si possono "*estrarre*" due sotto-successioni, convergenti rispettivamente a 0 o a -1, essendo esse costantemente uguali ad uno di questi due valori! in particolare si ha: $s_{2n} = 0$ o $s_{2n+1} = -1$ e, chiaramente, il limite di s_n non può esistere, altrimenti anche queste due sotto-successioni dovrebbero convergere allo stesso valore di quel limite [15] oppure divergere allo stesso modo. Il criterio di riferimento, per decidere della convergenza delle serie a termini alterni, è dato da Leibniz e lo dimostriamo qui di seguito.

Teorema 17 (Criterio di Leibniz). *Una serie a termini alterni è convergente se il suo termine generico, preso in valore assoluto, rappresenta una successione decrescente ed infinitesima. Inoltre la somma della serie è inferiore al primo addendo (positivo) della serie.*

[15] Per esercizio dimostrare questa **Proposizione:** *se una successione a_n converge ad un limite finito, allora ogni sua sotto-successione deve convergere allo stesso limite.*

Dimostrazione: Scriviamo, senza ledere alla generalità della dimostrazione, la serie nella forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, [16] e consideriamo a_n infinitesima decrescente. Pertanto possiamo dire che, osservando la successione delle somme parziali,

$$s_{2n} \geqslant s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} = s_{2n+2}$$

e dato che questo è vero per ogni indice n, allora possiamo dedurre che:

$$s_0 \geqslant s_2 \geqslant \cdots \geqslant s_{2n} \geqslant \cdots$$

d'altra parte, analogamente, si osserva che la sotto-successione, di indici dispari, è non decrescente, essendo:

$$s_{2n+1} \leqslant s_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} = s_{2n+3}$$

e quindi:

$$s_1 \leqslant s_3 \leqslant \cdots \leqslant s_{2n+1} \leqslant \ldots$$

Ora osserviamo che:

$$s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \leqslant s_{2n}$$

e quindi ogni elemento della successione dei termini di posto dispari è minore degli elementi della successione dei termini di posto pari: abbiamo, quindi, osservato che le sotto-successioni dei termini pari o dispari sono entrambe monotòne e limitare, ergo *convergenti.* Vogliamo dimostrare che i limiti di queste due successioni coincidono e che anche rappresentano il limite della successione delle somme parziali, da cui seguirebbe la tesi di convergenza della serie. All'uopo indichiamo indichiamo con D e P rispettivamente i limiti delle sue sotto-successione di indice dispari e pari, rispettivamente:

$$s_{2n+1} \longrightarrow D \quad \wedge \quad s_{2n} \longrightarrow P.$$

Intanto possiamo affermare con sicurezza che $D \leqslant P$, dato che ogni elemento della successione dei termini di posto dispari è minore di ogni elemento della successione dei termini di posto pari [17] . Inoltre, per definizione di limite, definitivamente s_{2n+1} appartiene ad un intorno arbitrariamente piccolo di D, così come s_{2n} ad un intorno arbitrariamente piccolo di P. Se noi consideriamo la differenza tra P e D possiamo -applicando la disuguaglianza triangolare- scrivere:

$$|D - P| \leqslant |D - s_{2n+1}| + |s_{2n+1} - s_{2n}| + |s_{2n} - P|.$$

[16] In modo che il primo termine sia positivo, al limite, se fosse negativo, lo sopprimiamo e rinumeriamo la successione dei termini che andremo a sommare.

[17] Per inciso, questi due limiti rappresentano -rispettivamente- l'estremo superiore della successione s_{2n+1} e l'estremo inferiore di s_{2n}.

Nel secondo membro di questa disuguaglianza compaiono tre “valori assoluti” che possono essere considerati, tutt’e tre, quantità arbitrariamente piccole, dato che anche $|s_{2n+1} - s_{2n}|$ diventa piccola a piacere aumentando opportunamente l’indice n. Questo significa che $D = P$, dato che quella differenza è minore di qualsiasi quantità arbitrariamente piccola che si possa immaginare. Possiamo, per concludere, affermare che definitivamente la successione delle somme parziali s_n, appartiene ad un intorno arbitrariamente piccolo di $P = D$, dato che lo fa separatamente nelle sue due sotto-successioni di posto pari o dispari, in particolare, se $\bar{n}_1$ rappresenta l’indice a partire dal quale s_{2n+1} appartiene ad un intorno arbitrariamente piccolo di D e $\bar{n}_2$ è l’indice a partire dal quale s_{2n} appartiene allo stesso intorno, scelto precedentemente, di $D = P$, allora per $n \geqslant \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\}$ tutti i termini della successione s_n, a prescindere che occupino un posto pari o dispari, apparterranno allo stesso intorno di $D = P$. Questo conclude la dimostrazione.

c.v.d.

Esempio: La successione $\sum(-1)^n \frac{1}{n}$ è una successione convergente per il criterio di Leibniz, infatti:

$$\left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \searrow 0$$

-indicando, quella freccia diretta verso il basso, che a_n è una successione decrescente infinitesima- .

□

3. Alcune sommatorie notevoli

Abbiamo incontrato, durante lo studio delle progressioni, la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica di ragione d. I numeri naturali rappresentano, chiaramente, una P.A. di ragione 1 che inizia con 1, quindi volendo calcolare la somma dei primi n termini, possiamo utilizzare le conoscenze acquisite in quell’occasione: ricordiamo che avevamo trovato $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$. Nel caso che ci interessa, ovvero per la somma dei primi n numeri naturali, possiamo quindi scrivere:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}}$$

Ora, vorremmo ricavare la somma dei primi n quadrati dei numeri naturali [18]. Per ricavare la formula che ci interessa, utilizziamo un "trucco": consideriamo la differenza tra il cubo di binomio e la terza potenza di k:

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

se noi sommiamo, quindi, tutti questi termini, otteniamo:

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right] = \sum_{k=1}^{n} [3k^2 + 3k + 1] = 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1.$$

Per quest'ultima scrittura possiamo utilizzare la sommatoria scritta nel riquadro precedente ed osservare che la somma di n uno fa proprio n, ergo:

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right] = 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n.$$

D'altra parte, nel primo membro, viene scritta una *somma telescopica,* infatti

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right] = \cancel{2^3} - 1^3 + \cancel{3^3} - \cancel{2^3} + \cdots + (n+1)^3 - \cancel{n^3} = (n+1)^3 - 1$$

e quindi concludiamo che :

$$(n+1)^3 - 1 = 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n$$

e, volendo determinare una formula per l'unica sommatoria rimasta in questa uguaglianza, esplicitando deduciamo:

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^3 - 1 - \left[3 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n\right]$$

ergo:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3} \left[(n+1)^3 - \frac{3}{2} n \cdot (n+1) - (n+1)\right]$$

ovvero:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3} \cdot (n+1) \cdot \left[(n+1)^2 - \frac{3}{2} \cdot n - 1\right]$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3} \cdot (n+1) \cdot \frac{2n^2 + n}{2}$$

[18] Questa somma era già nota a Pitagora, al cui risultato era giunto per via geometrica, completando i quadrati successivi al primo, aggiungendo un riga ed una colonna ai margini.

e, in ultimo,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Si può continuare, con questo "trucco" delle somme telescopiche, anche per la somma delle altre prime potenze dei numeri naturali, ad esempio ottenendo il *classico risultato* noto con il nome di **Teorema di Nicomaco,** che enunciamo e dimostriamo qui di seguito.

TEOREMA 18 (Teorema di Nicomaco). *la somma dei cubi dei numeri naturali da* 1 *a* n *è eguale al quadrato della somma dei numeri naturali da* 1 *a* n*, ovvero:*

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 .$$

Dimostrazione: Per dimostrare questa affermazione, vogliamo ricavare una formula *ricorsiva* per la determinazione della somma di <u>tutte</u> le somme di potenze di numeri naturali. Iniziamo con lo sviluppo di Newton per le potenze di binomio:

$$(k+1)^{p+1} = 1 + \binom{p+1}{1}k + \binom{p+1}{2}k^2 + \cdots + \binom{p+1}{p}k^p + k^{p+1}$$

Sostituendo a k i vari numeri naturali, otteniamo le seguenti ugualianze:

$$2^{p+1} = 1 + \binom{p+1}{1}1 + \binom{p+1}{2}1^2 + \cdots + \binom{p+1}{p}1^p + 1^{p+1}$$

$$3^{p+1} = 1 + \binom{p+1}{1}2 + \binom{p+1}{2}2^2 + \cdots + \binom{p+1}{p}2^p + 2^{p+1}$$

$$\cdots$$

$$(n+1)^{p+1} = 1 + \binom{p+1}{1}n + \binom{p+1}{2}n^2 + \cdots + \binom{p+1}{p}n^p + n^{p+1}$$

evidentemente, sommando membro a membro, otteniamo:

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p+1} = n + \binom{p+1}{1}\cdot\sum_{k=1}^{n}k + \binom{p+1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2 + \cdots + \binom{p+1}{p}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^p + \sum_{k=1}^{n}k^{p+1}$$

e portando l'ultima sommatoria al primo membro:

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p+1} - \sum_{k=1}^{n}k^{p+1} = n + \binom{p+1}{1}\cdot\sum_{k=1}^{n}k + \binom{p+1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2 + \cdots + \binom{p+1}{p}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^p$$

ed osserviamo che, al primo membro, le due sommatorie formano una somma telescopica, ergo:

$$(n+1)^{p+1}-1 = n+\binom{p+1}{1}\cdot\sum_{k=1}^{n} k+\binom{p+1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n} k^2+\cdots+\binom{p+1}{p}\cdot\sum_{k=1}^{n} k^p,$$

da cui deduciamo:

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{(n+1)^{p+1}-(n+1)}{\binom{p+1}{p}}+$$
$$-\frac{\left[\binom{p+1}{1}\cdot\sum_{k=1}^{n} k+\binom{p+1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n} k^2+\cdots+\binom{p+1}{p-1}\cdot\sum_{k=1}^{n} k^{p-1}\right]}{\binom{p+1}{p}}.$$

Questa è la formula ricorsiva a cui volevamo giungere. Vediamo come funziona.

- Per $p = 1$ otteniamo:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1)^2-(n+1)}{\binom{2}{1}} = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Per $p = 2$ si ottiene:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)^3-(n+1)-\left[\binom{3}{1}\sum_{k=1}^{n} k\right]}{\binom{3}{2}} =$$
$$= \frac{(n+1)^3-(n+1)-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- Per $p = 3$ scriveremo:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n+1)^4-(n+1)-\left[\binom{4}{1}\sum k+\binom{4}{2}\sum k^2\right]}{\binom{4}{3}} =$$
$$= \frac{(n+1)^4-(n+1)-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}+6\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{4} =$$
$$= \frac{(n+1)^4-(n+1)-2n(n+1)-n(n+1)(2n+1)}{4} =$$
$$= \frac{(n+1)\cdot((n+1)^3-1-2n-2n^2-n)}{4} =$$
$$= \frac{(n+1)\cdot[(n+1)^3-(n+1)-2n(n+1)]}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)^2 \cdot [(n+1)^2 - 1 - 2n]}{4} = \frac{(n+1)^2 \cdot n^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 .$$

c.v.d.

3.1. L'induzione matematica. Una tecnica molto utilizzata per dimostrare che certe proprietà sono valide per tutti i numeri naturali e, in particolare, che una formula, coinvolgente numeri interi, è valida in ogni caso, è detta **principio di induzione .** Tale principio è abbastanza facile da capire ed applicare, ma bisogna che uno già *conosca la formula che si vuole dimostrare* essere vera: in pratica, questo principio è molto utile per "verificare" la validità di una formula che, magari, si è riusciti ad intuire in qualche modo, non certo per determinare una formula dal nulla. Il principio di induzione funziona come una specie di "effetto domino", si dimostra che l'affermazione è valida per un primo numero, poi si suppone che dalla validità della formula per il caso generico n segue che la formula è valida anche per il caso successivo $n+1$, e, pertanto, si conclude che la formula dovrà essere vera per tutti i numeri naturali. La validità dell'affermazione per il primo caso prende il nome di **base induttiva,** l'ipotesi che la proposizione (o formula) sia vera per il caso generico n, prende il nome di **ipotesi induttiva** ed il passaggio dal caso n al caso $n+1$, prende il nome di **tesi induttiva.** Vediamo con degli esempi il funzionamento di questo metodo dimostrativo.

Esempio: Dimostrare che la somma dei primi n numeri naturali è $\frac{n(n+1)}{2}$.

Dimostrazione: Si noti che la formula è già conosciuta: la dimostrazione per induzione *non può "scoprire"* nuove formule! Procediamo ordinatamente.

Base induttiva: dimostriamo che la formula è vera per $n=1$. Questo è banale, dato che la somma "dei primi" n naturali è... 1 e, d'altra parte:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

Ipotesi induttiva: supponiamo che effettivamente la somma dei primi n numeri naturali è proprio $\frac{n(n+1)}{2}$.

Tesi induttiva: dimostriamo che dall'ipotesi induttiva segue che la formula è valida ancora per il caso $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\text{Per ipotesi induttiva}} + (n+1) =$$

$$(n+1) \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

che è la formula data nell'ipotesi induttiva con la sostituzione $n \mapsto n+1$.

□

Esempio: Dimostrare che la somma dei primi n quadrati è $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Dimostrazione: Procediamo come nell'esempio precedente.

Base induttiva: Consideriamo $n = 1$, allora si ha che la sommatoria si riduce a $1^2 = 1$. D'altra parte:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1.$$

Ipotesi induttiva: giusto per cambiare, supponiamo che la formula sia vera per $n-1$, ovvero che la somma dei primi $n-1$ quadrati sia data dalla formula con la sostituzione $n \mapsto n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}.$$

Tesi induttiva: Consideriamo la somma dei primi n quadrati:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + n^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} + n^2 =$$

$$= \frac{n^2\,(2n-1) - n\,(2n-1) + 6n^2}{6} = \frac{n^2\,(2n+5) - n\,(2n-1)}{6} =$$

$$= \frac{n \cdot (2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

ovvero la formula che volevamo dimostrare essere vera.

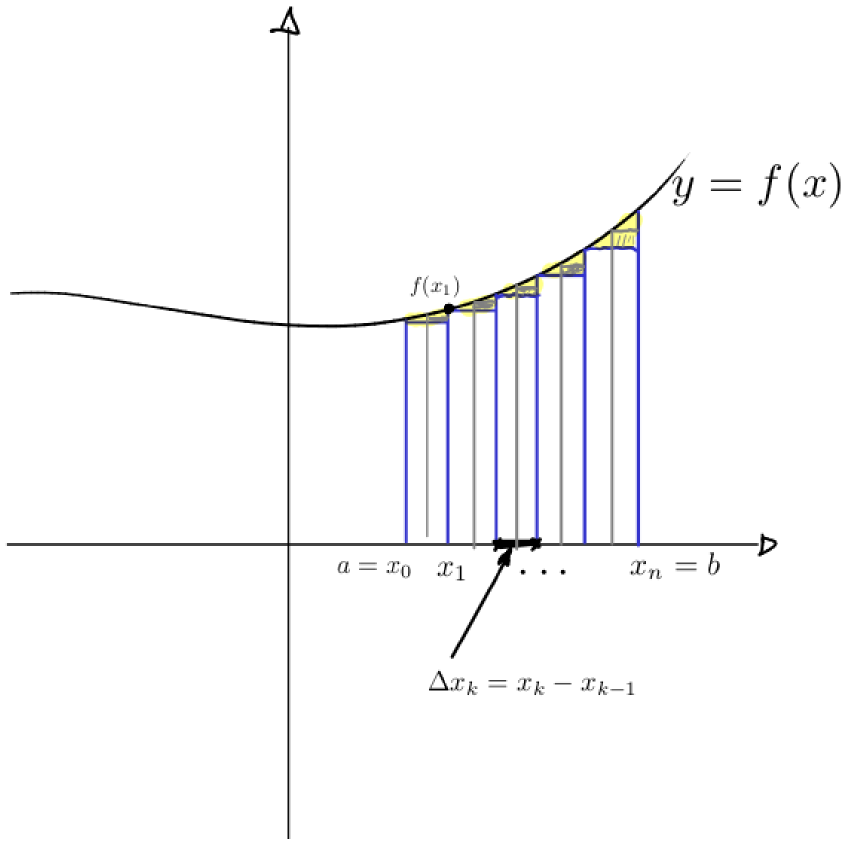
□

4. Il problema delle aree e la soluzione geniale

Abbiamo visto, nel primo biennio, come determinare la misura delle superfici piane delle figure elementari: parallelogrammi, triangoli e trapezi. In verità tutte queste figure fanno parte della famiglia dei poligoni, per cui il bordo è formato da segmenti consecutivi e questo rende piuttosto semplice la ricerca dell'area della figura stessa. Il problema si pone, invece, quando il bordo della figura delimitata, nel piano, non è rettilineo. Un primo risultato, a riguardo, fu trovato dal grande Archimede che riuscì a determinare il rapporto tra le aree in cui rimane diviso il quadrato $[0,1] \times [0,1]$ dalla parabola, come diremmo oggi, $y = x^2$: egli dimostrò che tale rapporto è di due ad uno, ovvero, l'area *sottesa* dalla parabola nel quadrato unitario è un terzo dell'intero quadrato [19] . Dopo questo risultato, comunque, ci fu il "vuoto" per quasi millecinquecento anni. Con l'avvento del calcolo infinitesimale e conseguente calcolo differenziale, il "problema delle aree", cioè quello di *determinare l'area compresa tra due curve di "equazioni" note,* venne risolto in modo generale ed anche abbastanza semplice. L'idea che ha funzionato in modo spettacolare è di utilizzare l'unica cosa che si sa fare, ovvero calcolare l'area dei rettangoli, per *approssimare* l'area che "sta sotto" [20] una curva di equazioni nota -ovvero, come si dice, l'**area sottesa** dalla curva- e fare in modo che questa approssimazione diventi "qualcosa di esatto" passando attraverso un *limite opportuno.* Chiariremo questo metodo con un esempio diretto: calcoleremo l'area sottesa dalla parabola nell'intervallo $[0,1]$, dimostrando ipso facto il teorema di Archimede. Prima di procedere con l'esempio succitato, illustriamo con un disegno cosa si vuole fare.

[19]Questo risultato è noto come **Teorema di Archimede**, ma non dovrebbe essere ascritto ai risultati della Matematica pura, piuttosto della Fisica, dato che il genio siracusano dimostrò questa tesi utilizzando considerazioni di Statica (distribuzione di masse).

[20]Dal grafico di questa curva fino all'asse coordinato.



Il nostro problema, contestualizzato, è di calcolare l'area compresa tra il grafico della funzione $y = f(x)$ e l'asse delle ascisse, limitatamente all'intervallo $[a, b]$. Consideriamo una partizione dell'intervallo stesso in n sotto-intervalli, che indichiamo con $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, con $k = 1, 2, \dots, n$. Per comodità si possono scegliere tutti di uguale lunghezza, pari a $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. A questo punto, per ogni punto x_k generato da tale partizione, possiamo considerare un *rettangolo,* di base Δx e altezza $\min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$. Se la funzione è *crescente,* queste altezze sono uguali a $f(x_{k-1})$, se la funzione è *decrescente,* esse sono uguali alla funzione calcolata nell'estremo destro del sotto-intervallo considerato, ovvero a $f(x_k)$, altrimenti sono pari al valore della funzione in un punto interno al sotto-intervallo considerato. Questi rettangoli si dicono **inscritti** nell'area che vogliamo calcolare. Evidentemente, una prima approssimazione dell'area sottesa è proprio la somma delle aree di questi rettangolini che, senza alcuna difficoltà, può essere calcolata come "base per altezza" [21] : le basi sono le lunghezze dei sotto-intervalli

[21] Addirittura, per la nostra scelta di semplificare i calcoli, le basi sono tutte uguali!

Δx_k, mentre le altezze sono date dalle funzioni per come precedentemente detto. C'è solo il problema che rimangono "pezzetti" di area sottesa, non considerati dai rettangoli [22] . Però, almeno a livello intuitivo, dovrebbe essere chiaro che più rettangoli si andranno a considerare nell'intervallo $[a, b]$ e migliore sarà l'approssimazione dell'area sottesa, dato che i pezzetti trascurati saranno sempre più piccoli. Ecco, questa è l'idea geniale che possiamo addirittura far risalire ad Eudosso: egli lo chiamerebbe **metodo di esaustione,** ovvero "si invade tutta l'area" con aree più piccole che aumentano in numero. In verità si potrebbero considerare anche i rettangolo *circoscritti* [23] all'area sottesa: basta cambiare le altezze dei rettangoli da $\min_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$ a $\max_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$. La somma delle aree dei rettangoli, in questo caso, risulterebbe *maggiore* dell'area sottesa, considerando "pezzetti di area" in più rispetto a quella sottesa dalla curva. Comunque sia, anche in questo caso, all'aumentare del numero dei rettangoli, l'approssimazione diventa vieppiù migliore, dato che si andrebbe ad aggiungere sempre meno area in eccesso. Passiamo ora a delle definizioni formali.

Chiamiamo:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \min_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\, \Delta x_k$$

somma integrale inferiore [24] e

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \max_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\, \Delta x_k$$

somma integrale superiore.

Per aumentare il numero dei rettangoli, basta rende più piccola la base, ovvero aumentare il numero degli intervallini nella partizione dell'intervallo $[a, b]$: in tal caso essi, necessariamente, devono diventare sempre più piccoli. Al limite, considerando un numero tendente all'infinito di rettangoli, le varie ampiezze Δx_k [25] diventeranno *infinitesime,* ovvero $\Delta x_k \to 0$ e, pertanto, le indicheremo con $\mathrm{d}x$ e le varie altezze si dovranno andare a calcolare su ciascuno di questi "infiniti" intervalli

[22] Il grafico di funzione è una "curva" mentre i lati dei rettangoli "tirano dritto"!nel disegno precedente abbiamo indicato le aree mancanti con l'evidenziatore giallo.

[23] Detto in modo improprio.

[24] È la somma della aree dei rettangoli che stanno "sotto" il grafico di funzione.

[25] Che noi abbiamo addirittura supposto tutte uguali a $\frac{b-a}{n}$.

"infinitesimi" [26] . Se esiste il limite per $n \to \infty$ di s_n e quindi anche di S_n, esso rappresenta l'area sottesa, non mancando area per difetto, né avendone in più per eccesso! Quindi possiamo scrivere:

$$\text{Area sottesa} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

ovvero anche, limitandoci solo al limite della somma integrale inferiore:

$$\text{Area sottesa} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \min_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\,\Delta x_k.$$

Una somma estesa ad *un'infinità continua* di punti non può essere calcolata come una semplice serie numerica, dato che le serie si considerano sommando gli elementi di una successione [27] e, d'altra parte, dato che ogni singolo intervallino della partizione diventa, approssimativamente, come "un punto", il valore $\min_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$ lo scriviamo semplicemente $f(x)$, essendo x il punto corrispondente a $\Delta x_k \to \mathrm{d}\,x$. Per sottolineare questo passaggio dal discreto al continuo, Leibniz suggerì di utilizzare una S allungata e stilizzata: essa indicherà la sommatoria di una continuità di valori. Quindi, seguendo il suo prezioso consiglio, scriveremo:

$$\text{Area sottesa} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \min_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\,\Delta x_k = \boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$

Quanto presente nel riquadro si legge **integrale definito tra** a **e** b di $f(x)$ in $\mathrm{d}x$. Siamo pronti a vedere che, quanto detto finora, funziona magnificamente.

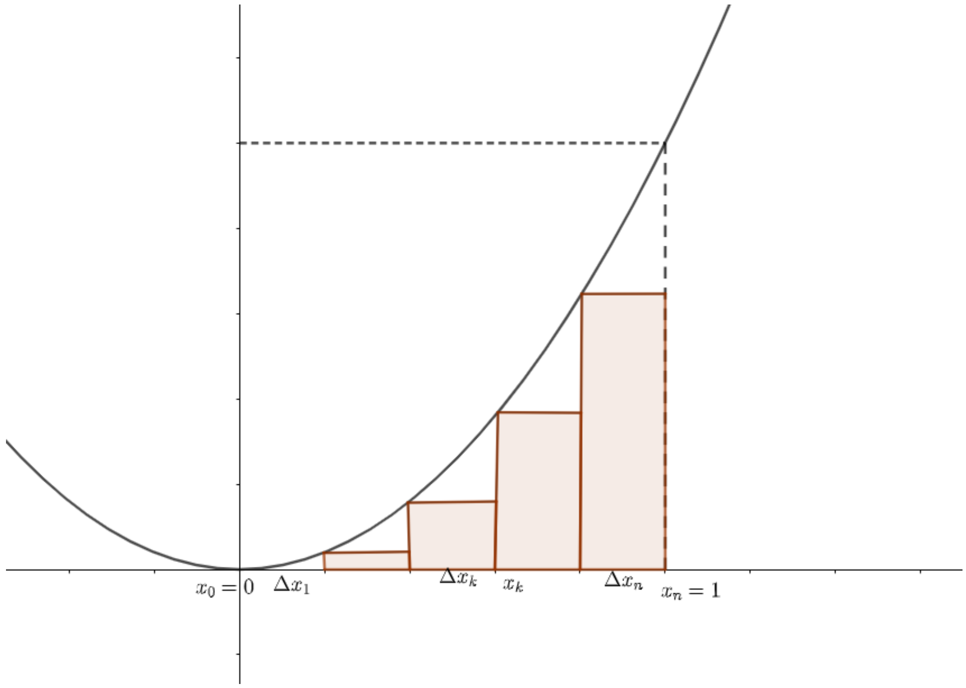
PROPOSIZIONE 16 (Teorema di Archimede). *L'area sottesa dalla parabola "canonica"* $y = x^2$ *nell'intervallo* $[0,1]$ *è un terzo dell'area del quadrato unitario. Scritto altrimenti:*

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

Dimostrazione: Facciamo riferimento alla figura seguente.

[26] E quindi saranno in numero infinito: si può pensare che ogni intervallo è "degenerato" ad un punto!

[27] Che, evidentemente, formano un insieme **discreto** di elementi!



Consideriamo una partizione dell'intervallo $[0,1]$ in n intervallini tutti di uguale ampiezza, pari a $\Delta x = \frac{1}{n}$. La somma integrale inferiore è data, per definizione, da

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)\, \Delta x_k$$

che, nel nostro caso, si riscrive come:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \Delta x,$$

essendo nell'intervallo dato, la parabola, una funzione crescente [28] . Sostituendo in questa sommatoria le quantità note e calcolando il limite, otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_{k-1})^2 \cdot \frac{1}{n}$$

Ma gli x_k si ottengono partendo da 0 ed aumentando di $\frac{1}{n}$ di volta in volta e, precipuamente, $x_k = \frac{k}{n}$, per cui:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2.$$

[28] E quindi assumendo il valore minimo nell'estremo inferiore di ogni sottointervallo.

Risistemando gli indici, possiamo allora riscrivere:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

ma quest'ultima sommatoria la conosciamo, essendo la somma dei primi $n-1$ quadrati, quindi, sostituendo, otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)\cdot n \cdot (2n-1)}{6} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n \cdot n \cdot 2n}{6} = \frac{1}{3}.$$

Ergo:

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

come avevamo affermato più volte,

c.v.d.

Osservazione: il calcolo di quest'area sottesa presuppone la conoscenza della somma dei primi n quadrati, dato che la funzione che definisce la parabola, è una funzione quadratica. Ben diverso sarebbe stato cercare di calcolare l'area sottesa da una curva "non algebrica", ad esempio una goniometria elementare o una logaritmica. Ebbene, passare dalla definizione di integrale definito, ogni volta che occorre calcolare un'area sottesa, ovvero operare con i limiti, non avrebbe potuto rendere molto efficace il "calcolo integrale". Nei prossimi paragrafi scopriremo un insperato collegamento con il calcolo differenziale, che renderà molto più agevole -ove possibile- il calcolo degli integrali definiti.

5. Proprietà degli integrali definiti

Nella definizione di integrale definito, tramite limite della somma degli "infiniti" rettangoli "infinitesimi", contenuti sotto [29] la curva, nell'intervallo considerato, è giusto un'osservazione che i valori $\min_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$ [30] possono benissimo essere negativi: infatti se la funzione ha grafico al di sotto dell'asse delle ascisse, le ordinate dei punti sono negativi e questo implica che *le altezza dei rettangoli* sulla partizione considerata devono essere considerati con il segno negativo. D'altra parte, anche *invertendo il verso di percorrenza* sull'asse delle ascisse, le quantità Δx_k possono assumere valori negativi! nei fatti, se x_{k-1} segue x_k nella partizione considerata, allora $\Delta x_k = x_{k-1} - x_k < 0$. Questo vuol dire due cose: prima di tutto, se si vuole calcolare l'area sottesa da una curva che *"attraversa"* l'asse delle ascisse, nell'intervallo

[29] Oppure "contenenti", se consideriamo le somme integrali superiori.

[30] Così come $\max_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$.

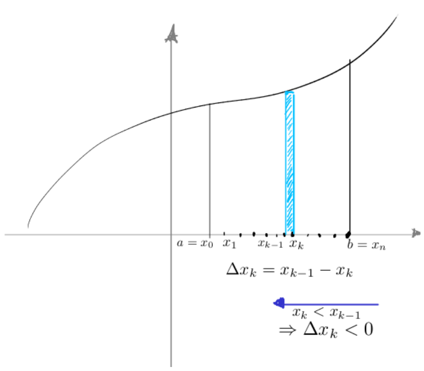
considerato, non si può semplicemente integrare dal primo al secondo estremo dell'intervallo, ma spezzare il calcolo in tanti integrali che dovranno essere presi *in valore assoluto,* per evitare che passando dalle ordinate negative a quelle positive, o viceversa, i valori **segnati** [31] possano eliminarsi a vicenda. Un esempio tipico è la funzione seno: essa è simmetrica rispetto all'origine per cui, se si volesse calcolare l'area che sottende in un intervallo $[a, b]$, simmetrico rispetto all'origine stessa, si otterrebbe sempre ed in ogni caso $\int_a^b \sin(x)\,\mathrm{d}x = 0$. In secondo luogo possiamo affermare la seguente tesi [32].

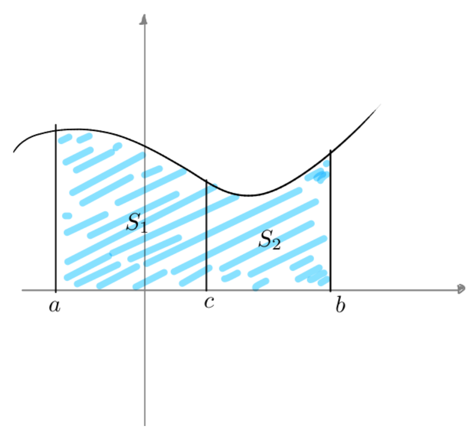
Lemma 6. *Ammesso di avere una funzione* [33] $f(x)$ *che sia o sempre positiva, oppure sempre negativa nell'intervallo* $[a, b]$, *se si inverte il verso di percorrenza sull'asse delle ascisse, l'integrale risulta di pari valore ma con segno opposto:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Dimostrazione: Per quanto abbiamo detto, l'inversione del verso di percorrenza fa diventare negativi, nelle somme integrali, ciascuno degli Δx_k, che continueranno a rimanere negativi anche diventando infinitesimi. Si consideri la prima figura appresso per una esemplificazione.

c.v.d.





[31] Ovvero in possesso di un segno proprio, positivo o negativo.

[32] Che non dimostriamo in modo formale, accontentandoci di capire il senso ragionevole della nostra affermazione.

[33] Dovremmo aggiungere **"integrabile",** nel senso che i limiti delle somme integrali sono finiti e coincidenti. Ma questo noi lo supporremo sempre senza dirlo pedantemente in ogni luogo, anche perché si può dimostrare che tutte le funzioni continue, ad eccezione di un insieme al più numerabile di punti, sono integrabili -come si dice in Matematica: "Ad eccezione di un insieme trascurabile di punti"-.

D'altra parte, come si può osservare dalla seconda figura, l'area sottesa può anche essere calcolata sommando due o più aree sottese, ovvero vale la seguente affermazione.

Lemma 7. *Qualsiasi sia il punto* c, *nell'intervallo* $[a, b]$ *o esterno, se* $f(x)$ *su* $[a, b]$ *mantiene uno stesso segno, si ha:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Dimostrazione: Facendo riferimento al secondo disegno qui sopra, se $c \in (a, b)$ si sta solo dicendo che l'area sottesa nell'intervallo $[a, b]$ si può ottenere come somma delle due aree S_1 ed S_2. Se $c \notin [a, b]$, ad esempio $c > b$, allora [34] si sta dicendo che l'area sottesa si può ottenere come differenza tra l'area sottesa nell'intervallo $[a, c]$ e l'area sottesa nell'intervallo $[b, c]$.

c.v.d.

Il prossimo teorema è molto importante e da esso si motiva anche la definizione di **valore medio di una funzione continua.**

Lemma 8 (Teorema del valor medio). [35] *Se* $f(x)$ *è continua nell'intervallo* $[a, b]$ *allora esiste un valore* $\xi \in (a, b)$ *tale per cui:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \cdot (b - a).$$

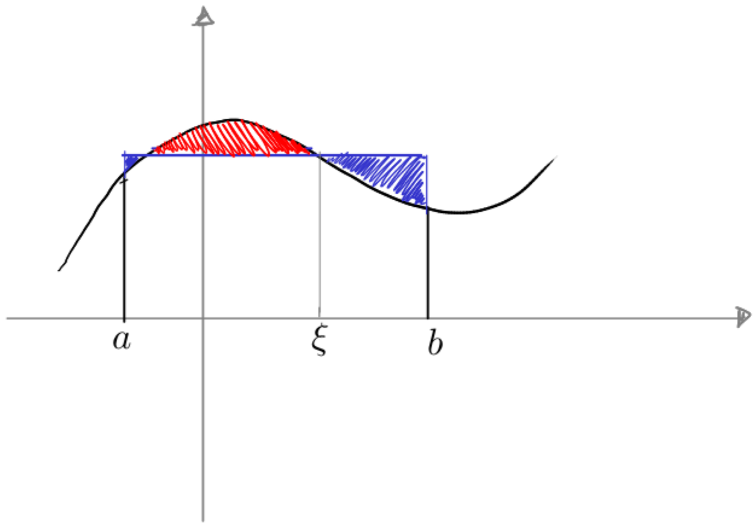
Dimostrazione: Dal punto di vista grafico la questione è giusto un'osservazione: "tirando dritto" per l'altezza di un rettangolo opportuno, l'area del rettangolo uguaglia l'area sottesa! quello che viene "trascurato" [36] è esattamente quello che viene "aggiunto" [37] .

[34] Si invita lo studente a fare un "disegnino" opportuno per convincersene. Si consideri, nel ragionamento, il lemma precedente.

[35] Conosciuto anche come **Teorema della media**

[36] Nella figura la parte di piano in rosso.

[37] Nella stessa figura, la parte di piano in blu.



Dal punto di vista più formale, per il *Teorema di Weierstrass,* $f(x)$ assume un valore minimo ed uno massimo [38] in $[a, b]$: siano essi m e M, rispettivamente. Allora possiamo scrivere che l'area sottesa è compresa tra il rettangolo di altezza minima m ed il rettangolo di altezza massima M :

$$\int_a^b m \,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M \,\mathrm{d}x$$

ovvero:

$$m \cdot (b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M \cdot (b-a)$$

e dividendo tutto per $b-a$:

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M.$$

Dato che $f(x)$ è supposta continua, allora essa assumerà tutti i valori compresi tra il suo minimo (m) ed il suo massimo (M), ergo esisterà un valore $\xi \in (a.b)$ tale per cui:

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

da cui la tesi.

c.v.d.

[38] E non entrambi sugli estremi dell'intervallo!

Osservazione: il valore $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ prende il nome di **valore medio** della funzione $f(x)$ sull'intervallo $[a,b]$.
Abbiamo ora tutti gli "strumenti" per dimostrare il principale teorema del calcolo integrale, chiamato, proprio per la centralità del suo ruolo, **teorema fondamentale del calcolo integrale.** Consideriamo la funzione [39]:

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

che assegna, al variare di t, fissato il primo estremo a di qualche intervallo, il valore dell'area (segnata) sottesa da $f(x)$. Si osserva che, evidentemente,

$$F(a) = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

essendo essa l'area sottesa, corrispondente a quella di un segmento che parte da $,a$ ed arriva ad $f(a)$. D'altra parte,

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

è proprio l'area sottesa [40] da $f(x)$ e compresa tra gli estremi del segmento $[a,b]$.

Teorema 19 (Teorema fondamentale del calcolo integrale). *La derivata del funzionale F è f, ovvero:*

$$\boxed{F^{'}(x) = f(x)}$$

Dimostrazione: Consideriamo il rapporto incrementale e calcoliamone il limite, per determinare la derivata di $F(t)$:

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \frac{\int_a^{t+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x}{h} =$$

$$= \underbrace{\frac{\int_a^{t+h} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_t^a f(x)\,\mathrm{d}x}{h}}_{\text{per il lemma 6}} = \underbrace{\frac{1}{h} \cdot \int_t^{t+h}}_{\text{per il lemma 7}} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{h} \cdot f(\xi) \cdot (\cancel{t} + h - \cancel{t})}_{\text{per il lemma 8}} = f(\xi),$$

[39]Più propriamente, essendo una "funzione" che "opera" su un'altra funzione, ad essa ci si riferisce anche con l'appellativo di **funzionale**.

[40]Stiamo supponendo che $f(x)$ non cambia di segno nell'intervallo $[a,b]$ e non ci interessiamo, per ora, se essa sia sempre positiva o negativa.

con $\xi \in (t, t+h)$, opportunamente preso. Per $h \to 0$ quel rapporto incrementale tende alla derivata prima della funzione $F(t)$, per sua definizione e, contestualmente, $\xi \to t$, dato che l'estremo $t+h$ "si addossa" all'estremo t dell'intervallo. Dato che la funzione f si sta considerando continua, allora $f(\xi) \to f(t)$ per $h \to 0$ e da questo segue la tesi:

$$F'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(t).$$

c.v.d.

COROLLARIO 3 (Formula di Leibniz-Newton).

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)}$$

Dimostrazione: In verità non c'è proprio nulla da dimostrare, dato che $F(b)$ è proprio l'integrale nel primo membro e $F(a) = 0$.

c.v.d.

DEFINIZIONE 7. *Una funzione la cui derivata è $f(x)$ si chiama **primitiva** di $f(x)$.*

Pertanto, il teorema fondamentale afferma che il funzionale [41] $F(x)$, è una primitiva di $f(x)$, "sic et sempliciter".

DEFINIZIONE 8. *Si chiama **integrale indefinito** di una funzione $f(x)$ l'insieme di tutte le sue primitive [42] : lo si indica con:*

$$\int f(x)\, dx.$$

Per calcolare un integrale definito, quindi, "basta" valutare una sua primitiva negli estremi dell'intervallo d'integrazione e farne la differenza! L'unico problema è che *non tutte le funzioni ammettono primitive!* ad esempio $f(x) = e^{-x^2}$ non ammette primitiva [43] .

[41] La variabile t può essere "cambiata" con x, o qualsiasi altra: si dice che è **muta,** ovvero non cambia le carte in tavola! per comodità, continueremo a chiamare le variabili indipendenti x.

[42] Che differiscono unicamente per delle costanti. Si giustifichi questa affermazione!

[43] Ed è anche una delle più importanti funzioni della Matematica, da cui si ricava la "curva degli errori", ovvero la "distribuzione normale" o ancora la **campana di Gauss**.

5.1. Notazione di comodo. Per calcolare un integrale definito, quindi, abbiamo stabilito che bisogna determinare una primitiva della funzione integranda e valutarla negli estremi dell'intervallo di integrazione. In generale conviene procedere con la determinazione dell'integrale indefinito, *a meno di una costante additiva,* ed indicare che poi esso va valutato in due punti e poscia effettueremo la sottrazione. Quindi noi scriveremo, se dobbiamo calcolare l'integrale:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

ed abbiamo determinato l'integrale indefinito seguente, chiamandolo $F(x)$,

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x),$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Ad esempio, nella prossima sezione impareremo a calcolare gli integrali indefiniti e vedremo che $\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,x^3,$ a meno di una costante additiva C. Allora, il risultato, che abbiamo indicato come "teorema di Archimede", lo riscriviamo in tal guisa:

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\,x^3\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 0^3\right) = \frac{1}{3}.$$

6. Come calcolare gli integrali indefiniti

Ricordiamo la "tabella delle derivate" delle funzioni elementari: trovare una *primitiva* significa, essenzialmente, **risalire** dalla "colonna" delle derivate, a quella della funzione da cui "deriva" la derivata! non a caso il termine *primitivo,* almeno nell'accezione in questo contesto, significa "che viene prima". Possiamo stilare una tabella degli integrali indefiniti immediati, semplicemente considerando la tabella delle derivate! Da notare che l'integrale del logaritmo, per ora, non lo possiamo trovare e che la potenza $x^{-1} = \frac{1}{x}$ rappresenta *un'eccezione* alla "regola di integrazione delle potenze", dato che $-1 + 1 = 0$ e la divisione per zero non è concessa in alcun modo. Riportiamo senza ulteriori commenti i primi integrali (indefiniti) immediati.

$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{f'(x)}$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
x^n	$n\,x^{n-1}$	$\frac{1}{n+1}\,x^{n+1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$
e^x	e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\|x\|$

Avvisiamo fin da ora che, contrariamente a quanto avviene per il calcolo differenziale, per il quale, partendo dalle derivate delle funzioni elementari e dalle regole di derivazioni, si perviene sempre alla derivata delle funzioni che si vogliano derivare, seppure esse siano "orribili" in aspetto, per il calcolo integrale [44] non sono presenti regole: il ché vuole dire che non è detto che dagli integrali immediati scritti sopra, si riesce a pervenire sempre al calcolo di integrali di funzioni più complesse, anche perché -come accennato precedentemente- alcune funzioni non ammettono primitiva! Sussistono **metodi** e **tecniche** di calcolo, che si spera di poter utilizzare per arrivare ad un risultato utile, ma ci vuole anche un po' di creatività e fortuna nel calcolo stesso. Inoltre, molto importante è apprendere **trucchi** che possano ricondurre il calcolo degli integrali a casi noti. Affronteremo, dopo qualche esempio di calcolo per funzioni poco più complesse di quelle presenti nella tabella, il problema di determinare gli integrali tramite le tre tecniche principali di integrazione: integrazione per **fratti semplici**, integrazione per **sostituzione** e integrazione **per parti**. Dei metodi (numerici) di integrazione, ne parleremo in un capitolo a parte [45] , in cui ci faremo aiutare da un calcolatore per l'implementazione dei vari algoritmi numerici utili non solo a determinare integrali definiti, ma anche soluzioni di equazioni altrimenti non risolvibili ed amenità di tal fatta.

Prima di procedere con gli esempi, osserviamo che *l'integrale è un operatore lineare (omogeneo),* ovvero:

$$\int \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

[44]Ovvero per la determinazione degli integrali (indefiniti) di funzioni qualsiasi.
[45]Nel terzo volume di questa opera.

Questa proprietà segue direttamente dalle proprietà delle addizioni, per gli integrali definiti e, per quelli indefiniti, dalle proprietà delle derivate e, quindi, in ultima analisi, dei limiti.

Esempio: Trovare una primitiva di $f(x) = 3x^3 + 5\sin(x) - \frac{5}{x}$.

Soluzione: Basta calcolare l'integrale indefinito, a meno di una costante additiva. Facciamo, solo per questa volta, tutti i *pedanti* [46] passaggi:

$$\int 3x^3 + 5\sin(x) - \frac{5}{x}\,\mathrm{d}x = 3\int x^3\,\mathrm{d}x + 5\int \sin(x)\,\mathrm{d}x - 5\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 3\cdot\frac{1}{4}x^4 + 5\cdot(-\cos(x)) - 5\ln|x| = \frac{3}{4}x^4 - 5\cos(x) - 5\ln|x|.$$

□

Esempio: Determinare l'integrale indefinito:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Si ricordi che $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, poi si applichino le proprietà delle potenze per ottenere l'integrale della somma di tante potenze di x:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{3-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x + 2\int x^{2-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x - \int x^{1-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x + \int x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4-\frac{3}{2}}\cdot x^{4-\frac{3}{2}} + 2\cdot\frac{1}{3-\frac{3}{2}}\cdot x^{2-\frac{3}{2}} + \frac{1}{1-\frac{3}{2}}\cdot x^{1-\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2\,x^{\frac{1}{2}} - 2\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$$

essendo C la costante, arbitraria, d'integrazione.

□

6.1. Qualche trucco notevole. Consideriamo la derivata del logaritmo di una funzione $f(x)$:

$$D(\ln(f(x))) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Quindi, la primitiva di $\frac{f'(x)}{f(x)}$ è il logaritmo del *modulo* [47] della funzione:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C.$$

[46] E pertanto inutili.

[47] Bisogna essere sicuri di poter calcolare il logaritmo!

Significa che *conviene sempre controllare* se al numeratore di una frazione, compare la derivata del denominatore, poiché, nell'eventualità, possiamo scrivere subito il risultato dell'integrale come *logaritmo del denominatore,* preso in valore assoluto.

Esempio: Si calcoli l'integrale:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x-1}\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione: La derivata del denominatore è:

$$D(x^2+3x-1) = 2x+3$$

che è il numeratore della frazione, ergo:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x-1}\,\mathrm{d}x = \ln|x^2+3x-1| + C.$$

□

Esempio: Trovare una primitiva di:

$$f(x) = \frac{3x}{2x+1}.$$

Soluzione: La derivata del denominatore è:

$$D(2x+1) = 2.$$

Questa funzione non è il numeratore della funzione, ma esso può "adattarsi" con semplici trucchi algebrici [48] . Intanto possiamo scrivere:

$$\frac{3x}{2x+1} = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 3x}{2x+1}}_{\text{Moltiplicazione per } \frac{2}{2}=1} = \underbrace{\frac{3}{2}\cdot\frac{2x+1-1}{2x+1}}_{\text{Somma di } 1-1=0.} =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\left[1-\frac{1}{2x+1}\right] = \frac{3}{2}\cdot\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}\right].$$

A questo punto, l'unica frazione che compare ha il numeratore che è la derivata del denominatore! quindi:

$$\int \frac{3x}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{2}\cdot\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}\right]\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\cdot\int 1\,\mathrm{d}x - \frac{3}{4}\int \frac{2}{2x+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\ln|2x+1|.$$

□

[48] Ricordiamo che tra i trucchi più intelligenti c'è la moltiplicazione per 1 e la somma di 0, chiaramente scritti in modo opportuno.

Tra le conseguenze notevoli della "derivazione logaritmica", dato che $D(ax+b)=a$, si deduce che:

$$\boxed{\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot\int\frac{a}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot\ln|ax+b|+C}.$$

Esempio: Determinare l'integrale:

$$\int \frac{5}{3x+1}\,\mathrm{d}x$$

Soluzione: Portiamo quel 5 fuori dal simbolo d'integrazione e scriviamo:

$$5\cdot\int\frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3}\cdot\ln|3x+1|+C$$

□

Considerazioni analoghe si possono fare per le funzioni composte in cui $f(x)$ risulta "argomento" di qualche funzione elementare; ad esempio:

$$\int f'(x)\,e^{f(x)}\,\mathrm{d}x = e^{f(x)}+C$$

così come:

$$\int\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{f(x)}+C,$$

oppure anche:

$$\int f'(x)\,\cos f(x)\,\mathrm{d}x = \sin f(x)+C.$$

Non ci soffermiamo oltre, ma raccomandiamo di affrontare gli esercizi sempre *controllando* dapprima se la funzione integranda è, o si può ricondurre, ad un caso particolare di derivata di funzione composta e solo dopo averci ragionato un po', provare qualche altra via tra quelle che presenteremo nei prossimi paragrafi.

6.2. Fratti semplici. Il presente metodo si applica per trascrivere l'integrale, di una funzione razionale, nella somma di integrali di funzioni più semplici (dello stesso tipo), di cui si conoscono, chiaramente, le primitive. Il fatto principale è che, se si riconduce il calcolo di un integrale "complesso", al calcolo di una somma di integrali del tipo:

$$\int\frac{N_1}{ax+b}\,\mathrm{d}x \text{ oppure } \int\frac{N_2}{ax+b}\,\mathrm{d}x$$

allora, sapendo calcolare entrambi questi tipi di integrali indefiniti, possiamo giungere alla primitiva della funzione di partenza in modo piuttosto agevole. Il principio su cui si basa il metodo è che **due polinomi**

sono uguali se e soltanto se sono formati dagli stessi monomi, ovvero, guardando ora solo ai coefficienti numerici dei singoli monomi, essi risultano tutti uguali, per ogni grado del monomio considerato [49]. Ad esempio, se $P_2(x) = 3 - x + 4x^2$ allora un altro polinomio $Q_n(x)$ sarà uguale $P_2(x)$ se e soltanto se, detti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ i coefficienti dei monomi di $Q_n(x)$ dal grado zero al grado n, si ha:

$$a_0 = 3,\ a_1 = -2 \text{ e } a_2 = 4$$

avendo nulli tutti gli altri coefficienti di grado superiore al secondo. Si tenga, poi, sempre a mente che la somma (algebrica) di due frazioni si ottiene tramite la seguente definizione:

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}}.$$

Questo metodo, che esporremo direttamente su degli esempi, utilizzando le due osservazioni testé fatte, è attribuito al matematico francese Charles Hermite .

Esempio: Si calcoli l'integrale:

$$\int \frac{2x+1}{x^2 - 5x + 6}\, \mathrm{d}x.$$

Soluzione: Innanzitutto osserviamo che potremmo ottenere la derivata del denominatore, al numeratore, aggiungendo e sottraendo 5, ovvero potremmo scrivere l'integranda come:

$$\frac{2x - 5 + 5 + 1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6} + \frac{6}{x^2 - 5x + 6}$$

spostando il problema del calcolo dell'integrale iniziale a quello del calcolo della primitiva della seconda frazione: evidentemente il problema rimane e quindi proviamo un'altra strada. Si osservi che [50] :

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

A questo punto, seguendo il consiglio di Hermite, proviamo a scrivere la frazione iniziale come somma di due frazioni, i cui denominatori sono

---

[49] A questo principio ci si riferisce anche con il nome **principio di identità dei polinomi.**

[50] Si può scomporre il polinomio al denominatore semplicemente risolvendo l'equazione di secondo grado ed utilizzando le sue radici per scrivere i due binomi di primo grado che dividono il polinomio stesso:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

essendo x_1, x_2 le due soluzioni dell'equazione di secondo grado associata al polinomio dato.

i binomi che hanno diviso il polinomio al denominatore:

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

con A e B quantità da determinare, dipendenti, possibilmente, da x. Il secondo membro, formalmente, si ottiene applicando la definizione di somma tra frazioni, per cui è:

$$\frac{A\cdot(x-3)+B\cdot(x-2)}{x^2-5x+6}$$

e, riscrivendo in modo più ordinato il polinomio al numeratore:

$$\frac{(A+B)\,x-3A-2B}{x^2-5x+6}.$$

A questo punto confrontiamo le due frazioni:

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6}=\frac{(A+B)\,x-3A-2B}{x^2-5x+6}$$

ed osserviamo che, avendo lo stesso denominatore, sono uguali solo se coincidono i numeratori, per cui scriviamo:

$$2x+1=(A+B)\,x-3A-2B.$$

Applichiamo il principio di identità dei polinomi ottenendo il sistema 2×2 seguente:

$$\begin{cases} A+B &= 2\\ -3A-2B &= 1\end{cases}$$

Risolvendo per eliminazione, ad esempio moltiplicando la prima per due e poi sommando le due equazioni, si ottiene:

$$-A=5 \quad\Longrightarrow\quad A=-5$$

ergo:

$$B=7.$$

A questo punto sappiamo che l'integrale di partenza si può "spaccare" nella somma di due integrali di più immediato calcolo:

$$\int\frac{2x+1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x=\int\frac{-5}{x-2}+\frac{-7}{x-3}\,\mathrm{d}x=-5\cdot\int\frac{1}{x-2}-7\cdot\int\frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x.$$

Gli ultimi due addendi integrali sono immediati, infatti sono di "tipo logaritmico":

$$-5\ln|x-3|-7\ln|x-3|$$

e quindi, in ultimo, possiamo scrivere la soluzione dell'esercizio proposto come esempio :

$$\int\frac{2x+1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x=-5\ln|x-3|-7\ln|x-3|+C$$

o, se qualcuno vuole "compattare ulteriormente" la scrittura, utilizzando le proprietà dei logaritmi:

$$\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{1}{(x-2)^5(x-3)^7}\right| + C.$$

□

Esempio: Si calcoli l'integrale indefinito seguente:

$$\int \frac{2x^2-3}{(x-1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Qui il denominatore risulta già scomposto: dobbiamo solo stare attenti che la somma delle frazioni che dovranno dare come risultato la funzione integranda, potrebbe trovarsi sia la frazione con denominatore $x+1$, sia quella con denominatore $(x+1)^2$. Ovvero, dovremmo scrivere una cosa del genere:

$$\frac{2x^2-3}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{(x+1)^2}$$

ed osserviamo che la terza frazione, avendo al denominatore un polinomio di secondo grado, risulta sicuramente non ulteriormente divisibile, anche se al numeratore compare un polinomio di primo grado [51] ! A questo punto sommiamo le tre frazioni e scriviamo il risultato qui di seguito:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{(x+1)^2} = \frac{A\,(x+1)^2+B\,(x-1)(x+1)+(Cx+D)(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}.$$

Riscrivendo solo il numeratore, ordinatamente come polinomio di secondo grado, otteniamo:

$$(A+B+C)\,x^2 + (2A-C+D)\,x + A - B - D$$

ed utilizzando il principio d'identità dei polinomi, scriviamo il sistema:

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ 2A-C+D=0 \\ A-B-D=-3 \end{cases}$$

Sommiamo la prima e l'ultima equazione, sottraendo la seconda, ottenendo:

$$\cancel{2A}+C-D-(\cancel{2A}-c+D) = -1 \implies 2C-2D=-1.$$

[51] Si ricordi che la divisione tra polinomi può essere sempre effettuata finché il polinomio "dividendo" non risulta minore strettamente del polinomio "divisore": insomma, il resto deve essere di grado strettamente minore del divisore.

Se però sommiamo le tre equazioni si ottiene:

$$4A = -1 \quad \Longrightarrow \quad A = -\frac{1}{4}.$$

Poi notiamo che ci sono tre equazioni per quattro incognite, per cui una di esse la possiamo scegliere noi in modo arbitrario: scegliamo $C = 0$ in modo che nell'ultima frazione il numeratore abbia grado zero [52]. Effettuata tale scelta, si ottiene:

$$-2D = -1 \quad \Longrightarrow \quad D = \frac{1}{2}.$$

Ricaviamo dalla prima il valore:

$$B = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

Possiamo quindi riscrivere l'integrale di partenza in questo modo più comodo:

$$\frac{2x^2 - 3}{(x-1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\cdot\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \frac{9}{4}\cdot\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Questi ultimi tre integrali sono tutt'e tre immediati, atteso che i primi due sono di "tipo logaritmico" e l'ultimo ha l'integranda uguale alla derivata di $-\frac{1}{x+1}$, ergo:

$$\int \frac{2x^2 - 3}{(x-1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{9}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + C.$$

□

Osservazione: Nell'esercizio precedente abbiamo voluto, di proposito, considerare una scomposizione di tipo "più generale" rispetto a quella che, l'esperienza, avrebbe permesso di fare: questo perché si potrebbe incorrere nell'errore di trascurare qualche addendo, nella scomposizione in fratti semplici, non riuscendo a pervenire ad un sistema compatibile sui numeratori incogniti [53]. Conviene "mettere più roba" e poi eliminare il superfluo piuttosto che "trascurare termini" rischiando di non arrivare ad una giusta conclusione del calcolo. Dopo un congruo numero di esercizi, la ricerca di una giusta scomposizione in fratti semplici, diventa molto più familiare e non necessiterà più l'impostazione di un sistema lineare con più incognite che equazioni.

[52] Cerchiamo sempre la via più semplice... nel caso il sistema dovesse risultare incompatibile, allora imporremmo che sia zero l'altra incognita, precipuamente D.

[53] In particolare, nell'ultima frazione noi abbiamo tenuto conto del numeratore $Cx + D$, quando avremmo potuto direttamente cercare una frazione con il numeratore "semplicemente" C di grado zero, come monomio in x.

Altra osservazione, il metodo può funzionare solo se noi sappiamo calcolare gli integrali dei "fratti semplici" ottenuti dalla decomposizione: per ora noi sappiamo determinare solo tre tipi di fratti semplici! quelli con denominatore lineare, quelli con denominatore x^2+1 e quelli con denominatore corrispondente ad un quadrato di binomio. Rispettivamente essi generano primitive del tipo "logaritmo", "arcotangente" e "inverso della base del quadrato", più chiaramente:

$$\int \frac{N_1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{N_1}{a}\ln|ax+b| \quad + C.$$

$$\int \frac{N_2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = N_2\arctan(x) \quad + C.$$

In ultimo:

$$\int \frac{N_3}{(ax+b)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{N_3}{a}\cdot\frac{1}{ax+b} \quad + C.$$

Se al denominatore di una frazione compare un polinomio di secondo grado, gli ultimi due casi di integrali summenzionati si ritrovano spesso, ma non sono i casi più generali che uno possa incontrare! Vogliamo ora provare a discutere il caso più generale in cui il denominatore è un polinomio di secondo grado ed il numeratore un polinomio di primo grado, ovvero il caso tipo:

$$\int \frac{n_1\,x+n_2}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x.$$

Come prima osservazione diciamo che, tramite le intelligenti operazioni di moltiplicare per uno e sommare zero, una parte del numeratore può sempre essere riscritto come derivata del denominatore, onde per cui, alla fine, saremo interessati comunque solo al calcolo di un integrale del tipo:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x.$$

I casi da considerare sono solo tre: se il polinomio si fattorizza, corrispondente al fatto che il discriminante $\Delta = b^2-4ac$ è maggiore di zero, allora, tramite fratti semplici, l'integrale si risolve come una somma algebrica di due logaritmi. Se il polinomio è un quadrato di binomio, corrispondentemente $\Delta = 0$, allora abbiamo già visto che l'integrale si ricava come $-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x-x_0}$, essendo x_0 la soluzione dell'equazione di secondo grado associata. Rimane da discutere solo il caso $\Delta < 0$, ovvero quando il polinomio al denominatore risulta irriducibile. Prima di procedere con la discussione di questo caso, è utile introdurre il seguente metodo d'integrazione detto *"per sostituzione".*

6.3. Integrazione per sostituzione. In verità questo metodo risulta banalmente dalla regola di derivazione della funzione di funzione:

$$D(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Integrando questa uguaglianza si ottiene:

$$\int D(f(g(x)))\,\mathrm{d}x = \int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

ovvero:

$$f(g(x)) = \int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Considerando che $g'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(g(x))$, ovvero corrisponde al differenziale di $g(x)$, se <u>sostituiamo</u> a $g(x)$ la variabile t, otteniamo:

$$f(g(x)) = \; f(t) = \int f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Detto in linguaggio corrente, possiamo sostituire una funzione $g(x)$ con una variabile a noi più comoda, ma dobbiamo anche ricordarci di sostituire il differenziale $\mathrm{d}x$ con il nuovo differenziale $\mathrm{d}(g(x))$, per ottenere un nuovo integrale in cui la variabile x non deve più comparire.

Esempio: Calcolare l'integrale indefinito a meno di una costante additiva:

$$I = \int \frac{\ln(x) + 1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Soluzione: Visto che il logaritmo ancora non lo sappiamo integrare, chiamiamo tutto il numeratore t :

$$\ln(x) + 1 = t.$$

Differenziando tale uguaglianza si ottiene:

$$\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t.$$

Questo significa che l'integrale di partenza può essere riscritto come:

$$I = \int t\,\mathrm{d}t,$$

che si calcola facilmente come:

$$I = \frac{1}{2}\,t^2.$$

Sostituendo nuovamente a t la sua espressione in x otteniamo ancora:

$$I = \frac{1}{2}\,[\ln(x) + 1]^2$$

che è la soluzione cercata. Facciamo notare che avremmo potuto scegliere di sostituire solo la funzione $\ln(x) = t$, ottenendo l'uguaglianza tra i differenziali:

$$\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t.$$

In tal caso avremmo scritto:

$$I = \int t + 1\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,t^2 + t = \frac{1}{2}\,\ln^2(x) + \ln(x).$$

Qualcuno potrebbe obbiettare che questa soluzione non coincide con la soluzione precedentemente trovata! ebbene, la scelta libera della costante d'integrazione rende le due scritture interscambiabili: infatti, se sviluppassimo il quadrato di binomio, otterremmo:

$$\frac{1}{2}\,[\ln(x) + 1]^2 = \frac{1}{2}\,\ln^2(x) + \ln(x) + \frac{1}{2},$$

ma dato che $\frac{1}{2}$ è una costante additiva [54] e noi richiediamo l'integrale "a meno di una costante additiva", allora l'ultimo addendo può essere tranquillamente eliminato e la soluzione trovata precedentemente, coinciderebbe in tutto e per tutto con la seconda soluzione, che abbiamo trovato successivamente.

□

Esempio: Si calcoli l'integrale indefinito:

$$I = \int \sin^2(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Proviamo a porre $\sin(x) = z$. Differenziando otteniamo l'uguaglianza tra i differenziali:

$$\cos(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}z.$$

Dato che $\cos^3(x) = \cos(x)\cdot\cos^2(x)$ e quindi, in ultima scrittura:

$$\cos^3(x) = \cos(x)\cdot(1 - \sin^2(x))$$

possiamo riscrivere l'integrale come:

$$I = \int z^2\cdot(1 - z^2)\,\mathrm{d}z = \int z^2 - z^4\,\mathrm{d}z.$$

L'integrazione di quest'ultima espressione è immediata:

$$I = \frac{1}{3}\,z^3 - \frac{1}{5}\,z^5$$

[54] Che andrebbe aggiunta ad una arbitraria altra costante additiva C.

e ritornando all'espressione con le x.

$$I = \frac{1}{3}\sin^3(x) - \frac{1}{5}\sin^5(x) \quad + C.$$

Un ultimo esempio più difficile, la cui sostituzione è ormai "un classico" del calcolo integrale, prima di ritornare alla discussione del punto lasciato in sospeso nel paragrafo precedente.

Esempio: Si calcoli, a meno di una costante additiva, l'integrale indefinito:

$$\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Per arrivare a pensare di effettuare la sostituzione indicata ci vuole un po' di esperienza, per cui raccomandiamo di svolgere gli esercizi posti nell'ultimo capitolo di questo libro. Operiamo la sostituzione:

$$\sqrt{x^2+1} = t - x.$$

Elevando al quadrato si ottiene:

$$\cancel{x^2} + 1 = t^2 - 2tx + \cancel{x^2}$$

da cui, differenziando:

$$0 = 2t\,\mathrm{d}t - 2(\,\mathrm{d}t \cdot x + t\,\mathrm{d}x),$$

ovvero

$$2(t-x)\,\mathrm{d}t - 2t\ \mathrm{d}x = 0 \iff \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t-x}\,\mathrm{d}x,$$

o, meglio ancora:

$$\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Maneggiando ancora un po' le scritture, ad esempio razionalizzando la seconda frazione, si ottiene:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

e quindi:

$$\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{(t-x)^2}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Proviamo a scrivere la frazione al secondo membro unicamente come espressione in t.

$$\frac{(t-x)^2}{t} = t - 2x + \frac{1}{t}\,x^2.$$

D'altra parte, dalla relazione precedentemente trovata,

$$1 = t^2 - 2t\,x$$

si ottiene

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t}$$

e quindi possiamo continuare a scrivere:

$$\frac{(t-x)^2}{t} = t - \cancel{2} \cdot \frac{t^2 - 1}{\cancel{2}\, t} + \frac{1}{t} \cdot \frac{(t^2-1)^2}{4\, t^2} = \cancel{t} - \cancel{t} + \frac{1}{t} + \frac{1}{4}\left[t - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right].$$

Siamo finalmente giunti a riscrivere in modo comodo il nostro integrale:

$$\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}\,t + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t^3}\right]\mathrm{d}t.$$

L'integrale quindi diventa:

$$I = \int \frac{1}{4}\,t + \frac{1}{2}\,\frac{1}{t} + \frac{1}{4}t^{-3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\,t^2 + \frac{1}{2}\,\ln|t| - \frac{1}{8\,t^{-2}}.$$

Ritornando alla variabile x si ottiene:

$$I = \frac{1}{8}\cdot\left[(x+\sqrt{x^2+1})^2 - \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2}\right] + \frac{1}{2}\,\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|.$$

Si osserva ora che.

$$(x \pm \sqrt{x^2+1})^2 = 2x^2 \pm 2x\sqrt{x^2+1} + 1.$$

Dopo qualche altro passaggio possiamo riscrivere la parentesi quadra in tal guisa:

$$\left[(x+\sqrt{x^2+1})^2 - \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2}\right] = (x+\sqrt{s^2+1})^2 - \frac{(x-\sqrt{x^2+1})^2}{(\cancel{x^2} - (\cancel{x^2}+1))^2}$$

e quindi:

$$\left[(x+\sqrt{x^2+1})^2 - \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2}\right] =$$
$$= (\cancel{ex^2} + 2x\sqrt{x^2+1} + \cancel{1}) - (\cancel{2x^2} - 2x\sqrt{x^2+1} + \cancel{1})$$

ovvero:

$$\left[(x+\sqrt{x^2+1})^2 - \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2}\right] = 4x\sqrt{x^2+1}$$

ergo:

$$I = \frac{1}{2}\cdot\left[x\sqrt{x^2+1} + \ln|x+\sqrt{x^2+1}|\right].$$

□

6.4. Integrale delle funzioni razionali il cui denominatore è un trinomio di secondo grado. Riprendiamo il discorso lasciato in sospeso e calcoliamo l'integrale:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$$

nel caso in cui il discriminante sia negativo, ovvero quando il denominatore non si fattorizza nel campo dei reali. Partiamo sicuramente dall'unica cosa che già sappiamo, ovvero che:

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan(x)$$

a meno di una costante additiva. Proviamo, tramite il metodo del "completamento del quadrato", utilizzato già al secondo anno di corso per dedurre la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado, di ricondurre il trinomio del denominatore ad una "forma" del tipo "qualcosa al quadrato $+\ 1$". Questo è abbastanza semplice: intanto "mettiamo in evidenza a" ottenendo,

$$ax^2+bx+c = a\cdot\left(x^2+\frac{b}{a}\,x+\frac{c}{a}\right).$$

A questo punto, confrontiamo il trinomio dentro la parentesi con il quadrato del binomio $(x+A)^2 = x^2+2Ax+A^2$ con A da determinare, in modo che almeno i primi due addendi coincidano, imponiamo quindi [55] :

$$\frac{b}{a}\,x = 2\,A\,x,$$

da cui:

$$A = \frac{b}{2a}.$$

In questo modo otteniamo [56] :

$$x^2+\frac{b}{a}\,x+\frac{c}{a} = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a} = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}.$$

Siamo quindi giunti a scrivere:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}\,\mathrm{d}x.$$

[55] Dato che x^2 è già presente e coincidente in entrambe le espressoni.

[56] Al quadrato di binomio, per ottenere la quantità dentro la parentesi tonda precedentemente citata, dovremmo togliere il termine in più $\frac{b^2}{4a^2}$ ed aggiungere il termine mancante $\frac{c}{a}$.

Mettiamo ora in evidenza l'ultima frazione al denominatore, ottenendo:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}\cdot\frac{1}{\frac{4a^2}{4ac-b^2}\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Per comodità, chiamiamo -evidentemente- $4ac-b^2=-\Delta$ e spostiamo tutte le quantità costanti fuori dal simbolo di integrazione:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{4a}{-\Delta}\cdot\int \frac{1}{\frac{4a^2}{-\Delta}\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

In ultimo osserviamo che possiamo "portare" nel quadrato la frazione che precede la parentesi, semplicemente considerando che:

$$\frac{4a^2}{-\Delta}=\left(\frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2.$$

Per cui possiamo ancora scrivere:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{4a}{-\Delta}\cdot\int \frac{1}{\left(\frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}\cdot x+\frac{\cancel{2a}}{\sqrt{-\Delta}}\cdot\frac{b}{\cancel{2a}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Abbiamo finito! procediamo alla sostituzione

$$\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}=t$$

e calcoliamo i differenziali:

$$\frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}\,\mathrm{d}x=\,\mathrm{d}t.$$

Sostituiamo nell'integrale ed otteniamo:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{4a}{-\Delta}\int\frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\,\mathrm{d}t,$$

da cui:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{{}^{2}\cancel{4a}}{-\Delta}\cdot\frac{\sqrt{-\Delta}}{\cancel{2a}}\arctan(t).$$

Ritornando alla variabile x otteniamo ora:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\cdot\arctan\left(\frac{2a\,x+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+C.$$

Osservazione: Si noti che $-\Delta$ è una quantità positiva, poiché il discriminante è stato supposto negativo e, inoltre, il numeratore dell'argomento dell'arcotangente non è altro che la derivata prima del denominatore della funzione integranda. Per cui, possiamo riscrivere la formula in modo più facile da ricordare:

$$\boxed{\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}} \cdot \arctan\left(\frac{D(ax^2+bx+c)}{\sqrt{|\Delta|}}\right) + C.}$$

Nel caso $\Delta > 0$ abbiamo già detto che, fattorizzandosi il denominatore in un prodotto di due binomi di primo grado, l'integrale sarà formato dalla somma algebrica di due logaritmi. Per $\Delta = 0$, l'integrale risulta la frazione, cambiata di segno, al cui denominatore è stato eliminato il quadrato. Questo conclude l'argomento.

Esempio: Si calcoli l'integrale indefinito seguente:

$$I = \int \frac{x^4}{x^4-1}\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Prima di tutto effettuiamo la divisione tra numeratore e denominatore, essendo essi polinomi dello stesso grado:

$$\frac{x^4}{x^4-1} = \frac{x^4-1+1}{x^4-1} = 1 + \frac{1}{x^4-1}.$$

Poi fattorizziamo il denominatore della seconda frazione:

$$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1).$$

A questo punto proviamo a scrivere la frazione con "fratti semplici":

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

con le quantità A, B, C e D da determinare. Sommando le frazioni del secondo membro otteniamo:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)}{x^4-1}.$$

Raccogliendo i monomi dello stesso grado in un'unica parentesi otteniamo:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{(A+B+C)\,x^3 + (A-B+D)\,x^2 + (A+B-C)\,x + (A-B-D)}{x^4-1}$$

ed utilizzando il principio d'identità dei polinomi, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=1 \end{cases}$$

Sommando la prima e la terza, nonché la seconda e la quarta equazione, otteniamo il sistema "ridotto":

$$\begin{cases} 2A + 2B = 0 \\ 2A - 2B = 1 \end{cases}$$

che porta immediatamente alla soluzione:

$$A = \frac{1}{4} \text{ e } B = -\frac{1}{4}.$$

Sostituendo [57] questi valori nelle prime due equazioni si ottiene:

$$C = 0 \text{ e } D = -\frac{1}{2}.$$

Siamo giunti quindi a decomporre l'integrale di partenza nella somma di integrali immediati e, in particolare, di questi:

$$I = \int 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= x + \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\arctan(x) + C.$$

□

Esempio: Si calcoli, a meno di una costante additiva, l'integrale:

$$I = \int \frac{x^2+2x}{x^2+x+3}\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Intanto effettuiamo la divisione tra numeratore e denominatore:

$$\frac{x^2+2x}{x^2+x+3} = \frac{x^2+x+3\ +x-3}{x^2+x+3} = 1 + \frac{x-3}{x^2+x+3}.$$

Il discriminante del polinomio al denominatore è negativo, quindi non c'è speranza di poter utilizzare i "fratti semplici" [58] . La derivata del denominatore è:

$$D(x^2+x+3) = 2x+1$$

e, il numeratore si può ancora "adattare" acciocché essa compaia:

$$\frac{x^2+2x}{x^2+x+3} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1\ -7}{x^2+x+3}.$$

A questo punto possiamo scrivere:

$$I = \int 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+3} - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{x^2+x+3}\,\mathrm{d}x.$$

[57] In verità, che C sia zero si ricava direttamente dalla prima equazione, atteso che $A+B=0$.

[58] Arguiamo che nella soluzione dovrà comparire l'arcotangente di qualcosa...

Per scrivere la soluzione, ci manca solo il valore del discriminante, preso in valore assoluto:

$$|\Delta| = |1 - 12| = 11.$$

Pertanto abbiamo:

$$I = x + \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + x + 3) - \frac{7}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{11}} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right).$$

□

6.5. Integrazione per parti. L'ultimo metodo che presentiamo deriva dalla "regola" di derivazione del prodotto di funzioni:

$$D(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Integrando questa uguaglianza si ottiene:

$$\int D(f(x) \cdot g(x))\, \mathrm{d}x = \int f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x$$

ovvero

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x + \int f(x) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x$$

e, in ultimo:

$$\boxed{\int f(x) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x}.$$

Si osservi che il passaggio da $g'(x)$ a $g(x)$ si effettua tramite una integrazione, mentre il passaggio da $f(x)$ a $f'(x)$ tramite derivazione. Si spera che, dopo avere effettuato queste operazioni, l'ultimo integrale sia più semplice da calcolare rispetto a quello di partenza. Questo metodo si usa prevalentemente quando si è in presenza di un prodotto di due funzioni appartenenti a famiglie diverse: ad esempio, un polinomio moltiplicato una esponenziale. Ricordiamo, semmai ve ne fosse bisogno, che la derivazione di un polinomio porta ad un altro polinomio di un grado inferiore a qualllo di partenza, quindi -di norma- è utile derivare i polinomi perché, a ripetizione, prima o poi essi spariscono. Inoltre, la derivata del logaritmo è l'inverso dell'argomento [59] e questo può aiutare alla determinazione di integrali ove compaia la funzione logaritmica. Procediamo con degli esempi.

Esempio: Calcolare, a meno di una costante additiva, l'integrale

$$I = \int \ln(x)\, \mathrm{d}x.$$

[59] Moltiplicato la derivata dell'argomento stesso.

Soluzione: Possiamo immaginare che il logaritmo sia stato moltiplicato per la funzione 1 e quindi:

$$I = \int \ln(x) \cdot 1 \, \mathrm{d}x = \ln(x) \cdot x - \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \, \mathrm{d}x,$$

avendo integrato 1 e derivato il logaritmo. L'ultimo integrale è, invero, banale, per cui possiamo scrivere:

$$I = x \cdot \ln(x) - x.$$

□

Esempio: Si calcoli una primitiva di:

$$f(x) = (x^2 + x)\, e^x.$$

Soluzione: Dobbiamo calcolare, anche a meno di una costante additiva, l'integrale:

$$I = \int (x^2 + x)\, e^x \, \mathrm{d}x.$$

Tipico esempio di applicazione dell'integrazione per parti: se si integrasse la parentesi, il grado del polinomio aumenterebbe, il ché significa che l'operazione di integrazione andrebbe a complicarsi, pertanto questa parte sarà quella che andremo a derivare, per ottenere l'ultimo integrale presente nella formula; procediamo, quindi, ad integrare l'esponenziale.

$$\int (x^2 + x)\, e^x \mathrm{d}x = (x^2 + x)\, e^x - \int (2x + 1)\, e^x \, \mathrm{d}x.$$

Non basta una sola "integrazione per parti", dato che abbiamo, come ulteriore integrale da calcolare, un altro a cui si deve applicare lo stesso tipo di integrazione [60] !

$$I = (x^2 + x)\, e^x - \left[(2x + 1)\, e^x - \int 2\, e^x \, \mathrm{d}x \right].$$

Abbiamo quasi finito, dato che l'ultimo integrale è di calcolo immediato, per cui:

$$I = (x^2 + x)\, e^x - (2x + 1)\, e^x + 2\, e^x = (x^2 - x + 1)\, e^x.$$

□

[60] Si ricordi l'ordine di integrazione e di differenziazione delle due parti: se noi adesso invertissimo tale ordine, ritorneremmo a scrivere lo stesso integrale di partenza, ovvero arriveremmo alla "poco illuminante" conclusione che $I = I$.

A volte capita che, integrando ripetutamente per parti, si presenti, nel secondo membro dell'uguaglianza, una frazione dell'integrale di origine: si ottengono, insomma, scritture del tipo $I = q - \frac{a}{b}\,I$, che possono essere risolte, formalmente, come se fossero equazioni di primo grado, facendoci giungere, infine, al risultato desiderato. Si consideri il seguente esempio.

Esempio: Si calcoli, a meno di una costante additiva, l'integrale:

$$I = \int \sin(x)\, e^x \,\mathrm{d}x.$$

Soluzione: È assolutamente indifferente, in questo caso, quale funzione si sceglie per iniziare l'integrazione e quale rimarrà da derivare [61]
:

$$I = \int \sin(x)\, e^x \,\mathrm{d}x = \sin(x)\, e^x - \int \cos(x)\, e^x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \sin(x)\, e^x - \left[\cos(x)\, e^x - \int - \sin(x)\, e^x \,\mathrm{d}x\right].$$

Quindi possiamo scrivere:

$$I = \sin(x)\,^x - \cos(x)\, e^x - I$$

da cui

$$2I = [\sin(x) - \cos(x)]\, e^x$$

ergo:

$$I = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2}\, e^x.$$

□

7. Applicazioni varie del calcolo integrale

Se il calcolo differenziale è stato una rivoluzione per la risoluzione di una pletora di problemi altrimenti di difficile impostazione [62] , il calcolo integrale ha, di fatto, cambiato radicalmente il modo di leggere la "Natura" e "fare" Fisica. Basta considerare che sir Isaac Newton, quando enuncia i suoi principi, da cui fa discendere tutta la descrizione classica della Fisica, pone a base della sua teoria questa considerazione: **"la variazione di velocità che un corpo subisce è direttamente proporzionale alla forza che agisce su di esso",** il quale corpo, di per sé **"rimarrebbe nel suo stato di quiete o di moto rettilineo**

[61] Noi iniziamo integrando l'esponenziale, il lettore attento provi a sviluppare i calcoli iniziando ad integrale la funzione goniometrica.

[62] Si pensi, ad esempio, ai problemi di ottimizzazione.

uniforme" finché una forza (esterna) non lo obbligasse a cambiare "stato" [63] . Se ora scriviamo il principio fondamentale come:

$$\Delta\vec{v} \propto \vec{F},$$

possiamo introdurre una costante di proporzionalità m, che deve rendere conto del fatto fondamentale che in Natura, gli oggetti, si oppongono al cambiamento di stato e, più è "grande" l'oggetto e più "si oppone" al cambiamento di stato [64] e scrivere in ultimo:

$$\Delta\vec{v} = \frac{1}{m}\vec{F}.$$

Dato che la variazione di velocità non è altro che l'accelerazione $\vec{a}$, allora dalla scrittura precedente segue la forma nota:

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}},$$

su cui si basa la descrizione fisica del mondo [65] . Una equazione come quella nel riquadro è di tipo molto particolare, dato che, considerando l'accelerazione come "derivata" della velocità e, quest'ultima, come derivata dello spazio, in essa compare una funzione [66] con almeno una sua derivata: essa si chiama **equazione differenziale** [67] Possiamo comunque già iniziare a trovare qualche risultato interessante applicando il calcolo integrale all'equazione nel riquadro.

7.1. Moto di corpi "puntiformi". Per semplificare la trattazione, immaginiamo di avere un **punto materiale** , ovvero un corpo idealmente "non esteso" [68] con tutta la sua massa concentrata in un punto e, *come primo approccio* immaginiamo che la forza agente su di esso sia costante . In tale eventualità il corpo subisce una accelerazione costante e, pertanto, si parlerà di **moto uniformemente accelerato.** Consideriamo, per semplicità, la forza diretta lungo la direzione del moto [69] , ovvero consideriamo il caso di **moto rettilineo**

[63] Il terzo principio, come è noto a tutti, è che **se una forza agisce su un corpo, cambiando punto di vista, si può pensare che sia il corpo che agisca con forza uguale e verso opposto rispetto alla forza stessa.** Ad esempio, se tiriamo una corda con una certa forza, allora la corda "tira" noi con una forza di uguale intensità e direzione, ma verso opposto.

[64] Quindi la variazione di velocità risulta **inversamente proporzionale** a questa costante m, detta **massa inerziale** del corpo: $\Delta\vec{v} \propto \frac{1}{m}$.

[65] Almeno per velocità non comparabili a quella della luce.

[66] Lo spazio percorso al tempo t, ad esempio.

[67] Di cui ci occuperemo in un capitolo a parte, tra non molto.

[68] Assimilabile, appunto, ad un punto

[69] In verità potremmo pensare di considerare unicamente la componente della forza che agisce lungo la direzione del moto.

uniformemente accelerato. Da $F = m \cdot a$ [70] possiamo scrivere:

$$m \cdot \frac{d\,v}{d\,t} = F$$

ed **integrando** dall'istante iniziale t_0 all'istante finale t, ottenere:

$$m \int_{t_0}^{t} \frac{d\,v(t)}{d\,t}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} F\,\mathrm{d}t$$

ovvero anche:

$$m \cdot [v(t) - v(t_0)] = F \cdot (t - t_0).$$

Qui, l'unica funzione che varia nel tempo è $v(t)$, quindi esplicitiamo rispetto a tale quantità:

$$m \ \cdot v(t) = m \cdot v(t_0) + F \cdot (t - t_0),$$

ovvero anche

$$m \cdot \frac{d\,s(t)}{d\,t} = m \cdot v(t_0) + F \cdot (t - t_0).$$

Integrando nuovamente rispetto al tempo, tra l'istante iniziale t_0 e quello "finale" t, si ottiene:

$$m \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{d\,s(t)}{d\,t}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} m \cdot v(t_0) + F \cdot (t - t_0)\,\mathrm{d}t.$$

Ergo:

$$m \cdot [s(t) - s(t_0)] = m \cdot v(t_0) \cdot (t - t_0) + F \cdot \frac{1}{2} \cdot (t - t)^2.$$

Dividendo tutto per m ed esplicitando rispetto a $s(t)$, si ottiene:

$$s(t) = s(t_0) + v(t_0) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot (\Delta t)^2.$$

Considerando infine che $\frac{F}{m} = a$, otteniamo:

$$\boxed{s(t) = s(t_0) + v(t_0) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t)^2}.$$

La formula nel riquadro precedente prende il nome di **Legge oraria per i moti uniformemente accelerati**

Se un punto materiale di massa m, "viene lanciato" da una posizione di partenza $P(x_0, y_0)$, in prossimità di un oggetto massivo, ad esempio qui sulla terra, di massa M, esso è soggetto, secondo quanto insegna Newton, alla forza di attrazione gravitazionale che è direttamente proporzionale alle masse dei corpi presi in considerazione ed

[70] Abbiamo eliminato la notazione vettoriale dato che forza e moto sono supposte lungo la stessa direzione.

inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra i punti in cui possono essere pensati le masse concentrate [71] , la forza si applica lungo la congiungente tali punti. Detta G la costante di proporzionalità, allora possiamo esprimere la **forza di attrazione gravitazionale** tramite la seguente formula [72] :

$$\boxed{F_G = G \cdot \frac{m \cdot M}{d^2}}.$$

Ora, considerando che la variazione di distanza tra il "centro della Terra" [73] ed il baricentro di un oggetto che viene lanciato in aria, non è apprezzabile, possiamo immaginare che tale forza sia costante e che, pertanto, determini una **accelerazione** costante, diretta verso il basso, che chiamiamo g. È stata misurata che essa vale circa

$$g \approx 9,81\, m/s^2.$$

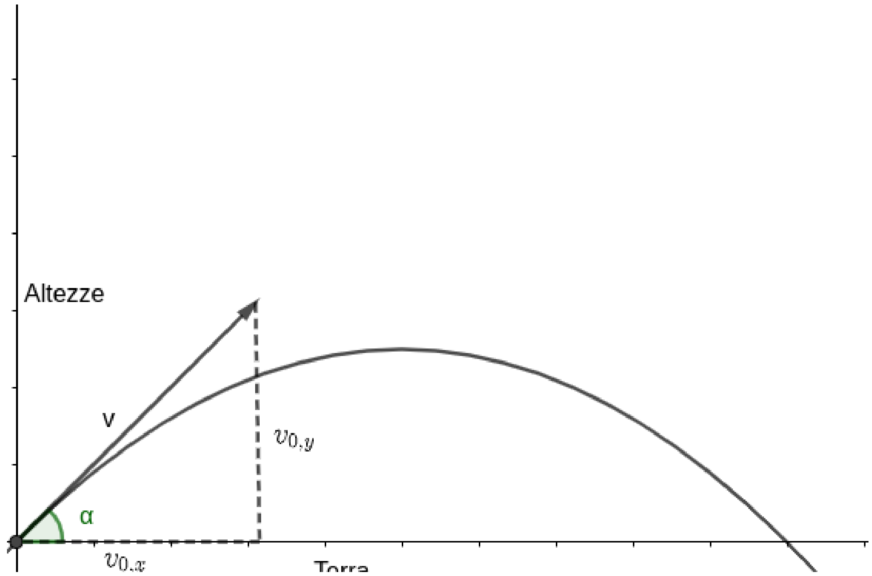
Vogliamo determinare la **traiettoria** di un corpo puntiforme [74] lanciato in aria e soggetto unicamente alla forza di attrazione gravitazionale. Possiamo immaginare che il moto si "scomponga" lungo le due direzioni indicate dall'asse delle ascisse e da quello delle ordinate, di un sistema di riferimento che viene posto in modo tale che l'asse verticale risulti perpendicolare alla superficie della Terra e quello orizzontale, tangente ad essa. Per semplificare la trattazione, *immaginiamo che il proietto venga lanciato dall'origine del sistema di riferimento con velocità iniziale* v_0 *al tempo iniziale* $t_0 = 0$. Evidentemente, lungo l'asse delle ascisse, l'accelerazione è nulla, mentre lungo quello delle ordinate è data da g.

[71] I baricentri dei corpi.

[72] Questa forza è di tipo **universale**, ovvero tutti gli oggetti massivi interagiscono tra loro secondo tale legge e, per altro, è sempre una forza di tipo **attrattivo**.

[73] Dove possiamo, in prima approssimazione, pensare concentrata la massa della Terra.

[74] Si usa dire anche un **proietto**.



Possiamo quindi scrivere la legge oraria determinata precedentemente, lungo le due direzioni succitate ed ottenere il sistema [75] :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0,x}\,t + \cancel{\frac{1}{2}\,a_x\,t^2} & \text{(Lungo asse } x\text{)} \\ y(t) = y_0 + v_{0,y}\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 & \text{(Lungo asse } y\text{).} \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo il tempo:

$$t = \frac{x(t) - x_0}{v_{0,x}}$$

e poi possiamo sostituire questa espressione nella seconda equazione per ottenere:

$$y(t) = y_0 + v_{0,y} \cdot \frac{x(t) - x_0}{v_{0,x}} - \frac{1}{2}\,g\,\left(\frac{x(t) - x_0}{v_{0,x}}\right)^2 .$$

Sviluppando i calcoli [76] :

$$y = \underbrace{-\frac{1}{2}\,\frac{g}{v_{0,x}^2}}_{a}\,x^2 + \underbrace{\left(\frac{g\,x_0}{v_{0,x}^2} + \frac{v_{0,y}}{v_{o,x}}\right)}_{b}\,x + \underbrace{y_0 - \frac{v_{0,y}}{v_{0,x}} \cdot x_0 - \frac{1}{2}\,g\,\frac{x_0^2}{v_{0,x}^2}}_{c}$$

che rappresenta una equazione del tipo

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

[75] Il pedice x, o y stanno ad indicare lungo quale asse stiamo considerando la legge oraria.

[76] Per semplicità di scrittura omettiamo che x e y dipendono da t, ma lo ammettiamo in modo placido.

dimostrando che un qualsiasi oggetto, lanciato in aria, segue [77] una **traiettoria parabolica** . Con le semplificazioni date all'inizio, ovvero $(x_0, y_0) = (0,0)$ all'istante $t_0 = 0$, possiamo riscrivere l'ultima equazione nella forma:

$$y_0 = -\frac{1}{2}\,\frac{g}{v_{0,x}^2}\,x^2 + \frac{v_{0,y}}{v_{0,x}}\,x.$$

Il punto di atterraggio si trova uguagliando a zero l'altezza del punto sulla traiettoria: la soluzione non nulla di tale equazione è:

$$x = \frac{v_{0,y}}{\cancel{v_{0,x}}} \cdot \frac{2\,v_{0,x}^{\cancel{2}}}{g} = 2 \cdot \frac{v_{0,x} \cdot v_{0,y}}{g}.$$

Questa ultima espressione si definisce anche **gittata** del proietto. Considerando che $v_{0,x} = |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)$ e $v_{0,y} = |\vec{v}| \cdot \sin(\alpha)$, allora la gittata, in funzione dell'**angolo di tiro** α, è data da:

$$x = 2 \cdot \frac{|\vec{v}|^2 \,\sin(\alpha)\,\cos(\alpha)}{g}.$$

Possiamo ora calcolare la **gittata massima** applicando il calcolo differenziale:

$$\frac{d\,x}{d\,\alpha} = \frac{2\,|\vec{v}|^2}{g}\,\left(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\right)$$

e, pertanto, $x' = 0$ se $\cos^2(\alpha) = \sin^2(\alpha)$, ovvero, dato che $\alpha \in [0, 90^o]$, $\alpha = 45^o$. Lasciamo, al lettore, il facile compito di verificare che effettivamente, in questo punto critico, la gittata assume il valore massimo. Osserviamo inoltre che l'**altezza massima** raggiunta dal proietto si trova a metà del percorso e quindi per $x = \frac{v_{0,x} \cdot v_{0,y}}{g}$ e vale:

$$y = -\frac{1}{2}\,\frac{g}{\cancel{v_{0,x}^2}}\left(\frac{\cancel{v_{0,x}} \cdot v_{0,y}}{g}\right)^2 + \frac{v_{0,y}}{\cancel{v_{0,x}}} \cdot \left(\frac{\cancel{v_{0,x}} \cdot v_{0,y}}{g}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\,\frac{v_{0,y}^2}{g} + \frac{v_{0,y}^2}{g} = \frac{v_{0,y}^2}{2g} = \frac{|\vec{v}|^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{2g}.$$

In ultimo, il **tempo di volo** si può ricavare direttamente da $y(t) = y_0 + v_{0,y}\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2$ ponendo $y = 0$ e risolvendo l'equazione di secondo grado [78] in t :

$$-\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_{0,y}\,t = 0$$

[77] Per essere precisi è il suo baricentro che segue tale traiettoria!

[78] Si ricordi che stiamo supponendo $y_0 = 0$

da cui

$$t\left(-\frac{1}{2}\,g\,t+v_{0,y}\right)=0$$

ed escluso l'istante iniziale $t=0$, in cui stiamo supponendo l'altezza del corpo nulla, si ha

$$t=\frac{2\,v_{0,y}}{g}=\frac{2|\vec{v}|\sin(\alpha)}{g}.$$

Con questo concludiamo lo studio del moto di un proietto.

7.2. Moti vari. Il calcolo integrale ci consente di trovare le leggi orarie, ovvero lo spazio percorso al variare del tempo, non solo nel caso di moti uniformemente accelerati, ma anche nel caso di moti con accelerazione che varia nel tempo [79] . Se non ci interessano le forze in gioco, possiamo trattare il problema direttamente dal punto di vista **cinematico** [80] . Ad esempio, si supponga che un corpo parta da fermo e si muova di moto rettilineo con una accelerazione descritta da questa legge: $a=t+3$. Che velocità e quale distanza dal punto di partenza raggiunge dopo 2 secondi? In questo caso non si può applicare la legge oraria per i moti uniformemente accelerati, essendo l'accelerazione dipendente dal tempo t. Si può comunque integrare l'uguaglianza che definisce l'accelerazione, per ottenere:

$$\int \mathrm{d}v=\int a\,\mathrm{d}t$$

ovvero:

$$v(t)=\int t+3\,\mathrm{d}t \quad\Longrightarrow\quad v(t)=\frac{1}{2}\,t^2+3t+C.$$

La costante d'integrazione la possiamo ottenere considerando che all'istante iniziale $t=0$ il corpo parte da fermo, ovvero con $v(0)=0$. Imponendo tale condizione nella relazione trovata testé, otteniamo $C=0$. Quindi, dopo due secondi, la velocità raggiunta è di $v(2)=\frac{1}{2}\cdot 2^2+3\cdot 2=8$ m/s. Integrando ulteriormente la relazione che definisce la velocità, otteniamo:

$$\int \mathrm{d}s=\int v(t)\,\mathrm{d}t$$

ovvero:

$$s(t)=\int \frac{1}{2}\,t^2+3\,t\,\mathrm{d}t \quad\Longrightarrow\quad s(t)=\frac{1}{6}\,x^3+\frac{3}{2}\,t^2+K.$$

[79] Diconsi **moti vari** quelli per i quali l'accelerazione non è costante nel tempo.

[80] Quando invece bisogna considerare le forze in gioco, si parla di **dinamica**.

Per determinare K imponiamo la condizione (iniziale) che il corpo parte, al tempo $t = 0$, dall'origine dell'asse di riferimento: $s(0) = 0$, da cui ricaviamo, ancora una volta, che la costante d'integrazione K è zero [81] . Possiamo trovare, infine, lo spazio percorso nei due secondi iniziali:

$$s(2) = \frac{1}{6} \cdot 2^3 + \frac{3}{2} \cdot 2^2 = \frac{4}{3} + 6 = \frac{22}{3} \approx 7.33 \text{ mt.}$$

7.3. Momenti d'inerzia. Il **momento d'inerzia** di un punto materiale di massa m, che ruota attorno ad un asse [82] è definito come $I = m \cdot d^2$, dove d è la distanza del punto materiale dall'asse attorno a cui ruota. Esso rappresenta una quantità che, nelle rotazioni, indica la tendenza ad opporsi al cambiamento di stato dell'oggetto rotante. Se si ha una configurazione di n punti materiali di massa m_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ allora il momento d'inerzia del "sistema", costituito da questi punti, è definito come la somma dei momenti d'inerzia dei singoli punti rotanti attorno allo stesso asse di rotazione:

$$I = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot d_k^2,$$

essendo d_k le distanze dall'asse di rotazione di ciascun punto di massa m_k. Se però il "sistema rotante" non è costituito da un numero discreto di punti [83], ad esempio è un cilindretto pieno, una ruota, una sfera... un solido qualsiasi, allora non si può più utilizzare la definizione data tramite la sommatoria precedente. Possiamo però pensare di *discretizzare* il corpo, suddividendolo in tante piccole masse Δm, calcolare i momenti d'inerzia di tali masse, che considereremo approssimativamente puntiformi e sommare questi momenti per determinare quello del corpo. Ora, il limite della somma che troveremmo, per $\Delta m \to 0$, rappresenta il momento d'inerzia cercato e, d'altra parte, tale limite

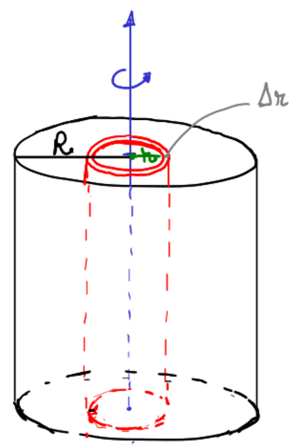
[81] Si noti, per determinare due costanti d'integrazione, bisogna imporre due condizioni: esse possono essere date da "condizioni iniziali", oppure da altre condizioni, tipo "condizioni di passaggio". Dato che l'accelerazione è una derivata seconda dello spazio, allora l'equazione ove essa compare rappresenta una equazione differenziale del secondo ordine: l'ordine di derivazione indica anche quante costanti d'integrazione saranno da determinare, quindi, per definire una legge oraria partendo dalla conoscenza dell'accelerazione, bisogna poter imporre due condizioni. Rimandiamo al capitolo sulle equazioni differenziali una spiegazione più approfondita di questo discorso.

[82] Per un punto possiamo anche pensare che ruoti attorno ad un altro punto, dato che la rotazione avverrà lungo un piano perpendicolare all'asse di cui stiamo parlando e tale piano interseca l'asse stesso in un unico punto che è il centro della circonferenza descritta dal punto che ruota attorno all'asse.

[83] Come si dice, è un **continuum** di punti.

definisce il passaggio da una sommatoria (discreta) ad una somma di parti infinitesime (integrale). Vediamo con un esempio come si potrebbe operare.

Esempio: Determinare il momento d'inerzia di un cilindro circolare retto omogeneo di massa m, rispetto ad un asse perpendicolare alla base del cilindro e passante dal suo centro.
Soluzione:



Con le "etichette" messe in figura, sia R il raggio di base del cilindro ed h la sua altezza; inoltre sia δ la densità della massa: dato che il corpo ha una distribuzione omogenea di massa, possiamo dire che:

$$\delta = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 \cdot h} \qquad \Longleftrightarrow \qquad m = \delta \cdot \pi R^2 \cdot h.$$

Supponiamo ora che il cilindro sia costituito da tanti cilindretti di spessore Δr, concentrici e cavi.

La massa di ciascuno di questi cilindretti sarà data, se r è il raggio di base, da [84] :

$$\Delta m = \delta \cdot 2\pi r \cdot \Delta r \cdot h.$$

Il momento d'inerzia di uno di questi cilindretti, rispetto all'asse di rotazione [85] è dato da

$$\Delta I = \Delta m \cdot r^2 = \delta \cdot 2\pi r \cdot \Delta r \cdot h \cdot r^2 = \delta \cdot 2\pi \, r^3 \cdot h \cdot \Delta r.$$

Per determinare il momento d'inerzia del cilindro, basta ora "sommare" i momenti d'inerzia di tutti questi cilindretti, per $\Delta r \to 0$, quando i loro raggi variano da 0 a R :

$$I = \int_0^R \delta \cdot 2\pi \, r^3 \cdot h \, \mathrm{d}r = \delta \, 2\pi \, h \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\delta \, \pi \, hR^4}{2} = \frac{1}{2} m \, R^2.$$

□

7.4. Qualche esempio di problema tecnico. Il calcolo integrale risulta fondamentale ogniqualvolta bisogna sommare un'infinità di quantità infinitesime: ovvero quando è necessario passare da una quantità "discreta" di punti/valori, ad un quantità "continua" di essi.

[84] Si consideri che l'area di base del cilindretto è quanto quella di un rettangolo di dimensioni $2\pi r$ e Δr : infatti la base non è altro che una corona circolare compresa tra due circonferenze di raggi r e $r + \Delta r$.

[85] Che è supposto essere l'asse del cilindro.

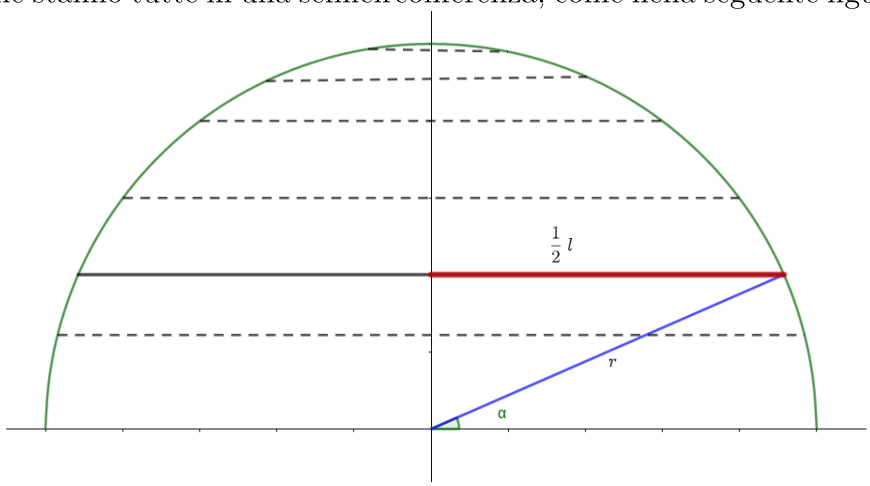
In tale passaggio si "trasforma" il simbolo di sommatoria $\sum$ nel simbolo di integrale $\int$. Vediamo ora qualche altro interessante problema che può essere risolto applicando il calcolo integrale.

Esempio: Determinare la lunghezza media delle corde parallele al diametro di una circonferenza di raggio r, inscritte nella semicirconferenza.

Soluzione: Ricordiamo che il valore medio di una funzione continua su un intervallo I, è dato da

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{\mu(I)} \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$$

dove $\mu(I)$ rappresenta la misura [86] dell'intervallo e l'integrale è esteso dal primo estremo al secondo dell'intervallo stesso. Pertanto si sta cercando il valore medio della lughezza delle corde parallele al diametro e che stanno tutte in una semicirconferenza, come nella seguente figura.



Possiamo risolvere il problema in diversi modi: ad esempio parametrizziamo la lunghezza della corda l tramite l'angolo α :

$$l = 2 \cdot r\,cos(\alpha), \quad \text{con } \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Pertanto:

$$\overline{L} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot r\, \cos(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{2}{\pi} \cdot 2 \cdot r\, [\sin(\alpha)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\,r}{\pi}.$$

È notevole constatare che approcciando il problema in altro modo, saremmo arrivati ad un risultato corretto, ma diverso! considerando il triangolo rettangolo d'ipotenusa r, un cateto uguale a $\frac{l}{2}$ e l'altro pari

[86]Ovvero la lunghezza dell'intervallo.

ad h. Dal Teorema di Pitagora si ottiene la relazione:

$$h^2 + \frac{1}{4}\,l^2 = r^2$$

e da questa si "parametrizza" la lunghezza l della corda, in funzione dell'altezza h, a cui essa si prende rispetto al diametro, con $h \in [0, r]$:

$$l = 2\,\sqrt{r^2 - h^2}.$$

In questo caso si sarebbe dovuto effettuare il seguente calcolo:

$$\overline{L} = \frac{1}{r-0}\int_0^r 2\sqrt{r^2-h^2}\,\mathrm{d}h.$$

Per calcolare l'integrale mettiamo in evidenza r^2, nel radicando e lo "portiamo fuori" dal simbolo di radice, poscia effettuiamo la sostituzione $\frac{h}{r} \mapsto x$, ottenendo anche l'uguaglianza tra i differenziali $\frac{1}{r}\,\mathrm{d}h = \mathrm{d}x$. Si tratta quindi di calcolare l'integrale:

$$\frac{1}{r}\int 2\sqrt{r^2-h^2}\,\mathrm{d}h = 2\,r\cdot\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Per calcolare l'ultimo integrale, possiamo effettuare la sostituzione $x \mapsto \cos(t)$ da cui $\mathrm{d}x = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$, ottenendo:

$$\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int\sqrt{1-\cos^2(t)}\cdot(-\sin(t))\,\mathrm{d}t = \int -\sin(t)\cdot\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'integrale:

$$I = \int -\sin(t)\cdot\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

si può calcolare -ad esempio- utilizzando la formula di bisezione:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$$

da cui

$$\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2\,t)}{2}$$

che, sostituito nell'integrale, produce:

$$\int -\frac{1-\cos(2\,t)}{2}\,\mathrm{d}t = -\frac{t-\frac{1}{2}\sin(2\,t)}{2} = \frac{\sin(t)\cos(t)-t}{2}.$$

Da $x = \cos(t)$ ricaviamo ora [87] $\sin(t) = \sqrt{1-x^2}$ e sostituendo a posto di t le quantità in x, otteniamo:

$$\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\,\sqrt{1-x^2}-\arccos(x)}{2}$$

[87] Tramite l'indentità fondamentale della goniometria.

e sostituendo ancora a x il valore $\frac{h}{r}$ risulta:

$$\overline{L} = 2\,r \cdot \left[\frac{\frac{h}{r}\sqrt{1-\left(\frac{h}{r}\right)^2} - \arccos\left(\frac{h}{r}\right)}{2} \right]_0^r = 2\,r \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi\,r}{2}.$$

Due valori diversi per il valore medio delle lunghezze delle corde inscritte in una semicirconferenza! questo è ***paradossale***, atteso che entrambi i modi di ragionare sono corretti. In effetti, quando studieremo il calcolo delle probabilità, questo risultato si collega direttamente al celeberrimo **paradosso di Bertrand,** in cui egli trova -correttamente- tre soluzioni diverse al seguente problema: *"Dato un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza e una corda del cerchio scelta a caso, determinare la probabilità che la corda sia più lunga del lato del triangolo".*

□

Risolviamo ora alcuni esercizi tratti dall'ottimo libro di Demidovic .

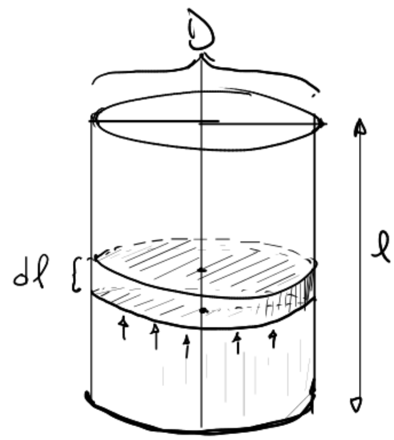
Problema n.1762 -Demidovic-: Un cilindro munito di pistone mobile di diametro $D = 20$ cm e di lunghezza $l = 80$ cm è riempito di vapore alla pressione di $p = 10$ kg/cm^2. Che lavoro dev'essere compiuto perché, a temperatura costante (*processo isotermico*), il volume del vapore diminuisca della metà?

Soluzione: Consideriamo il fatto fondamentale che, dato un gas (ideale) le (macro)-caratteristiche che lo distinguono sono la pressione, il volume e la temperatura. Queste tre quantità sono correlate dal fatto che a parità di pressione, se aumenta la temperatura, anche il gas -possibilmente- aumenterebbe il volume occupato; altresì a parità di volume, aumentando la temperatura, il gas eserciterebbe una maggiore pressione sul suo contenitore: in pratica stiamo dicendo che, detta p la pressione e V il volume occupato dal gas, indicata con T la temperatura, allora [88]:

$$p \cdot V \propto T.$$

Dato che stiamo supponendo il processo isotermico, allora il prodotto $p \cdot V$ è anch'esso costante *e pari al prodotto dei valori iniziali* $p_0 \cdot V_0$.

[88]La seguente proporzione, introdotte le opportune costanti di proporzionalità, è conosciuta come **legge dei gas perfetti** , scritta per la prima volta da *Émile Clapeyron.*



Consideriamo ora il lavoro: esso è definito come "forza" per "spostamento" [89] e quindi, se indichiamo lo spostamento *infinitesimo* $\mathrm{d}l$ che il pistone effettua nella direzione del proprio asse verticale, allora il **lavoro infinitesimo** è dato da:

$$\mathrm{d}L = F \cdot \mathrm{d}l.$$

Ora, la variazione infinitesima di volume dovuta allo spostamento infinitesimo $\mathrm{d}l$ è:

$$\mathrm{d}V = S \cdot \mathrm{d}l$$

essendo S la superficie del pistone [90] . D'altra parte, per definizione di pressione, si ha:

$$p = \frac{F}{S}.$$

Queste due uguaglianze ci permettono di scrivere:

$$\mathrm{d}L = p \cdot \cancel{S} \cdot \frac{\mathrm{d}V}{\cancel{S}} = p \cdot \mathrm{d}V.$$

[89] Fa lavoro solo la componente della forza diretta secondo lo spostamento.

[90] È il volume di un cilindro di base S e altezza $\mathrm{d}l$.

Siamo pronti ora a calcolare il lavoro necessario a dimezzare il volume [91]:

$$L = \int_{V_0}^{\frac{1}{2}V_0} p \cdot \,\mathrm{d}V = \int_{V_0}^{\frac{1}{2}V_0} \frac{p_0\,V_0}{V}\,\mathrm{d}V = p_0 V_0 \int_{V_0}^{\frac{1}{2}V_0} \frac{1}{V}\,\mathrm{d}V =$$

$$= p_0\,V_0 \ln\left(\frac{\frac{1}{2}\cancel{V_0}}{\cancel{V_0}}\right) = 10 \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 80 \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -8 \cdot \pi \cdot 10^4 \ln(2)\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{cm} = -800 \cdot \pi \cdot \ln(2)\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{mt}.$$

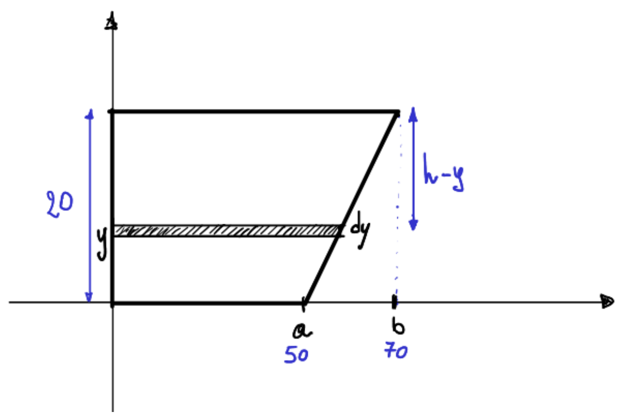
□

Problema n.1769 -Demidovic-: Una diga verticale ha la forma di un trapezio. Calcolare la pressione esercitata dall'acqua su tutta la diga se si sa che la base superiore della diga è $a = 70$ mt, la base inferiore $b = 50$ mt e l'altezza $h = 20$ mt.

Soluzione: Si ricordi che la pressione è direttamente proporzionale alla "colonna" di acqua che sta sopra alla parete ed alla superficie della parete stessa:

$$\mathrm{d}p \propto h_{H_2O} \cdot \mathrm{d}S.$$

Consideriamo la figura seguente.



[91]Si ricordi che abbiamo stabilito, precedentemente, la seguente uguaglianza valida per tutto il tempo del processo isotermico:

$$p \cdot V = p_0 \cdot V_0$$

detta anche **legge di Boyle-Mariotte** da cui:

$$p = \frac{p_0\,V_0}{V}.$$

Se indichiamo con x la lunghezza della striscia corrispondente all'altezza y presa sulla parete della diga, allora possiamo scrivere semplicemente:

$$p = \int_0^h (h-y)\cdot x\,\mathrm{d}y,$$

essendo $x\,\mathrm{d}y = S$ la superficie del rettangolino infinitesimo tratteggiato in figura [92] . Troviamo ora l'equazione della retta a cui appartiene il lato obliquo del trapezio:

$$y = \frac{h}{b-a}(x-a) \quad\Longrightarrow\quad x = \left(y + \frac{a\cdot h}{b-a}\right)\cdot\frac{b-a}{h}$$

ovvero:

$$x = \frac{b-a}{h}\,y + a.$$

Sostituendo nell'integrale otteniamo:

$$\int_0^h (h-y)\cdot\left(\frac{b-a}{h}\,y + a\right)\,\mathrm{d}y = \int_0^h \big[(b-a)-a\big]\,y + a\,h - \frac{b-a}{h}\,y^2\,\mathrm{d}y =$$

$$= \left[(b-2a)\frac{y^2}{2} + a\,h\,y - \frac{b-a}{h}\,\frac{y^3}{3}\right]_0^h = \frac{b-2a}{2}\,h^2 + a\,h^2 - \frac{b-a}{\cancel{h}}\cdot\frac{h^{\cancel{3}\,2}}{3} =$$

$$= \frac{3b - \cancel{6a} + \cancel{6a} - 2b + 2a}{6}\,h^2 = \frac{b+2a}{6}\cdot h^2.$$

Sostituendo in questa formula i valori dati nel problema si trova la pressione esercitata:

$$\frac{70+100}{6}\cdot 400 = 11333.\bar{3} \approx 11.3\cdot 10^3 \text{ tonnellate.}$$

□

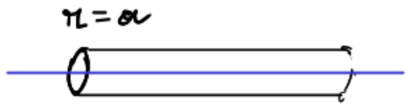
Problema n.1776 -Demidovic-: Un liquido esce a getto laminare da un tubo di sezione circolare di raggio a, la cui velocità v nel punto distante r dall'asse del tubo, è data dalla formula

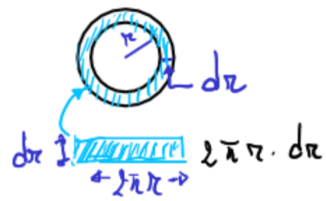
$$v = \frac{p}{4\,\mu\,l}\,(a^2 - r^2),$$

dove p è la differenza di pressione del liquido alle estremità del tubo, μ è il coefficiente di viscosità, l la lunghezza del tubo. Determinare la *quantità del liquido* Q che scorre attraverso una sezione trasversale del tubo in un'unità di tempo.

[92] In verità non è esattamente un rettangolo, dato che un lato sta sul lato obliquo del trapezio, pertanto anche esso è “obliquo”! ma dato che dy è infinitesimo -ovvero approssimativamente “quasi un punto”- il fatto che la figura sia un trapezio, anziché un rettangolo, non ha alcuna importanza.

Soluzione: Indichiamo con ΔQ la quantità di liquido che passa nell'unità di tempo [93] .





Supponiamo che il liquido si muova come se formasse tanti cilindretti coassiali di spessore infinitesimo $\mathrm{d}r$ che distano dall'asse del tubo di una quantità r. Dalla definizione di *portata* si ha $\Delta Q = \frac{\mathrm{Vol}}{\Delta t}$, essendo "Vol" il volume di liquido che si è mosso nel tubo nel lasso di tempo Δt. Se consideriamo tale volume come quello di un cilindretto, la cui base ha superficie S e altezza h, allora $\mathrm{Vol} = S \cdot h$. D'altra parte, la velocità di scorrimento del liquido nel tubo è direttamente proporzionale al valore di h, ammesso che la sezione del tubo non cambi: $v = \frac{h}{\Delta t}$, o, meglio ancora, $h = v \cdot \Delta t$. Mettendo assieme tutte queste uguaglianze si ottiene:

$$\Delta Q = \frac{\mathrm{Vol}}{\Delta t} = \frac{S \cdot h}{\Delta t} = \frac{S \cdot v \cdot \cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}}$$

ergo:

$$\Delta Q = S \cdot v.$$

Ora consideriamo che il liquido si sta muovendo come se formasse tanti cilindretti coassiali, cavi, di spessore S, essendo quindi tale superficie la corona circolare indicata in figura, deduciamo che la superficie attraverso cui scorre il liquido è:

$$S = 2\pi\, r \cdot \mathrm{d}r.$$

Integrando sul raggio che varia da 0 ad a, otteniamo:

$$Q = \int_0^a \frac{p}{4\,\mu\,l}\,(a^2 - r^2) \cdot 2\pi\, r\mathrm{d}r = \frac{p}{2\,\mu\,l}\,\pi \left[\frac{a^2\,r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^a$$

ed infine:

$$Q = \frac{p}{2\,\mu\,l}\,\pi\,\frac{a^4}{4} = \frac{p\,a^4\,\pi}{8\,\mu\,l}.$$

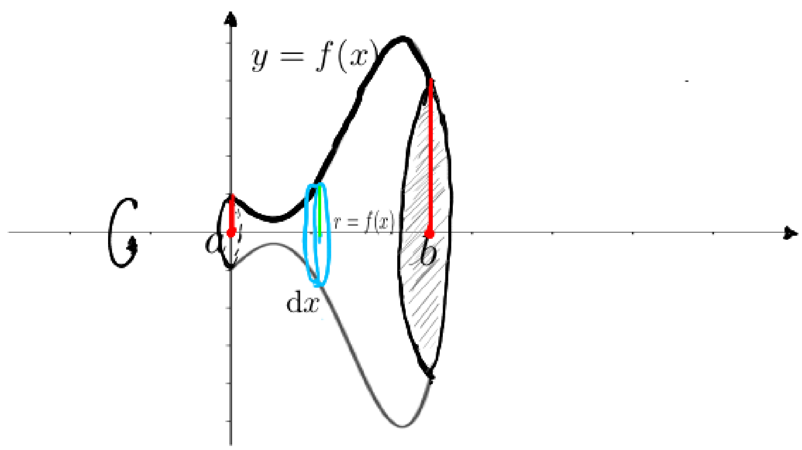
□

Numerosi altri interessanti ed importanti esercizi verranno proposti nell'ultimo capitolo di questo libro: consigliamo vivamente di affrontarli, soprattutto per raggiungere quel senso di meraviglia estatica, che

[93]Detta anche **portata** del tubo.

l'applicazione del calcolo integrale riesce a dare a chi vuole conoscere e capire profondamente i fenomeni della Natura.

7.5. Applicazioni al calcolo di volumi. Una importante applicazione del calcolo integrale alla geometria è la possibilità di calcolare i volumi dei solidi [94] in modo abbastanza facile ed immediato. In questa ultima sezione del capitolo, presenteremo dei classici risultati, ottenuti in modo abbastanza banale tramite il calcolo integrale, anziché utilizzare le considerazioni di geometria euclidea che sono, sì eleganti e raffinate, ma a volte, anche più difficili da realizzare od utilizzare [95] . Iniziamo con il volume dei solidi di rivoluzione ottenuti facendo ruotare il grafico di una funzione $y = f(x)$ con $x \in [a, b]$, attorno all'asse delle ascisse, come nella figura qui di seguito.



Possiamo considerare un *cilindretto* infinitesimo di spessore dx e raggio di base $r = f(x)$: il suo volume sarà dato dal *"prodotto dell'area di base con l'altezza"*, per cui possiamo scrivere:

$$\mathrm{d}V = \pi\, r^2 \cdot h = \pi\,[f(x)]^2 \cdot \mathrm{d}x.$$

Ora, sommando gli infiniti contributi di questi volumetti infinitesimi, troveremo il volume del solido generato dalla rotazione della "funzione" attorno all'asse delle ascisse:

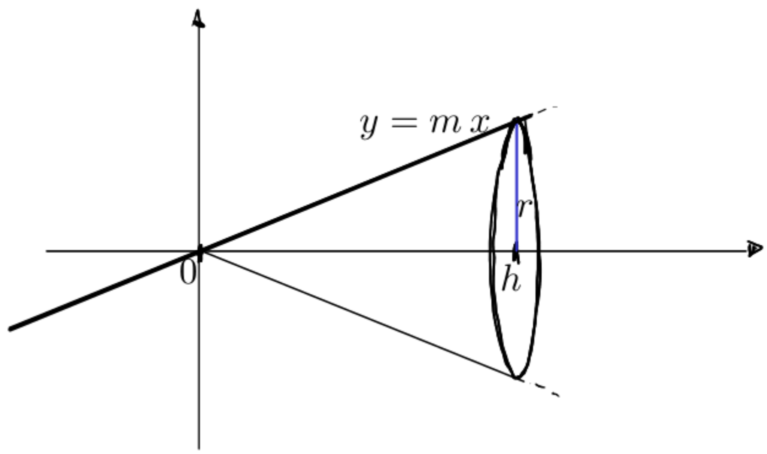
$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}.$$

[94]Specie di quelli che si ottengono facendo ruotare un "profilo" associato ad un grafico di funzione di legge nota, detti **solidi di rivoluzione** .

[95]Si pensi alla **scodella di Galileo** per il calcolo del volume della sfera.

Esempio: Si calcoli il volume del cono ottenuto facendo ruotare la retta $y = mx$, compresa nell'intervallo $[0, h]$ attorno all'asse delle ascisse.

Soluzione: Nella figura seguente troviamo le indicazioni per le "etichette".



Il volume, per quanto abbiamo detto deducendo la formula, si ottiene come:

$$V = \pi \int_0^h [m\,x]^2 \,\mathrm{d}x = \pi \cdot m^2 \cdot \left[\frac{1}{3}\,x^3\right]_0^h = \frac{1}{3}\,\pi\,m^2\,h^3.$$

Per ottenere la formula nota, basta considerare che $m \cdot h = r$ per cui:

$$V = \frac{1}{3}\,\pi\,r^2 \cdot h$$

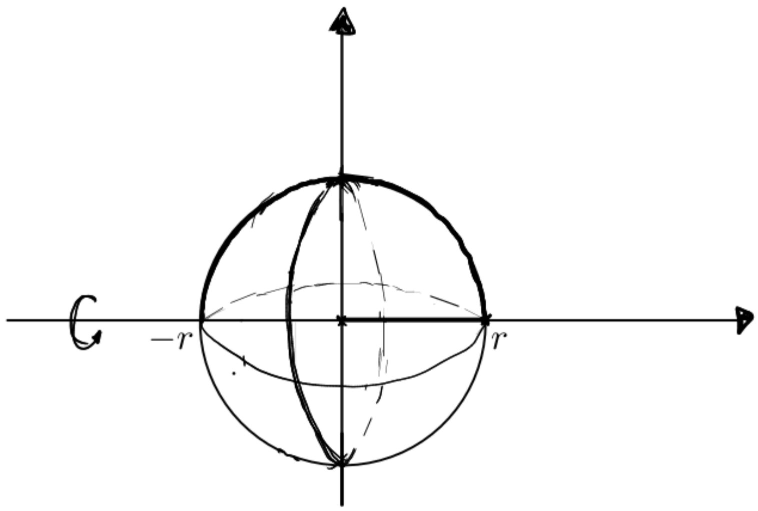
ovvero il volume del cono è un terzo del volume del cilindro avente la stessa base e la stessa altezza del cono.

□

Esempio: Si voglia calcolare il volume della sfera di raggio r.

Soluzione: Consideriamo la semicirconferenza $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, centrata nell'origine del sistema di riferimento [96] e facciamole compiere una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse.

[96]Di raggio r, che si ottiene dall'equazione canonica $x^2 + y^2 = r^2$ semplicemente considerando la parte positiva ottenuta esplicitando la y rispetto alla x.



Allora possiamo calcolare il volume della sfera tramite il seguente integrale:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} [\sqrt{r^2 - x^2}]^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 \,\mathrm{d}x = \pi \cdot \left[r^2\, x - \frac{1}{3}\, x^3 \right]_{-r}^{r} =$$

$$= \pi \cdot \left[\left(r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\, r^3 \right) - \left(r^2 \cdot (-r) - \frac{1}{3} (-r)^3 \right) \right] =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{2}{3}\, r^3 + \frac{2}{3}\, r^3 \right) = \frac{4}{3}\, \pi\, r^3,$$

risultato ottenuto dal sommo *Archimede,* che calcolò il rapporto tra il volume della sfera di raggio r e del cubo di lato pari al raggio della sfera, trovando esattamente $4 : 3$ [97] .

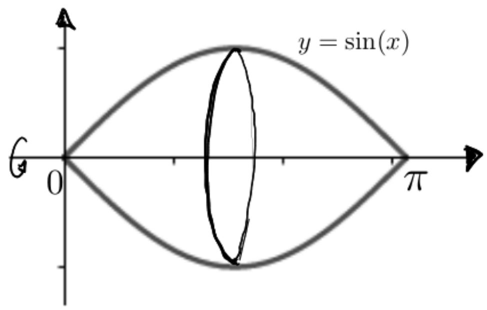
□

Esempio: Come ultimo esempio calcoliamo il volume di un *"salsicciotto"* formato dalla rotazione della funzione seno, compresa nell'intervallo $[0, \pi]$, attorno all'asse delle ascisse.

[97]Cicerone racconta che in un suo viaggio in Sicilia, per trovare la tomba di Archimede, a cui voleva rendere omaggio per la grandezza del suo ingegno, avendo perso memoria, i siracusani, dove fosse collocata la sepoltura del loro illustre concittadino, egli avesse chiesto di cercare una lapide dove fosse incisa la figura di un cubo con dentro una sfera: infatti, di questo risultato, Archimede ne era così orgoglioso che, all'epoca della sepoltura, i propri concittadini gli resero omaggio incidendo sulla sua tomba proprio questi simboli. Fu così che Cicerone riuscì ad individuare la tomba di Archimede di cui, purtroppo, successivamente si persero le tracce completamente.

Soluzione: Consideriamo la funzione $t = \sin(x)$ limitata nell'intervallo dato ed applichiamo la formula trovata per il calcolo del volume dei solidi di rivoluzione (attorno all'asse delle ascisse):

$$V = \pi \int_0^\pi [\sin(x)]^2 \, \mathrm{d}x.$$



Per calcolare questo integrale [98] , giusto per variare un po', applichiamo una integrazione per parti:

$$\int \sin^2(x) \, \mathrm{d}x = \int \sin(x) \cdot \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\cos(x) \cdot \sin(x) - \int -\cos^2(x) \, \mathrm{d}x =$$

$$= -\sin(x)\cos(x) + \int 1 - \sin^2(x) \, \mathrm{d}x$$

ergo:

$$2 \cdot \int \sin^2(x) \, \mathrm{d}x = \int 1 \, \mathrm{d}x - \sin(x)\cos(x) \quad \Longrightarrow \quad \int \sin^2(x) = \frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2}.$$

Quindi, il volume cercato, è rappresentato dalla quantità:

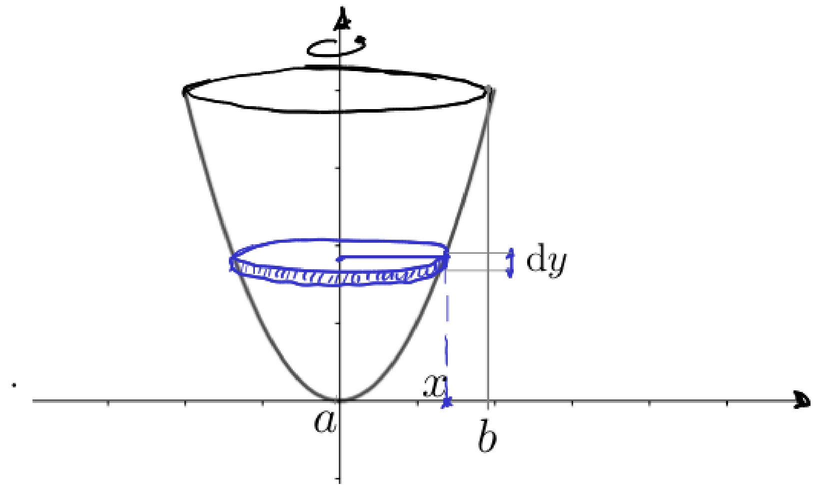
$$V = \pi \cdot \left[\frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2} \right]_0^\pi = \pi \cdot \left[\frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{2} \pi^2.$$

□

Possiamo anche cercare una formula per i volumi dei solidi generati dalla rotazione di un "profilo" attorno all'asse delle ordinate [99]: in questo caso dovremmo tener conto che il raggio di base del cilindretto infinitesimo è dato dall'ascissa del punto che andiamo a considerare sul grafico di funzione, mentre l'altezza infinitesima del cilindretto è data da $\mathrm{d}y = f'(x) \, \mathrm{d}x$. La figura seguente rende più chiara la situazione.

[98] Che abbiamo già incontrato precedentemente in un altro esempio a pagina 391

[99] A parte il fatto che basterebbe una trasformazione di simmetria, scambiando l'asse delle ascisse con quello delle ordinate, per ricondurre il calcolo a quanto abbiamo fatto finora.



Il volume infinitesimo, in questo caso, è dato da:

$$\mathrm{d}V = \pi \cdot x^2 \,\mathrm{d}y = \pi\, x^2\, f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integrando sull'intervallo $[a, b]$ si ottiene:

$$\boxed{V = \pi \cdot \int_a^b x^2\, f'(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

Esempio: Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa attorno all'asse delle ordinate del ramo di parabola $y = x^2$ contenuto nell'intervallo $[0, 2]$.

Soluzione: Vogliamo risolvere questo semplice problema in due modi: il primo utilizzando l'ultima formula trovata, il secondo scambiando l'asse delle ascisse con quello delle ordinate ed utilizzando la formula trovata precedentemente. Quindi, in modo *"brutale":*

$$V = \pi \cdot \int_0^2 x^2 \cdot 2x\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^2 x^3\,\mathrm{d}x = 2\,\pi \cdot \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 2\,\pi \cdot \frac{16}{4} = 8\,\pi.$$

Per il secondo modo, scambiamo l'asse delle ascisse con quello delle ordinate e *"corichiamo"* la parabola:

$$\begin{cases} x \mapsto y \\ y \mapsto x \end{cases}$$

a seguito di questa trasformazione otteniamo:

$$x = y^2 \quad \text{e quindi} \quad y = \sqrt{x}.$$

L'intervallo di "integrazione" viene conseguentemente modificato in [100]:

$$[0, 2] \mapsto [0, 4].$$

A questo punto possiamo applicare la formula nota, trovata ad inizio sezione:

$$V = \pi \cdot \int_0^4 [\sqrt{x}]^2 \, \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^4 x \, \mathrm{d}x = \pi \cdot \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^4 = \pi \cdot \frac{16}{2} = 8 \, \pi.$$

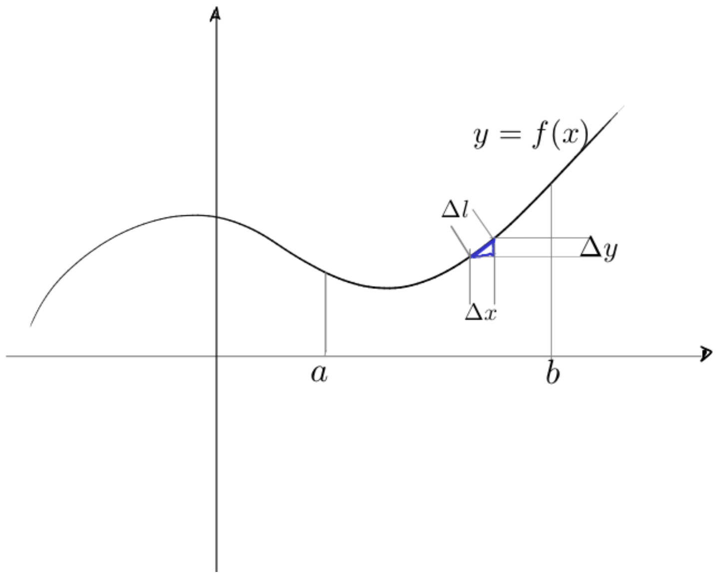
□

7.6. Applicazione al calcolo delle lunghezze. Come vedremo nel prossimo capitolo, il grafico di funzione può essere visto, non solo a livello intuitivo, propriamente come una **curva** e, pertanto, per ora ci riferiamo, con tale termine, ad esso. Possiamo chiederci se sia possibile misurare la **lunghezza di una curva** [101] in un intervallo dato. Il problema, almeno sul piano teorico, si può risolvere con una semplice osservazione che, però, spesso conduce al calcolo di un integrale piuttosto difficile da affrontare. Senza entrare nei particolari e discutere sulle condizioni a cui deve soddisfare una funzione acciocché descriva una curva di lunghezza finita su un dato intervallo [102] , ammesso quindi che la lunghezza sia ben definita, finita e calcolabile, per ottenere una "formula" che la esprima, procediamo semplicemente ad applicare il **teorema di Pitagora** su un triangolo infinitesimo come rappresentato nella figura d'appresso.

[100]Si noti che mentre la x varia da 0 a 2, la y varierà da $0^2 = 0$ a $2^2 = 4$.

[101]La lunghezza di una curva, qualora il secondo estremo dell'intervallo si lasci variabile, definisce una importantissima funzione denominata **ascissa curvilinea**.

[102]Ci sono curve le cui lunghezze non sono finite!



Il triangolo rappresentato in figura è rettangolo con cateti Δx e Δy, mentre la sua ipotenusa l'abbiamo indicata con Δl. Per il *teorema di Pitagora* possiamo scrivere la relazione

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\Delta l)^2.$$

Chiaramente la quantità Δl non rappresenta precisamente la lunghezza dell'arco di curva corrispondente all'intervallino Δx, dato che stiamo sostituendo la curva stessa con un pezzettino di retta [103] ma, se facciamo tendere a zero la quantità Δx, allora la relazione testé scritta risulta non più una approssimazione, ma una uguaglianza esatta della lunghezza dell'elemento infinitesimo di curva [104] :

$$(\mathrm{d}l)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2.$$

Sommando il contributo di tutti questi infinitesimi elementi di lunghezza, otterremo la lunghezza della curva corrispondente all'intervallo $[a, b]$: se chiamiamo γ la curva disegnata come grafico della funzione $y = f(x)$, allora:

$$L_{[a,b]}(\gamma) = \int_a^b \mathrm{d}l$$

e, sostituendo le quantità, per mezzo delle relazioni trovate prima, nell'integrale, otteniamo:

$$L_{[a,b]}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}.$$

[103] Il segmento Δl.

[104] Nel contempo $\Delta x \to 0$, anche $\Delta y \to 0$ (e $\Delta l \to 0$).

Ma $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$, pertanto:

$$L_{[a,b]}(\gamma) = \int \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (f'(x)\,\mathrm{d}x)^2}$$

da cui:

$$\boxed{L_{[a,b]}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x}.$$

Prima di procedere con qualche esempio, sarà utile introdurre una classe importantissima di funzioni, denominate *iperboliche.*

7.6.1. *Funzioni iperboliche.* Abbiamo visto, nel capitolo del calcolo differenziale, che le derivate delle funzioni goniometriche elementari presentano una asimmetria di calcolo: mentre la derivata del seno dà coseno, quella del coseno è "meno" seno. Le due funzioni che ora andremo a definire rimediano a questa asimmetria e, in più, possiedono proprietà molto simili a quelle delle funzioni goniometriche elementari, onde per cui vengono denominati in modo simile a quanto incontrato nel capitolo dedicato alla goniometria. Entrambe le funzioni iperboliche elementari vengono definite tramite la funzione esponenziale.

Definizione 9. *Si definisce il **seno iperbolico** di x la funzione*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

*ed il **coseno iperbolico** come la media aritmetica seguente:*

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

È giusto una osservazione che:

$$D(\sinh(x)) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

e

$$D(\cosh(x)) = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x),$$

eliminando, di fatto, l'asimmetria nella derivazione, a cui si accennava poc'anzi. Inoltre si può facilmente osservare che:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\cancel{e^{2x}} + 2\cdot\cancel{e^x e^{-x}} + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} + 2\cdot\cancel{e^x e^{-x}} - \cancel{e^{-2x}}}{4} = 1$$

ovvero:

$$\boxed{\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1}$$

che assomiglia molto alla identità fondamentale della goniometria ma, soprattutto, ricorda molto la scrittura

$$x^2 - y^2 = 1,$$

relazione nota come equazione canonica dell'iperbole (equilatera) [105]. Tramite le funzioni iperboliche elementari $\sinh(x)$ e $\cosh(x)$, si definiscono, in modo analogo a quanto fatto nel capitolo dedicato alla goniometria, le funzioni iperboliche $\tanh(x)$ e $\coth(x)$, ma non ci dilungheremo oltre, dato che non ci serviranno nell'immediato. Piuttosto anticipiamo che la funzione $\cosh(x)$ viene anche denominata **catenaria** poiché descrive la posizione assunta da una catena omogenea, flessibile e non estensibile, che si lascia pendere, soggetta soltanto al proprio peso, tenendola per i due estremi in modo che non sia tesa. Per ora basti ciò, possiamo ritornare ai nostri esempi di calcolo di lunghezza di archi di curva.

Esempio: Si voglia calcolare la lunghezza dell'arco di parabola compreso tra $x = 0$ e $x = 1$.

Soluzione: Dato che $D\left(x^2\right) = 2x$, allora si deve calcolare il seguente integrale:

$$L_{[0,1]}\left(x^2\right) = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Già con questo semplice esempio si nota la difficoltà richiesta per calcolare l'integrale scritto! procediamo con la determinazione di una primitiva della funzione integranda.
Effettuiamo la sostituzione:

$$2x = \sinh(t) \quad \text{da cui} \quad 2\,\mathrm{d}x = \cosh(t)\,\mathrm{d}t.$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\int \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1+\sinh^2(t)} \cdot \frac{1}{2}\cosh(t)\,\mathrm{d}t.$$

Utilizzando la "relazione fondamentale" [106] possiamo ancora scrivere:

$$\int \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cosh^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

[105] Ed infatti, si possono definire queste due funzioni iperboliche come le coordinate di un punto che appartiene all'iperbole equilatera canonica, esattamente come si erano definite le funzioni goniometriche elementari come le coordinate di un punto che appartiene alla circonferenza goniometrica.

[106] In virtù della quale $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$.

L'ultimo integrale lo calcoliamo "per parti":

$$\int \cosh(t) \cdot \cosh(t)\,\mathrm{d}t = \sinh(t) \cdot \cosh(t) - \int \sinh^2(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sinh(t)\cosh(t) - \int \cosh^2(t) - 1\,\mathrm{d}t$$

da cui:

$$2\int \cosh^2(t)\,\mathrm{d}t = \sinh(t)\cosh(t) + t \quad \Leftrightarrow \quad \int \cosh^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sinh(t)\cosh(t) + t}{2}.$$

Infine possiamo scrivere, ritornando alla variabile x, tramite le sostituzioni: $\sinh(t) = 2x$ e quindi anche $\cosh(t) = \sqrt{4x^2+1}$,

$$\int \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[2x\sqrt{4x^2+1} + \sinh^{-1}(2x)\right]$$

dove abbiamo indicato con $\sinh^{-1}(x)$ la funzione inversa del seno iperbolico [107]. C'è però una relazione tra la funzione logaritmica e l'inversa della funzione seno iperbolico, che rende più carina l'ultima scrittura. Partendo dalla definizione:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

si ottiene:

$$2\sinh(x) = e^x - e^{-x}$$

D'altra parte anche dalla definizione di $cosh(x)$ si ricava

$$2\cosh(x) = e^x + e^{-x}.$$

Sommando queste due scritture si ottiene:

$$\cancel{2} \cdot [\sinh(x) + \cosh(x)] = \cancel{2} \cdot e^x$$

e quindi, per definizione di logaritmo (naturale):

$$x = \ln[\sinh(x) + \cosh(x)].$$

Se noi si chiama $\sinh(x) = t$, allora, passando alla funzione inversa, $x = \sinh^{-1}(t)$ pertanto:

$$\sinh^{-1}(t) = \ln[t + \sqrt{t^2+1}].$$

Questo basta per riscrivere il nostro integrale in forma più carina, senza utilizzare la funzione inversa del seno iperbolico:

$$\int \sqrt{1+4x^2} = \frac{1}{4} \cdot \left[2x\sqrt{4x^2+1} + \ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)\right].$$

[107] Si può anche chiamare **arcosenoiperbolico**.

A questo punto siamo in grado di calcolare la lunghezza dell'arco di parabola.

$$L_{[0,1]}\left(x^2\right) = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cdot\left[2x\sqrt{4x^2+1} + \ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left[2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5})\right] \approx 1,4789.$$

□

Esempio: Calcolare la lunghezza della circonferenza centrata nell'origine del sistema cartesiano e di raggio r.

Soluzione: Consideriamo la semicirconferenza e poi raddoppiamo il risultato: essa si può ricavare come grafico della funzione:

$$\gamma :\ y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

con $x \in [-r, r]$.
La derivata di questa funzione è:

$$D(\sqrt{r^2 - x^2}) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

pertanto la lunghezza della semicirconferenza è :

$$L_{[-r,r]}(\gamma) = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x$$

e quindi:

$$L_{[-r,r]}(\gamma) = \int_{-r}^{r} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Per calcolare questo integrale utilizziamo la "canonica" sostituzione $x = r\cos(t)$, da cui si ricava la relazione tra i differenziali: $\mathrm{d}x = -r\sin(t)\,\mathrm{d}t$. Sostituendo si ottiene:

$$\int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0} \frac{-r^2\sin(t)}{\sqrt{r^2 - r^2\cos^2(t)}}\,\mathrm{d}t = r\int_{\pi}^{0} \frac{-\sin(t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t =$$

$$= r\int_{\pi}^{0} -1\,\mathrm{d}t = r\cdot[-t]_{\pi}^{0} = r\cdot\pi$$

e, pertanto, la circonferenza è lunga, come notoriamente risaputo, $2\,\pi\,r$.

□

CAPITOLO 12

Curve nel piano e nello spazio

Il grafico di funzione, che rappresentiamo nel piano cartesiano, per capire il comportamento -anche e soprattutto- a livello visuale e, pertanto, più immediato ed intuitivo, della legge funzionale, per ora è la sola "entità" matematica che si avvicina all'idea che si ha di "curva". La **curva,** comunque, ha una definizione molto semplice e più generale di quella che noi potremmo intuitivamente immaginare di acquisire a partire dal concetto di *grafico di funzione.* In questo capitolo vogliamo dare i primi concetti di **geometria differenziale,** che risulta molto utile per studiare in modo più approfondito e generico oggetti matematici che hanno occupato un posto centrale nei pensieri di molti matematici e nella storia della Matematica stessa. Noi abbiamo studiato alcune coniche, nei primi capitoli di questo libro: esse rappresentano curve. Poi abbiamo studiato le funzioni goniometriche e successivamente leggi funzionali di tipo più generale: i loro grafici rappresentano curve. Per il momento abbiamo solo trattato il caso di "curve" rappresentabili in un piano cartesiano e, quindi, quelle che si chiamano *curve piane,* ma nulla vieta di considerare curve che *si allontanano* da un piano a cui appartiene un proprio pezzo e, pertanto, studiare curve nello spazio. La cosa interessante è che esse possono essere identificate da tre sole "quantità", a meno di *isomorfismi* dello spazio, ovvero a meno di roto-traslazione delle curve stesse: vorremmo almeno accennare a questo fondamentale teorema e studiare le caratteristiche di qualche curva famosa (sia nel piano che nello spazio).

DEFINIZIONE 10. *Una funzione γ qualsiasi che abbia dominio in un intervallo e codominio nel piano $\mathbb{R}^2$ si chiama* ***curva piana.*** *Se invece il codominio è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ si chiama* ***curva nello spazio.*** *In generale, dicesi* ***curva*** *una applicazione con dominio un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e codominio un insieme $\mathbb{S}$ preso in uno "spazio" opportuno: se $\mathbb{S} = \mathbb{R}^2$ la curva è detta piana, se è $\mathbb{S} = \mathbb{R}^3$ essa si dice nello spazio e se $\mathbb{S} = \mathbb{R}^n$ con $n \geqslant 3$ essa si dirà nell'*iper-spazio. [1] *. Se la funzione γ è continua, la curva si dirà continua, se essa*

[1] Ad esempio, la teoria della Relatività si sviluppa in una geometria a dimensione 4 e le curve le dovremmo considerare nell'iper-spazio quadrimensionale.

è differenziabile, allora essa si dirà anche differenziabile. Il grado di differenziabilità, in genere, si indica con la ***classe di appartenenza:*** *ad esempio, una curva* γ *che ammette la derivata prima in ogni punto si dirà di classe* C^1 *se ammette anche la derivata seconda, allora sarà indicata di classe* C^2 *e così via. La classe* C^0 *è costituita dalle curve che hanno sicuro la sola continuità.*

Dalla definizione precedente risulta immediatamente che tutti i grafici di funzione fanno parte della famiglia delle curve, infatti, data la legge funzionale $y = f(x)$, con $x \in \mathrm{Dom}(f)$, allora si può definire:

$$\gamma : t \mapsto (t, f(t))$$

dove $t \in I = \mathrm{Dom}(f)$ e, chiaramente, $(t, f(t)) \in \mathbb{R}^2$: questa soddisfa alla definizione di curva, nel senso dato precedentemente. D'altra parte ci sono curve che non possono essere definite come grafico di funzione [2] ! alcune di queste le abbiamo anche incontrate: la circonferenza, ad esempio, non può essere *rappresentata* come grafico di funzione, così come l'*ellisse* e tutte quelle curve che abbiano associate a qualche valore delle ascisse, più di un valore delle ordinate [3] . Consideriamo la semplice circonferenza goniometrica: dato che, per l'identità fondamentale della goniometria, $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, si può considerare la seguente applicazione:

$$\gamma : \theta \in [0, 2\pi) \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2$$

che definisce una curva piana. Essa è proprio la nostra circonferenza goniometrica, infatti, se poniamo

$$x = \cos(\theta) \quad \text{e} \quad y = \sin(\theta)$$

allora si ha

$$x^2 + y^2 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

ovvero, in ultima scrittura:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

che rappresenta proprio l'equazione (canonica) della circonferenza goniometrica. Se aggiungiamo l'ampiezza del raggio r, allora:

$$\gamma : \theta \mapsto (r\ \cos(\theta), r\ \sin(\theta)),$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$ rappresenta la circonferenza di raggio r centrata nell'origine:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

[2] Il ché significa che la definizione di curva è più generale di quella di grafico di funzione, comprendendole tutte ma avendo più elementi nella propria famiglia!

[3] Si ricorda che le leggi associative che chiamiamo *funzioni* sono di tipo **univoco**.

L'applicazione γ viene anche detta **parametrizzazione** della curva. È importante notare che l'oggetto geometrico definito dalla parametrizzazione potrebbe coincidere con la "rappresentazione grafica" di un'altra parametrizzazione: ovvero, due (o più) parametrizzazioni possono rappresentare la stessa curva!
Ad esempio, anche:

$$\gamma_1 : t \in [0, \pi) \mapsto (\cos(2\,t), \sin(2\,t)) \in \mathbb{R}^2$$

rappresenta la circonferenza goniometrica, esattamente come la precedente parametrizzazione:

$$\gamma : \theta \in [0, 2\pi) \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2.$$

Ma addirittura:

$$\gamma_2 : u \in [0, 4\pi) \mapsto (\cos(u), \sin(u)) \in \mathbb{R}^2$$

è una parametrizzazione che *disegna* ancora una circonferenza goniometrica! La differenza sostanziale tra le tre parametrizzazioni date è che in γ_1 si "percorre" più velocemente l'intera circonferenza [4] rispetto a γ e, addirittura, in γ_2, la circonferenza si percorre con la stessa velocità di γ, ma per ben due volte! Chiamiamo l'*immagine* di γ il **sostegno** della curva [5] che, essendo un insieme di punti nel piano/spazio, anche se varia la parametrizzazione, per uno stesso oggetto geometrico, coincide. Inoltre chiameremo **curva semplice** quella la cui parametrizzazione è *iniettiva* : significa che essa non ha *auto-intersezioni.* Inoltre, se $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{S}$ è tale che $\gamma(a) = \gamma(b)$ allora la curva si dirà **chiusa** . Una **curva di Jordan** è una curva piana, semplice e chiusa: si dimostra [6] che essa ripartisce il piano in due parti, una limitata [7] ed una illimitata [8] e quindi ogni segmento con un estremo "dentro" la parte di piano delimitata dalla curva (di Jordan) e l'altro nell'altra parte del piano, deve necessariamente intersecare la curva in esattamente un punto [9] !
Abbiamo visto che data una funzione di legge associativa $y = f(x)$,

[4]Infatti il parametro t è limitato all'intervallo $[0, \pi)$ mentre $\theta \in [0, 2\pi)$: la "velocità" con cui si percorre la circonferenza con γ_1 è doppia rispetto a quella con la quale si percorre con γ.

[5]A volte anche **supporto.**

[6]Ma è una dimostrazione abbastanza "complicata" e che utilizza strumenti topologici più avanzati.

[7]Interna alla curva.

[8]Esterna alla curva stessa.

[9]A livello intuitivo è una affermazione ovvia, la cosa meno ovvia è che sia proprio un teorema.

il suo grafico definisce una curva nel senso dato dalla definizione precedente. Se noi partiamo dall'equazione $y = f(x)$ e ricaviamo la sua equivalente $y - f(x) = 0$, possiamo considerare il primo membro come un'unica espressione contenente sia la variabile x che la y ed indicare tale espressione con un'unica scrittura del tipo:

$$F(x, y) = 0.$$

Una scrittura del genere si dice definire **implicitamente** una curva e, come possiamo facilmente dedurre, ogni rappresentazione **esplicita** del tipo $y = f(x)$ può essere ricondotta ad una scrittura implicita del tipo $F(x, y) = 0$. L'equazione analitica della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ fornisce un esempio di curva che si può definire implicitamente ma non esplicitamente! nei fatti possiamo scrivere:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

e ponendo

$$F(x, y) = 0$$

si ottiene esattamente l'equazione analitica della circonferenza data. Questo significa che le rappresentazioni implicite delle *curve* sono di tipo più generale delle esplicite; in verità la rappresentazione **parametrica** della curva, di cui abbiamo trattato finora in questo capitolo, rimane la forma più generale e, quindi, preferibile da utilizzare.

1. Lunghezza di una curva

Per quanto riguarda il problema di determinare la lunghezza di una curva, data una sua parametrizzazione, invitiamo a rileggere il paragrafo 7.6 a pagina 403, non potendo altro che riscrivere qui le stesse cose che avevamo scritto là: dobbiamo enfatizzare il fatto che per calcolare la lunghezza tramite quel metodo, dobbiamo supporre che la curva sia differenziabile e di lunghezza calcolabile. Riportiamo solo il risultato principale che ora ci interessa. Se la curva (piana) è data dalla parametrizzazione:

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^2,$$

allora la sua lunghezza si ricava, tramite l'applicazione del Teorema di Pitagora ad un triangolino infinitesimo, con il calcolo del seguente integrale:

$$\boxed{L_{[a,b]}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}}.$$

Esempio: Si voglia calcolare la lunghezza dell'arco di circonferenza parametrizzata da:

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & \left[\frac{1}{4}\pi\,,\,\frac{2}{3}\pi\right] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \theta & \longmapsto & (3\cos(\theta), 3\sin(\theta)) \end{array}$$

Soluzione: Considerando che $x(\theta) = 2\cos(\theta)$ e $y(\theta) = 3\sin(\theta)$, per i differenziali otteniamo:

$$\mathrm{d}x = -3\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \quad \text{e} \quad \mathrm{d}y = 3\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Ergo:

$$L_{\left[\frac{1}{4}\pi\,,\,\frac{2}{3}\pi\right]}(\gamma) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{9\sin^2(\theta) + 9\cos^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} 3\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= 3 \cdot [\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{5}{4}\,\pi.$$

□

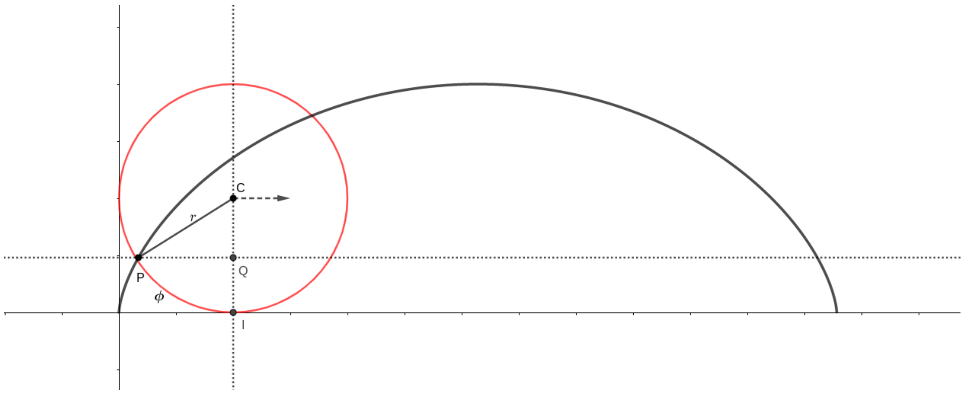
2. La “Elena della Matematica”

La curva su cui ora concentreremo l'attenzione ha così belle proprietà, che è stata soprannominata l'*Elena* della Matematica: il suo nome è propriamente **cicloide** ed è definita come la traiettoria effettuata da un punto della circonferenza che rotola, senza strisciare, su di un piano, per un giro completo [10] . Nell'immediato troveremo l'area sottesa da essa e quanto è lunga, successivamente dimostreremo alcune proprietà fondamentali, che l'hanno resa così famosa [11] . Per iniziare

[10]Se uno osserva la ruota della bicicletta, delle automobili o dei motoveicoli, un punto del battistrada descrive delle cicloidi ogni volta che non si effettuano “sgommate” o “derapate”.

[11]In particolare l'**isocronia**, la **tautocronia** e, soprattutto la **brachistocronia**. Significa, la prima proprietà, che pendoli oscillanti su archi di cicloide hanno stesso periodo a prescindere dall'ampiezza dell'oscillazione stessa. La seconda proprietà citata significa che, un punto materiale pesante, che percorre nel vuoto un arco di cicloide, arriva alla sua posizione più bassa nel medesimo tempo, qualunque sia l'altezza del punto di partenza da cui si lascia cadere! Entrambe queste affermazioni sono state dimostrate da **Huygens**, durante i suoi studi per la costruzione di un orologio a pendolo “ideale”. La terza proprietà fu dimostrata e lanciata come *sfida* e quindi problema da risolvere in una gara di Matematica, da **Johann Bernoulli**, al quale risposero, risolvendo il problema, sia **Leibniz**, sia sir **Isaac Newton** (nonostante fosse già “avanti con l'età”), sia il fratello **Jakob Bernoulli**: consiste nel trovare la traiettoria che un “grave” deve seguire per raggiungere nel più breve tempo, dal punto A, il punto B, posto ad altezza inferiore, soggetto unicamente alla forza del suo peso e lasciato cadere con velocità iniziale nulla.

la trattazione di questa celeberrima curva, dobbiamo dapprima trovare una sua parametrizzazione.



Con la notazione della figura precedente, indicando con ϕ l'angolo che si forma tra la "verticale" ed il raggio che ha un estremo nella posizione raggiunta dal punto che sta rotolando, allora la lunghezza del percorso $\widehat{IP}$ è pari a $r \cdot \phi$ ed è esattamente uguale alla distanza di I dall'origine del sistema coordinato [12]. Inoltre $\overline{CQ} = r \cdot \cos(\phi)$ e $\overline{PQ} = r \cdot \sin(\phi)$, pertanto, le coordinate del punto P, che descrive la cicloide, saranno:

$$x_P = r \cdot \phi - r \cdot \sin(\phi), \quad y_P = r - r \cdot \cos(\phi).$$

Possiamo assumere questa come parametrizzazione della cicloide tramite l'angolo ϕ :

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow (x_P, y_P).$$

Calcoliamo ora i due differenziali:

$$\mathrm{d}x = r(1 - \cos(\phi))\, \mathrm{d}\phi \quad \text{e} \quad \mathrm{d}y = r\, \sin(\phi)\mathrm{d}\phi.$$

La lunghezza della cicloide è, quindi:

$$L_{[0,2\pi]}(\gamma) = \int_0^{2\pi} r \sqrt{[1 - \cos(\phi)]^2 + \sin^2(\phi)}\, \mathrm{d}\phi =$$

$$= r \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\, \cos(\phi) + \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)}\, \mathrm{d}\phi = r \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\, \cos(\phi)}\, \mathrm{d}\phi =$$

[13]

$$= 2r \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos(\phi)}{2}}\, \mathrm{d}\phi = 2r \cdot \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\, \mathrm{d}\phi =$$

[12] Dato che si sta supponendo che la circonferenza rotola, ma non striscia.
[13] Utilizzando la formula di bisezione.

[14]

$$= 4r \cdot \int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 4r \cdot [-\cos(t)]_0^{\pi} = 4r + 4r = 8r.$$

Quindi risulta che ***la lunghezza della cicloide è quattro volte il diametro della circonferenza che la genera!***

Per calcolare l'area sottesa basta determinare il valore dell'integrale:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ora, $y = f(x)$ e $\mathrm{d}x$ l'abbiamo calcolato poco prima, per cui, sostituendo, otteniamo:

$$\text{Area sottesa} = \int_0^{2\pi} y\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} (r - r\cos(\phi)) \cdot r\,(1 - \cos(\phi))\,\mathrm{d}\phi =$$

$$= r^2 \cdot \int_0^{2\pi} (1 - \cos(\phi))^2\,\mathrm{d}\phi = r^2 \cdot \int_0^{2\pi} 1 - 2\cos(\phi) + \cos^2(\phi)\,\mathrm{d}\phi.$$

Di questo integrale, il primo addendo dà, calcolato tra 0 e 2π il valore 2π. Il secondo addendo dà come valore 0, dato che su un intervallo di periodicità il coseno [15] ha area segnata negativa che “pareggia” quella positiva e quindi la loro somma è nulla. L'ultimo addendo dà l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\phi)\,\mathrm{d}\phi = \left[\frac{\sin(t)\cos(t) + t}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

[16] e quindi l'area sottesa risulta essere:

$$\text{Area sottesa} = r^2 \cdot (2\pi + \pi) = 3 \cdot \pi\, r^2.$$

Quindi risulta che ***l'area sottesa da una cicloide è il triplo dell'area del cerchio generatore!***

2.1. Principi di ottimizzazione e Legge di Snell. Per dimostrare la brachistocronia della cicloide, abbiamo bisogno di risolvere un problema di ottimizzazione e da questo ricavare una “principio” [17] noto come **legge di Snell** . Il problema, in verità, l'abbiamo già affrontato e risolto nel capitolo dedicato alla risoluzione dei “problemi di ottimizzazione”, non essendo altro che il *Problema n.882-Demidovic* a pagina 295. Lo ricordiamo qui di seguito e lo risolviamo, nuovamente, dato

[14] Tramite sostituzione $\frac{\phi}{2} = t$ da cui $\mathrm{d}\phi = 2\mathrm{d}t$ e $\phi \in [0, 2\pi] \mapsto t \in [0, \pi]$.

[15] Così come, d'altra parte, anche la funzione $\sin()$.

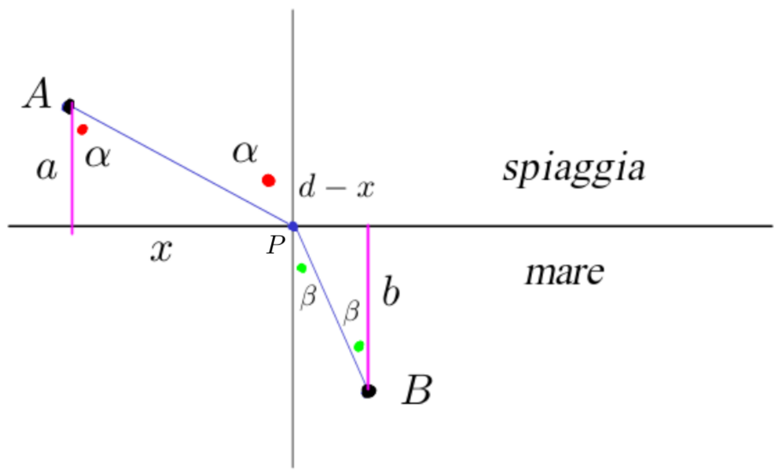
[16] Si invita a verificare il calcolo del precedente integrale definito!

[17] Conosciuto già da Fermat.

che [18] "repetita iuvant" [19] .

Problema 18 (spiaggia-mare). *Trovare il tragitto che colleghi il punto A ed il punto B nel minor tempo possibile, sapendo che essi si trovano uno sulla spiaggia e l'altro nel mare e che la velocità con cui ci si può muovere sulla spiaggia (v_s) è maggiore della velocità con cui ci si può muovere in mare (v_m): $v_s > v_m$* [20]

Soluzione: Facendo riferimento alla seguente figura ed indicando con d la distanza tra le proiezioni ortogonali di A e B sulla "linea" che separa la spiaggia dal mare:



possiamo scrivere le seguenti quantità:

$$d(A,P) = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad d(P,B) = \sqrt{(d-x)^2 + b^2}.$$

Per cui, indicando con T_s il tempo che si impiega nel "viaggiare" a velocità v_s sulla spiaggia e con T_m quello che si impiega per arrivare

[18]Come dice il detto latino.

[19]Ma anche -e soprattutto- perché in una normale programmazione della scuola tecnica industriale, i problemi di ottimizzazione si affrontano al quarto anno mentre il calcolo integrale, che stiamo affrontando in questo capitolo, al quinto e, magari, qualcuno non ha i ricordi tanto vividi.

[20]Evidentemente questo è un problema contestualizzato "al mare", ma si generalizza facilmente pensando a due "mezzi" diversi che costringono a muoversi con velocità diverse: è quello che avviene quando si immerge un cucchiaino in un bicchiere d'acqua! il segnale luminoso nell'aria viaggia più velocemente che nell'acqua e quindi il cucchiaino sembra essere "piegato" se non, addirittura, "spezzato" quando supera il pelo dell'acqua. Questo fenomeno è noto come **rifrazione** .

al punto B, con velocità v_m dentro il mare, possiamo scrivere:

$$T_s = \frac{d(A,P)}{v_s} \quad \text{e} \quad T_m = \frac{d(P,B)}{v_m}.$$

Il tempo totale -da rendere minimo- è funzione della sola distanza x, indicata in figura ed è dato dalla somma dei due tempi indicati prima:

$$T(x) = T_s + T_m \ = \ \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_s} + \frac{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}{v_m}.$$

Determiniamo i punti critici, uguagliando, al solito, la derivata a zero:

$$\frac{d\,T(x)}{d\,x} = \frac{x}{v_s \cdot \sqrt{a^2+x^2}} + \frac{-(d-x)}{v_m \cdot \sqrt{(d-x)^2+b^2}}$$

per cui $T'(x) = 0$ implica:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \cdot \frac{1}{v_s} = \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}} \cdot \frac{1}{v_m}.$$

Dal disegno [21] si ricava che

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sin(\alpha)$$

ed analogamente si osserva [22] che

$$\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+x^2}} = \sin(\beta),$$

ergo **il tempo minimo si ha quando:**

$$\boxed{\frac{\sin(\alpha)}{v_s} = \frac{\sin(\beta)}{v_m}}.$$

Accettando la terminologia standard e chiamando:

$$\alpha = \text{angolo di incidenza}$$

e

$$\beta = \text{angolo di rifrazione}$$

[21]Si guardi il triangolo disegnato *lato spiaggia*, per il quale l’ipotenusa è proprio $\sqrt{a^2+x^2}$.

[22]Si consideri il triangolo disegnato *lato mare*, per il quale l’ipotenusa è proprio $\sqrt{(d-x)^2+b^2}$.

segue la famosa **"legge di Snell"** [23] :

$$\boxed{\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(\text{ a. incidenza })}{\sin(\text{ a. rifrazione })} = \frac{v_s}{v_m}}.$$

Indichiamo con il *pedice* α o β le velocità dove si considera l'angolo corrispondente, la seguente uguaglianza è conosciuta come **condizione di brachistocronia** :

$$\boxed{\frac{\sin(\alpha)}{v_\alpha} = \frac{\sin(\beta)}{v_\beta}}$$

che è la relazione che ci serve per continuare la discussione sulle proprietà della cicloide.

2.2. Conservazione dell'Energia Meccanica. Prima di procedere con la dimostrazione della proprietà di brachistocronia della cicloide, richiamiamo dei concetti fondamentali della meccanica classica [24] Si chiama **Energia** la capacità di compiere **Lavoro** , ove quest'ultimo è definito dal prodotto ***"forza per spostamento"***, per la sola componente della forza lungo la direzione del moto [25] . Consideriamo ora la seconda legge della dinamica: $F = m \cdot a$ ed anche la definizione di accelerazione come rapporto: $a = \frac{\Delta V}{\Delta t}$. Possiamo allora porre:

$$L = F \cdot \Delta S \Longleftrightarrow L = m\, a \cdot \Delta S$$

essendo ΔS la distanza percorsa dal corpo. Quindi ancora:

$$L = m\,\frac{\Delta V}{\Delta t} \cdot \Delta S = m\,\Delta V \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} = m\,\Delta V \cdot V.$$

Passando al limite per $\Delta t \to 0$ e, conseguentemente, $\Delta V \to \mathrm{d}\,V$ e $L \to \mathrm{d}\,L$, possiamo scrivere:

$$\mathrm{d}L = m\,v\,\mathrm{d}\,v.$$

Per ottenere il lavoro totale, sul percorso, basta integrare sull'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$:

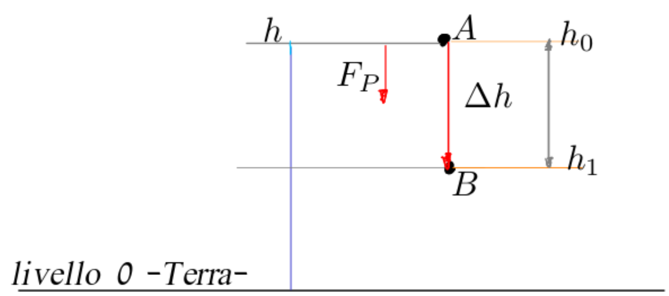
$$L = \int_{t_0}^{t_1} m\,v\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\,m \cdot \left[v^2(t_1) - v^2(t_0)\right].$$

[23] Che si applica anche nel caso della rifrazione della luce, quando essa passa da un mezzo ad un altro ad indice di rifrazione diverso, dato che ***"in Natura"*** si tende sempre a "fare risparmio": la luce passa tra due mezzi risparmiando tempo.

[24] Dovrebbero essere argomenti svolti già nel corso di Fisica, ma immaginando che anche questi siano ricordi lontani o, comunque, non proprio vividi, preferiamo rifare il discorso in questo breve paragrafo.

[25] In breve, è un *prodotto scalare* tra i due vettori.

Se chiamiamo $T = \frac{1}{2}m\,v^2$ l'**Energia cinetica** , allora l'integrazione di prima esprime il fatto che ***il lavoro è uguale alla variazione di energia cinetica, posseduta dal corpo, per il solo fatto che si muove.*** D'altra parte, immaginiamo che un corpo di massa m sia posto ad altezza h sul livello zero della terra: visto che se viene lasciato cadere, compie lavoro per tramite della forza peso, allora deve potersi esprimere una energia dovuta solo alla posizione occupata nello spazio (dal punto materiale). Essa viene definita **Energia potenziale** e la determiniamo come segue.



Sia $F_P = -m\,g$ la forza peso [26] ed L il lavoro compiuto da essa per spostare il “grave” dal punto A al punto B, come in figura. Possiamo allora scrivere:

$$L = F_P \cdot \Delta h = -m\,g \cdot \Delta h.$$

Poniamo, seguendo le convenzioni internazionali, $U = m\,g\,h$ e la chiamiamo **Energia Potenziale** ed otteniamo che ***il lavoro compiuto dalla forza peso uguaglia la variazione dell'energia potenziale, cambiata di segno***. Ora, dato che $L = \Delta T$ ed anche $L = -\Delta U$ allora:

$$\Delta T = -\Delta U$$

ovvero:

$$T_f - T_i = U_i - U - f$$

[27] da cui:

$$\boxed{T_f + U_f = T_i + U_i}.$$

Chiamando

$$E = T + U$$

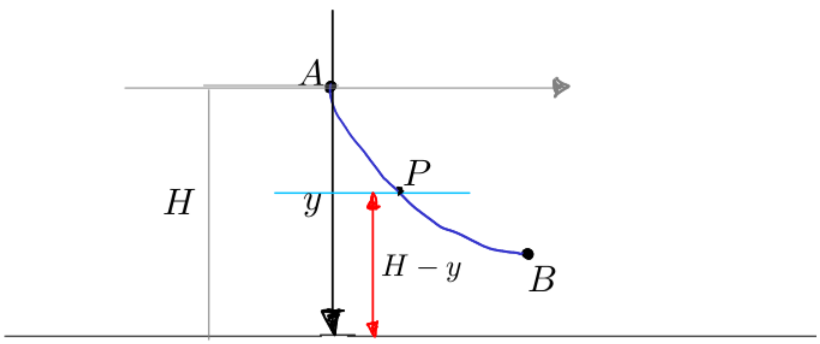
l'**Energia Totale**, detta anche **Energia Meccanica** , la scrittura nel riquadro esprime il **principio di Conservazione dell'Energia** , che

[26] Ricordiamo che $g \approx 9.81\,m/s^2$ è l'accelerazione di gravità (qui sulla Terra).

[27] Ove i pedici stanno: i per “iniziale e f per “finale”.

vale nel caso di forze conservative, tipo le *forze centrali"* [28] tra le quali si annovera la "forza peso", la cui intensità dipende dalla distanza dei corpi [29] .

2.2.1. *Piccola applicazione del principio di conservazione.* Supponiamo che un punto materiale "scenda" dal punto A, posto ad altezza H, sul livello del suolo, al punto B, lungo una data traiettoria γ. Per il principio di conservazione dell'energia, la velocità con cui arriva nella posizione finale è indipendente dal percorso γ, ma dipende unicamente dall'*altezza* a cui si trova rispetto al punto di partenza. Per capire questa cosa, consideriamo il seguente disegno: piazziamo in A l'origine di un sistema cartesiano con l'asse delle ordinate orientato verso il basso, nella direzione della forza peso. Vogliamo conoscere la velocità raggiunta dal punto materiale nel momento in cui si trova a "quota y", se viene lasciato cadere da A con velocità iniziale $v_A = 0$.



Per il principio di conservazione:

$$mg\,(\cancel{H} - y) + \frac{1}{2} m\, v_P^2 = \cancel{mg\,H} + \cancel{\frac{1}{2} m\, v_A^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\cancel{m} v_P^2 - \cancel{m}\, g\, y = 0$$

da cui [30] :

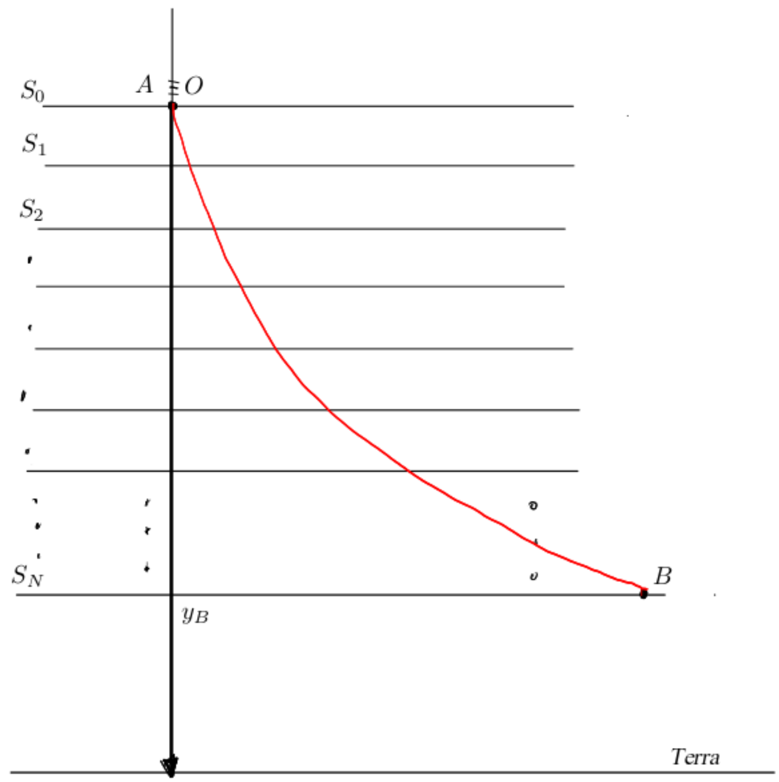
$$v_P = \sqrt{2g\,y}.$$

[28]Ovvero quelle che sono dirette tutte verso uno stesso punto.

[29]E dalle loro masse, notoriamente con la legge dell'**inverso del quadrato**.

[30]Si osservi una delle più notevoli e paradossali considerazioni che fece già **Galileo** ai suoi tempi: la massa di un oggetto non influenza la velocità di caduta e quindi, a parità di percorso, una piuma o una pallina di piombo devono arrivare a terra nello stesso tempo! ...chiaramente l'esperimento può riuscire sono in condizioni ideali, ovvero trascurando la resistenza dell'aria, possibilmente -quindi- "nel vuoto".

2.3. La cicloide è brachistocrona. Abbiamo tutti gli strumenti per dimostrare la proprietà di brachistocronia della cicloide. Iniziamo a sistemare un sistema di coordinate con origine nel punto di partenza A e asse x a livello del "terreno", con l'asse delle ordinate orientato verso il basso, come nella figura seguente. Suddividiamo lo spazio (verticalmente) che separa A dal punto B in N *fasce* equidistanziate opportunamente vicine.



La distanza tra due rette che delimitano queste fasce è:

$$d_N = \frac{y_B - y_A}{N} = \frac{y_B}{N}.$$

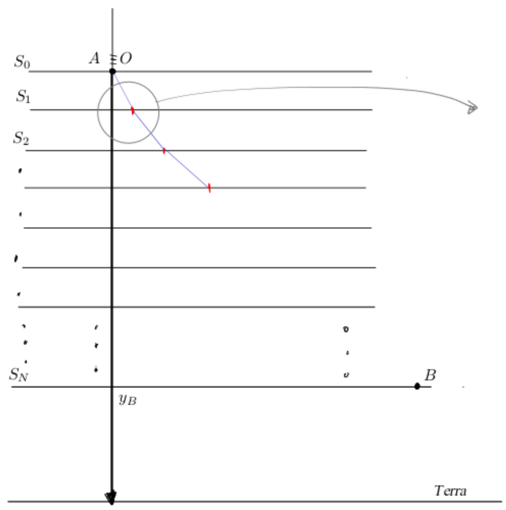
Possiamo supporre, per N sufficientemente grande, che la velocità con cui l'oggetto attraversa ogni banda si mantenga costante e indichiamo con v_i la velocità nello "*strato*" $i-$esimo. Per quanto abbiamo detto nel paragrafo precedente, possiamo anche dire che:

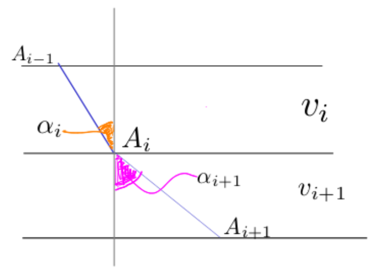
$$v_i = \sqrt{2\,g \cdot i\,d_N}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, N.$$

Ora cerchiamo tra tutte le "*spezzate*", quella che riduce il tempo... ma questo, avendo in ogni "banda" velocità diverse. è come risolvere *ripetutamente* il problema n. 18 [31] a pagina 416 . Per cui, detti α_i gli angoli di incidenza e α_{i+1} di rifrazione, strato per strato, deve essere [32] :

$$\frac{\sin(\alpha_i)}{v_i} = \frac{\sin \alpha_{i+1}}{v_{i+1}} \quad \forall\, i = 1,\, 2, \ldots N-1.$$

Indichiamo ora con ρ_N il numero [33] che uguagli tutti questi rapporti.





Per $N \to \infty$ la spezzata diventa una curva (liscia), tale per cui se indichiamo con ρ il limite $\rho_N \xrightarrow[N\to\infty]{} \rho$, allora:

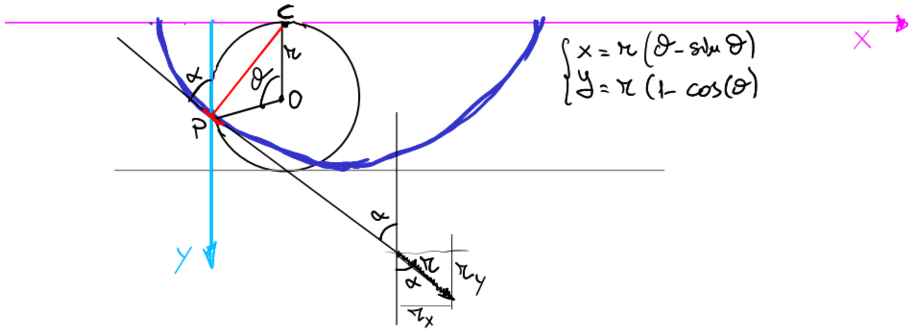
$$\frac{\sin(\alpha)}{v_y} = \rho,$$

dove α è l'angolo che si forma tra la tangente alla curva e la retta verticale. Ma ora sappiamo che $v_y = \sqrt{2g\,y}$ quindi segue che:

$$\boxed{\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{y}} = \text{costante}\ .}$$

Basta ora dimostrare che l'equazione della cicloide soddisfa a questa ultima condizione. A tal fine si consideri la seguente figura [34] .

[31]Che abbiamo soprannominato **spiaggia-mare**.
[32]In accordo con la Legge di Snell.
[33]Dipendente da N.
[34]Ringraziamo il prof. Vincenzo Rubino per la dimostrazione che segue.



Il versore $\hat{r}$ indicato in figura, è dato da:

$$\hat{r} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{|\vec{v}|}\,(r(1-\cos\theta), r\sin\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\cos(\theta)}}\,(1-\cos(\theta), \sin(\theta))\,.$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{y}} = \frac{\cancel{\sqrt{1-\cos(\theta)}}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{r}\cdot\cancel{\sqrt{1-\cos(\theta)}}} = \frac{1}{\sqrt{2\,r}}$$

che dimostra che quel rapporto, per la cicloide, è costante. Ma, in alternativa, un'altra dimostrazione [35], ancora più elegante, è la seguente. Dato che il *il punto di contatto è esso stesso centro di rotazione* [36] allora il segmento $\overline{CP} \perp \mathbf{r}$. Quindi $\overline{CP} = 2r\,\sin(\alpha)$ e quindi $y = \overline{CP}\,\sin(\alpha) = 2\,r\sin^2(\alpha)$. Ergo:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{y}} = \frac{\cancel{\sin(\alpha)}}{\sqrt{2\,r}\cancel{\sin(\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{2\,r}}$$

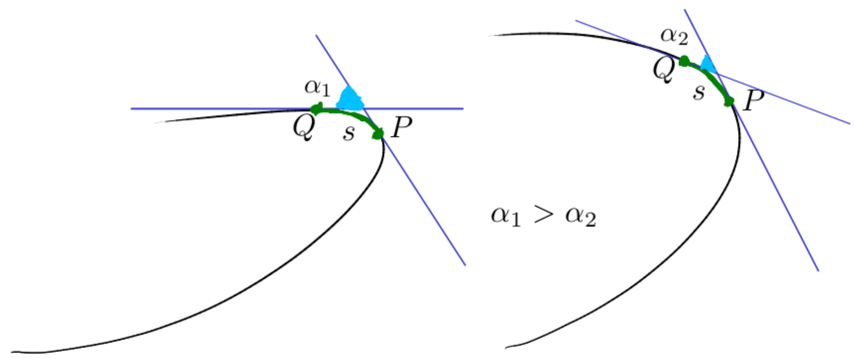
da cui la tesi che volevamo dimostrare [37] .

2.4. Curvatura, evoluta ed evolventi. Prima di dimostrare un'altra importante proprietà della cicloide, introduciamo un concetto fondamentale di geometria differenziale: la **curvatura** di una curva. Per rendere la trattazione più intuitiva osserviamo la seguente figura in cui, a sinistra, si vede una "traiettoria" più "stretta" (o "chiusa") mentre, a destra, se ne può osservare una più "aperta" (o "larga").

[35]Sempre originata dall'abile mente del prof. V. Rubino.

[36]Nei fatti è *fermo ad ogni istante!* si invita il lettore a ragionare su tale affermazione.

[37]Galileo pensava che l'arco di circonferenza fosse la curva brachistocrona, ma si può dimostrare che la sua equazione parametrica -e si invita lo studente attento a farlo!- non soddisfa alla condizione di brachistocronia $\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{y}}$ = costante, quindi -almeno per un volta- il nostro amato Galileo si sbagliava.



La curvatura serve a misurare quanto una curva è "più aperta o chiusa" nei pressi di un punto [38] . Consideriamo l'ascissa curvilinea a partire dal punto P [39] e spostiamoci in un punto Q, vicino, a distanza s da P. L'angolo che si forma tra le rette tangenti nei punti P e Q sia chiamato α. Ora, qualsiasi numero noi vogliamo che rappresenti la "*curvatura*", esso deve essere definito in modo tale che, a parità di lunghezza s, più è grande l'angolo α maggiore sarà la sua misura e, a parità di angolo α, più è grande il percorso s per arrivare da P a Q, minore sia il numero [40] . Ovvero, possiamo ben scrivere:

$$\boxed{\text{“Curvatura”} \propto \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = K}.$$

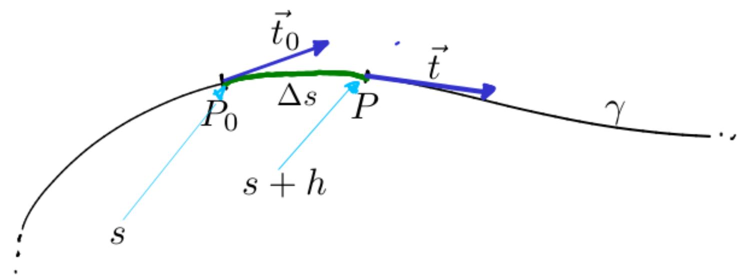
Possiamo definire la curvatura proprio come quel rapporto indicato nel riquadro. Per rendere operativa tale definizione, ovvero poter calcolare la curvatura, a partire da una parametrizzazione della curva, facciamo le seguente osservazioni.

2.4.1. *Qualche formula interessante.* Se noi consideriamo un oggetto che si muove lungo una traiettoria γ, considerando un punto P_0 da cui iniziamo a misurare le distanze e chiamiamo con Δs la lunghezza d'arco da P_0 al punto P, rivolgiamo l'attenzione ai vettori di posizione ed ai vettori tangenti a γ nei punti P_0 e P.

[38] Ovvero, come abbiamo più volte detto in altre occasioni, è una **proprietà locale**.

[39] Ovvero la lunghezza dell'arco di curva che origina nel punto P.

[40] Che rappresenta la curvatura.



Si ha:

$$\left|\frac{\mathrm{d}\,\vec{P}}{\mathrm{d}\,s}\right| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{P-P_0}{h}\right| = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{s}+h-\cancel{s}}{h} = 1,$$

da cui si deduce che *se si parametrizza la curva tramite la* ***lunghezza d'arco*** allora il vettore $\left|\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}\,s}\right| = 1$; indichiamo tale vettore con $\hat{t} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}s}$ e lo chiamiamo **versore tangente.** Ora, dato che il modulo di un vettore è definito come la radice del prodotto scalare del vettore con se stesso, allora ne deduciamo che:

$$<\hat{t}, \hat{t}>= 1$$

e derivando:

$$2\ <\hat{t}, \frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s}>= 0,$$

da cui ricaviamo che $\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s} \perp \hat{t}$, ovvero *la derivata è perpendicolare al versore tangente* e quindi è [41] *diretta secondo* ***la normale*** alla curva. Inoltre, dalla definizione, ricaviamo:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s} = \lim_{h\to 0}\frac{\hat{t}(s+h)-\hat{t}(s)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\hat{t}(s+h)-\hat{t}(s)}{\Delta\alpha}\cdot\frac{\Delta\alpha}{h} = K\cdot\hat{n},$$

essendo la prima frazione tendente all'unità [42] ed $h = \Delta s$.
Abbiamo trovato, quindi, una “formula” per la curvatura della curva nel punto P :

$$K = \left|\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s}\right|$$

[41] Come si dice.

[42] Nei fatti l'arco di circonferenza -sono versori e quindi si muovono su una circonferenza!- compreso tra i vettori $\hat{t}(s+h)$ e $\hat{t}(s)$ si confonde con l'angolo $\Delta\alpha$, mano a mano che h tende a zero.

che, però, vuole la parametrizzazione della curva tramite ascissa curvilinea. Generalmente, invece, la parametrizzazione è tramite un parametro t qualsiasi e quindi conviene determinare una formula più conveniente e maneggevole. Prima di tutto osserviamo che:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} \cdot |\vec{P}\,'|;$$

infatti, dal triangolo rettangolo infinitesimo possiamo ricavare:

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\vec{P}\,'(t)|.$$

Possiamo quindi scrivere:

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}t}}{|P'|};$$

consideriamo il versore $\hat{t} = \frac{\vec{P}\,'}{|\vec{P}\,'|}$ e moltiplichiamo per $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, otteniamo:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{t} = \cancel{|\vec{P}\,'|} \cdot \frac{\vec{P}\,'}{\cancel{|\vec{P}\,'|}}.$$

La derivata seconda del vettore posizione P è:

$$\vec{P}\,'' = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\hat{t} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\,\hat{t}}{\mathrm{d}t}.$$

Moltiplicando vettorialmente per $\vec{P}\,'$ si ottiene:

$$\vec{P}\,' \wedge \vec{P}\,'' = \underbrace{\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \cdot \vec{P}\,' \wedge \hat{t}}_{=0 \text{ poiché } \vec{P}\,' = |\vec{P}\,'| \cdot \hat{t}} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{P}\,' \wedge \frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}t} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \cdot |\vec{P}\,'|\,\hat{t} \wedge \frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 \cdot \underbrace{\hat{t} \wedge \frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}t}}_{\text{che ha modulo } \left|\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}t}\right|}$$

ergo:

$$|\vec{P}\,' \wedge \vec{P}\,''| = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 \cdot \left|\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}t}\right| = |\vec{P}\,'|^2 \cdot \left|\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}t}\right|.$$

Utilizzando quest'ultima uguaglianza ricaviamo la formula seguente:

$$K = \frac{\left|\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}t}\right|}{|\vec{P}\,'|} = \frac{|\vec{P}\,' \wedge \vec{P}\,''|}{|\vec{P}\,'|^2 \cdot |\vec{P}\,'|}$$

e, infine:

$$\boxed{K = \frac{|\vec{P}\,' \wedge \vec{P}\,''|}{|\vec{P}\,'|^3}}.$$

Giova ricordare che:

$$|\vec{P}\,' \wedge \vec{P}\,''| = x'\,y'' - x''\,y'$$

e

$$|\vec{P}\,'| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}.$$

Esempio: Si calcoli la curvatura della circonferenza in un suo punto, parametrizzata da:

$$t \mapsto (r\cos(t), r\sin(t)) \;= \vec{P}(t),\;\; t \in [0, 2\pi).$$

Risposta: Innanzitutto ricaviamo:

$$\vec{P}\,' = (-r\sin(t), r\cos(t))$$

e, successivamente:

$$\vec{P}\,'' = (-r\cos(t), -r\sin(t)).$$

Per cui si ha:

$$|\vec{P}\,' \wedge \vec{P}\,''| = (-r\sin(t))^2 - (-r^2\cos^2(t)) = r^2(\sin^2(t) + \cos^2(t)) = r^2.$$

D'altra parte [43] :

$$|\vec{P}\,'| = \sqrt{(-r\sin(t))^2 + (r\cos(t))^2} = \sqrt{r^2} = r.$$

Quindi la curvatura in un qualsiasi punto della circonferenza è data da:

$$K = \frac{r^2}{r^2} = \frac{1}{r},$$

ovvero è pari all'inverso del raggio della circonferenza stessa [44] .

□

Possiamo ora immaginare di "piazzare" per ogni punto della curva una circonferenza tangente: allora i raggi invertiti rappresentano la curvatura della circonferenza e, in ultima analisi, della curva stessa! d'altra parte, più sono piccoli i raggi tali circonferenze, maggiore è la curvatura stessa. Il cerchio passante per i tre punti, che tendono a quello in cui si vuole determinare la circonferenza tangente, si chiama **cerchio**

[43] La posizione è data dal raggio e dall'angolo, ma dato che il raggio è fisso, evidentemente il modulo del vettore posizione è costante e pari al raggio stesso, ma lo calcoliamo tramite formula, giusto per esercizio.

[44] Dimostreremo, più avanti nel libro, che l'unica curva piana a curvatura costante è la circonferenza.

osculatore . I centri di questi cerchi diconsi **centri di curvatura** mentre i raggi, **raggi di curvatura** . Il luogo dei centri di curvatura si chiama **evoluta** della curva di partenza mentre la curva stessa si chiama **evolvente** della sua curva evoluta.

Esempio: Si trovi l'evoluta della parabola parametrizzata da:

$$t \mapsto (t, t^2) \ = \vec{P}(t).$$

Risposta: Come prima troviamo derivata prima e derivata seconda:

$$\vec{P}\,' = (1, 2t) \quad \text{e} \quad \vec{P}\,'' = (0, 2).$$

Da queste informazioni ricaviamo:

$$K = \frac{|\vec{P}\,' \wedge \vec{P}\,''|}{|\vec{P}\,'|^3} = \frac{2}{(\sqrt{1+4t^2})^3}.$$

Quindi, l'inverso della curvatura, ovvero il *raggio di curvatura* è:

$$\rho = \frac{1}{K} \ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(1+4t^2)^3}.$$

Possiamo scrivere l'equazione [45] dell'evoluta trovando il versore normale ed "allungandolo" di un fattore ρ, a partire dal generico punto sulla parabola.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{quindi} \quad |\vec{n}| = \sqrt{1+4t^2}$$

da cui:

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'evoluta è quindi:

$$\vec{P} + \rho\,\hat{n} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\sqrt{(1+4t^2)^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

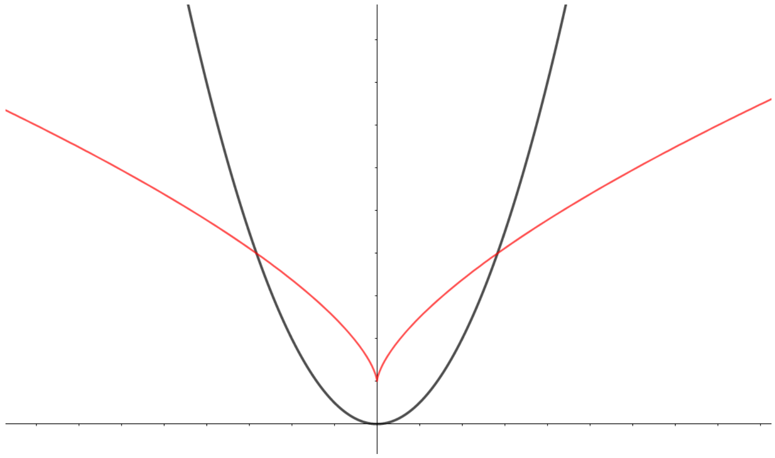
$$= \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t\,(1+4t^2) \\ \frac{1}{2}\,(1+4t^2) \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo la parametrizzazione:

$$t \mapsto \left(-4t^3, \frac{t^2\,(1+4t^2)}{2} \right)$$

Nella figura seguente la parabola (in nero) con la sua evoluta (in rosso).

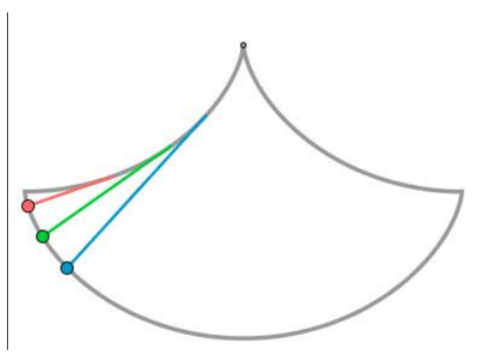
[45] Vettoriale.



Si invita lo studente appassionato a creare una animazione con Geogebra, in cui si vede il cerchio osculatore spostarsi tangenzialmente sui punti della parabola ed il cui centro descrivere l'evoluta della parabola.

□

2.5. L'evoluta della cicloide. Dopo la scoperta, da parte di Huygens, della isocronia dei pendoli che descrivono traiettorie su archi di cicloide, egli stesso ebbe il problema di poter realizzare un tale pendolo. La soluzione al problema fu la scoperta di un'ulteriore proprietà della cicloide: *l'evoluta di una cicloide è essa stessa una cicloide!* Nell'immagine seguente si fa vedere come si potrebbe realizzare un pendolo “cicloidale”, semplicemente facendo “avvolgere” un filo teso [46] su due semi-cicloidi: una a destra ed una a sinistra, che condividono il punto cuspidale centrale. Il pendolo, purtroppo, non è comunque realizzabile se non a livello teorico, dato che la dispersione di energia dovuta alle forze di attrito, rende inutile la realizzazione dell'orologio stesso.



TEOREMA 20. *L'evoluta di una cicloide è essa stessa una cicloide.*

[46] Quindi in modo tangenziale.

Dimostrazione: Partiamo dalla parametrizzazione della cicloide:

$$t \mapsto (r\,t - r\sin(t), t - r\cos(t)) \;= \vec{P}(t).$$

Calcoliamo le prime due derivate:

$$\vec{P}\,'(t) = (r - r\cos(t), r\sin(t)) \quad \text{e} \quad \vec{P}\,''(t) = (r\sin(t), r\cos(t)).$$

A questo punto si ha:

$$|\vec{P}\,' \wedge \vec{P}\,''| = r\cos(t)\cdot[r - r\cos(t)] - r^2\sin^2(t) = r^2\cdot[\cos(t) - 1]$$

e

$$|\vec{P}\,'| = r\sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} = r\sqrt{2 - 2\cos(t)}.$$

Per cui

$$K = \frac{\cancel{r^2}\,(\cos(t) - 1)}{r^{\cancel{3}}\sqrt{(2-2\cos(t))^3}}$$

da cui

$$\rho = \frac{1}{K} \;= \frac{r\sqrt{8(1 - \cos(t))^3}}{\cos(t) - 1}.$$

Ora calcoliamo il versore normale:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r - r\cos(t) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{n}| = r\sqrt{\sin^2(t) + 1 - 2\cos(t) + \cos^2(t)} =$$

$$= r\sqrt{2 - 2\cos(t)},$$

ergo:

$$\hat{n} = \frac{1}{r\sqrt{2(1 - \cos(t))}} \cdot \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r - r\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Da questi risultati ricaviamo l'equazione vettoriale dell'**evoluta:**

$$\vec{P} + \rho\,\hat{n} = \begin{pmatrix} rt - r\sin(t) \\ r - r\cos(t) \end{pmatrix} + \frac{\cancel{r}\sqrt{8\,(1 - \cos(t))^3}}{\cos(t) - 1}\cdot\frac{1}{\cancel{r}\sqrt{2\,(1 - \cos(t))}} \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r - r\cos(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} rt - r\sin(t) - r\sin(t)\cdot(-2) \\ r - r\cos(t) + [r - r\cos(t)]\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rt + r\sin(t) \\ r\cos(t) - r \end{pmatrix}$$

che rappresenta un'altra cicloide (traslata).

c.v.d.

3. Rette e piani nello spazio

Richiamiamo al lettore quanto già spiegato nei capitoli di geometria analitica, per quanto riguarda il discorso sui vettori e le operazioni che con essi si possono effettuare: diciamo che lo facciamo come utilità pratica, in modo che tutta la sezione risulti *autocontenuta* e non bisogna andare a cercare, nel libro, gli argomenti utili per il prosieguo del discorso.

3.1. I vettori nello spazio. Come una coppia di numeri identifica in modo univoco un punto nel piano, in cui si sia posto un sistema di riferimento cartesiano, così una terna di numeri definisce in modo univoco un punto nello spazio, nel quale si sia posto un sistema di riferimento costituito da tre assi ortogonali tra di loro e passanti per uno stesso punto, detto origine del sistema. Pertanto $P = (p_1, p_2, p_3)$ è un punto nello spazio. Considerando l'origine del sistema di riferimento come il punto di applicazione di un vettore, il cui secondo estremo è il punto P, possiamo dire che il vettore $\overrightarrow{OP}$ è univocamente determinato dalle coordinate di P. Per dire che stiamo considerando tali coordinate come le componenti di un vettore, anziché come coordinate di un punto, si usa "trasporre" la scrittura e scrivere la terna in colonna: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$. Esattamente come nel caso bidimensionale, definiamo la somma di vettori operando "componente per componente", ovvero sommando le componenti che occupano lo stesso posto e, geometricamente, rappresentando il risultato di tale operazione come la diagonale del parallelogramma, due lati del quale sono i vettori che si sommano. Moltiplicare un numero per un vettore, il ché si fa moltiplicando ciascuna componente per quel dato numero, significa semplicemente allungare o comprimere il vettore e, al più, anche, cambiargli il verso di percorrenza, senza comunque mai modificare la sua "inclinazione". Ora, nel piano si poteva immediatamente definire la direzione di un vettore come il rapporto tra la seconda e la prima componente: nello spazio questa definizione è priva di senso, in quanto è presente anche una terza componente. Ci accontentiamo allora di dire che la direzione di un vettore nello spazio è la retta su cui esso giace e quindi, essa è già descritta dal vettore stesso! Infatti, la retta passante dal punto P e dall'origine $O(0, 0, 0)$ è data da:

$$r:\ \lambda \cdot \overrightarrow{OP}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Se consideriamo il vettore i cui estremi sono A e B, allora esso, *trasportato nell'origine* del sistema di riferimento, è dato da $\overrightarrow{AB} = B - A$

ed i punti della retta individuata da A e B, saranno dati dal vettore $\vec{A}$ [47] a cui si somma un multiplo qualsiasi del vettore $\overrightarrow{AB}$, quindi l'equazione della retta è data da:

$$r_{AB}: \vec{A} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

DEFINIZIONE 11. *Dato un insieme di vettori* S, *che chiameremo* spazio di vettori [48] *e un suo sottoinsieme proprio* $\mathcal{B}$, *quest'ultimo si dirà* ***base*** *dello spazio* S [49] *se tutti i vettori di* S *si possono scrivere univocamente* [50] *come somma di multipli opportuni dei vettori di* $\mathcal{B}$ *o, come si dice in gergo,* sono combinazione lineare *dei vettori di* $\mathcal{B}$ *e, inoltre, nessuno dei vettori di* $\mathcal{B}$ *può essere ottenuto come combinazione lineare degli altri vettori di* $\mathcal{B}$ *stesso, ovvero, come si dice, sono* linearmente indipendenti.

Si invita il lettore attento a dimostrare che un insieme di vettori $\vec{v}_i$ è linearmente indipendente, se e soltanto se l'unica loro combinazione lineare $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i$ che possa generare il vettore nullo è quella per cui tutti i coefficienti λ_i siano nulli. Inoltre dovrebbe essere facile convincersi che l'intero spazio $\mathbb{R}^3$ è generato dalla seguente **base**, detta **canonica**:

$$\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

infatti se $\vec{v}$ è un vettore generico di componenti v_1, v_2, e v_3, allora si ha:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 \cdot \hat{i} + v_2 \cdot \hat{j} + v_3 \cdot \hat{k}.$$

Dati due vettori, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, definiamo il **prodotto scalare** tramite *la somma del prodotto della componenti omologhe:*

$$< \vec{v}, \vec{w} >= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i \cdot w_i.$$

Questa definizione di prodotto tra vettori ha notevoli ed importanti significati, di cui ora discuteremo succintamente. Innanzitutto, considerando il Teorema di Pitagora, applicato nello spazio, è evidente

[47] Oppure $\vec{B}$.

[48] Non entriamo nel dettaglio della definizione "astratta" di Spazio vettoriale, non avendo la necessità di trattare in generale la questione.

[49] Altresì diremo che gli elementi di $\mathcal{B}$ formano una *base* per lo spazio S.

[50] In gergo "sono generati".

che la lunghezza del vettore $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, corrispondente al punto P di coordinate (p_1, p_2, p_3) è data da:

$$l(\vec{v}) = |\,\vec{v}\,| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = \sqrt{<\vec{v}, \vec{v}>}.$$

Poi osserviamo che moltiplicando scalarmente $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ con $\hat{i}$ si ottiene v_1, ovvero la prima componente e, analogamente, $<\vec{v}, \hat{j}>= v_2$ e, infine, $<\vec{v}, \hat{k}>= v_3$. Le tre componenti testé scritte non sono altro che le **proiezioni** del vettore $\vec{v}$ lungo le direzioni degli assi coordinati [51] e, pertanto, possiamo *"scomporre"* il vettore $\vec{v}$ scrivendo:

$$\vec{v} = <\vec{v}, \hat{i}> \cdot \hat{i} + <\vec{v}, \hat{j}> \cdot \hat{j} + <\vec{v}, \hat{k}> \cdot \hat{k},$$

utilizzando le proiezioni lungo gli assi coordinati. C'è un fatto però molto più interessante: possiamo sempre supporre che uno degli assi coordinati venga rototraslato in modo che il suo *"versore"* [52] si sovrapponga con quello definito da un vettore qualsiasi $\vec{w}$, il cui versore è data da $\hat{w} = \frac{1}{l(\vec{w})} \cdot \vec{w}$. Allora, la **proiezione** del vettore $\vec{v}$ lungo la direzione definita da $\vec{w}$ si dovrà ottenere nella stessa identica maniera con la quale abbiamo trovato la proiezione di $\vec{v}$ lungo le direzioni degli assi coordinati, ovvero *moltiplicando scalarmente* con i versori lungo tali assi; possiamo quindi dire che **la proiezione di $\vec{v}$ lungo la direzione di $\vec{w}$**, che indicheremo con $\pi_{\vec{w}}(\vec{v})$, è data da:

$$\pi_{\vec{w}}(\vec{v}) = <\vec{v}, \hat{w}> = <\vec{v}, \frac{\vec{w}}{l(\vec{w})}> = \frac{<\vec{v}, \vec{w}>}{\sqrt{<\vec{w}, \vec{w}>}}.$$

D'altra parte, la proiezione di un vettore su di un altro è data, in lunghezza, dalla lunghezza del vettore, moltiplicata per il coseno dell'angolo che si forma tra i due vettori, allora possiamo ancora scrivere:

$$\pi_{\vec{w}}(\vec{v}) = l(\vec{v}) \cdot \cos(\vec{v}, \vec{w}),$$

da cui ricaviamo la seguente formula, che ci permette di determinare l'ampiezza dell'**angolo tra due vettori** per tramite del suo coseno :

$$\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{<\vec{v}, \vec{w}>}{\sqrt{<\vec{w}, \vec{w}>}} \cdot \frac{1}{\sqrt{<\vec{v}, \vec{v}>}} = \frac{<\vec{v}, \vec{w}>}{|\,\vec{v}\,| \cdot |\,\vec{w}\,|}.$$

Dovrebbe risultare abbastanza evidente che ***se il prodotto scalare è nullo, i vettori sono perpendicolari*** [53].

[51] Definite dai vettori della base canonica.

[52] I versori sono vettori di lunghezza unitaria o, come si dice, di modulo unitario e, quindi, servono ad indicare la direzione ed il verso dell'asse di riferimento.

[53] E viceversa. Come mai?

Come un vettore genera uno spazio monodimensionale detto retta, semplicemente considerando tutti i suoi “multipli” $\lambda \cdot \vec{v}$, così due vettori -che non siano l'uno un multiplo dell'altro [54]- generano uno spazio bidimensionale detto piano. In effetti si può, molto semplicemente, determinare il piano passante per i punti A, B e C dello spazio considerando i due vettori $\vec{v} = B - A$ e $\vec{w} = C - A$ [55], i quali generano lo “spazio” bidimensionale $\lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}$ tramite combinazione lineare dei loro multipli e, facendo passare tale piano dal punto A, ottenere l'equazione (vettoriale) del piano cercato:

$$\boxed{\pi : \vec{A} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}}.$$

Passare da questa equazione vettoriale, a quella cartesiana è un attimo: il seguente esempio è autoesplicativo.

Esempio: Trovare l'equazione (cartesiana) del piano passante per i punti $A(2, 1, 1)$, $B(-1, 0, 2)$ e $C(1, 1, -3)$.

Soluzione: [56] Prima di tutto ci troviamo i seguenti vettori generatori del piano:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

A questo punto, l'equazione vettoriale del piano è:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Per passare all'equazione cartesiana, basta considerare che la prima componente si riferisce all'asse delle x, la seconda a quello delle y e la terza alla coordinata z del sistema di coordinate xyz. Imponiamo

[54] Ovvero siano “linearmente indipendenti”.

[55] Che sono linearmente indipendenti, se i punti non sono allineati!

[56] Possiamo “partire” anche dall'equazione canonica $z = ax + by + c$ ed imporre le condizioni di passaggio per determinare quanto richiesto: dovremmo però già sapere, in anticipo, che l'equazione cartesiana del piano è del tipo scritto or ora... noi, invece, arriveremo ad una scrittura del genere, deducendola dall'equazione vettoriale scritta nel riquadrato.

quindi il sistema lineare, eliminando λ e μ, tra le tre equazioni ed ottenendo l'equazione cartesiana del piano.

$$\begin{cases} x = 2 - 3\lambda - \mu \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda - 4\mu \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo: $\lambda = 1 - y$ che, sostituita nella prima e terza equazione porta al seguente sistema:

$$\begin{cases} x = 2 - 3 \cdot (1 - y) - \mu \\ z = 1 + (1 - y) - 4\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 3y - \mu \\ z = 2 - y - 4\mu \end{cases} .$$

Moltiplichiamo ora la prima equazione per 4 e sottraiamola, membro a membro, dalla seconda, per ottenere:

$$z - 4x = 2 - y - \cancel{4\mu} + 4 - 12y + \cancel{4\mu}$$

ovvero:

$$z = 4x - 13y + 6,$$

corrispondente all'equazione cartesiana richiesta.

□

Ora, sapendo che il prodotto scalare di due vettori è nullo se e solo se le loro direzioni sono perpendicolari, possiamo determinare un vettore $\vec{u}$ perpendicolare al piano generato dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$: basta imporre che i due prodotti scalari di $\vec{u}$ con $\vec{v}$ e $\vec{w}$, rispettivamente, siano contemporaneamente nulli:

$$\begin{cases} < \vec{u}, \vec{v} >= 0 \\ < \vec{u}, \vec{w} >= 0 \end{cases} .$$

Se indichiamo il vettore $\vec{u}$ tramite le componenti $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ e, al solito, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$, il sistema precedente si riscrive come segue:

$$\begin{cases} v_1\, a + v_2\, b + v_3\, c = 0 \\ w_1\, a + w_2\, b + w_3\, c = 0 \end{cases}$$

Per risolvere questo sistema, moltiplichiamo la prima riga per w_1 e la seconda per v_1 e poi sottraiamo la seconda equazione dalla prima, ottenendo:

$$(v_2 w_1 - v_1 w_2)\, b + (v_3 w_1 - v_1 w_3)\, c = 0.$$

Dato che il sistema consiste di due equazioni in tre incognite, ne consegue che una di esse [57] si può scegliere arbitrariamente. Scegliamo allora che c uguagli la prima parentesi, cambiata di segno, dell'ultima equazione ottenuta e, quindi, b sia uguale proprio alla seconda parentesi. Pertanto abbiamo:

$$\boxed{c = -(v_2 w_1 - v_1 w_2)} \quad \text{(scelto arbitrariamente da noi)}$$

e

$$\boxed{b = v_3 w_1 - v_1 w_3} \quad \text{(ricavato dall'equazione).}$$

Dalla prima equazione ricaviamo il valore di a :

$$a = -\frac{v_2\, b + v_3\, c}{v_1} = -\frac{v_2(v_3 w_1 - v_1 w_3) - v_3(v_2 w_1 - v_1 w_2)}{v_1} =$$
$$= \frac{-\cancel{v_2 v_3 w_1} + v_1 v_2 w_3 + \cancel{v_2 v_3 w_1} - v_1 v_3 w_2}{v_1},$$

da cui

$$\boxed{a = v_2 w_3 - v_3 w_2}.$$

Prima di procedere oltre, introduciamo una quantità fondamentale associata ad ogni matrice quadrata: il suo determinante.

Definizione 12. *Data una matrice A quadrata $n \times n$, il suo **determinante** det(A) è la somma di tutti i prodotti di elementi di una riga per quelli delle altre, ma non appartenenti ad una colonna già prima presa in considerazione, sommando positivamente quelli per cui la somma $i + j$ (della posizione in riga e colonna) è pari e negativamente gli altri. Il **cofattore** Cof(a_{ij}) dell'elemento a_{ij} si ottiene calcolando il determinante della matrice ottenuta, da quella di partenza, eliminando la $i-$esima riga e la $j-$esima colonna e cambiando il segno al numero, se $i + j$ è dispari, altrimenti lasciando il segno che si è determinato.*

Utilizzando i cofattori, il calcolo del determinante di una matrice A può essere effettuato "induttivamente" tramite i seguenti sviluppi, conosciuti come **Formule di Laplace:**

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathrm{Cof}(a_{ij}) \qquad \text{od anche} \qquad \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{Cof}(a_{ij}).$$

Esempio: Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

[57] Intendiamo "incognita".

Risposta: Sviluppiamo secondo la prima riga, dato che c'è un elemento nullo in essa. Si ha dunque:

$$\det(A) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$= 1 \cdot [-1 \cdot 5 - (-1) \cdot 2] - 2 \cdot [4 \cdot 5 - 3 \cdot 2] + 0 = -3 - 28 = -31.$$

□

Ritorniamo al discorso di prima, se formalmente inseriamo in una matrice, nella prima riga, i tre simboli dei versori degli assi coordinati e nelle altre due righe -ordinatamente- le componenti del vettore $\vec{v}$ e del vettore $\vec{w}$ otteniamo che il determinante di tale matrice, sviluppato secondo la prima riga, genera proprio in vettore $\vec{u}$, infatti tale determinante è:

$$\det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = (v_2 w_3 - v_3 w_2) \cdot \hat{i} +$$
$$+ (v_3 w_1 - v_1 w_3) \cdot \hat{j} + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \cdot \hat{k} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{u}.$$

Il determinante della matrice appena scritta si indica con

$$\vec{v} \wedge \vec{w}$$

e si chiama ***prodotto vettoriale*** tra i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
Per cui possiamo scrivere:

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix},$$

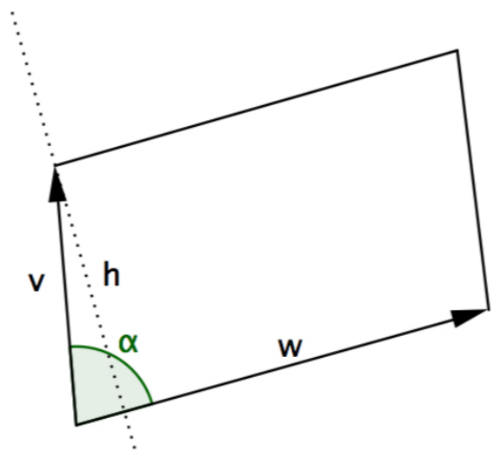
esso esprime **un vettore che è contemporaneamente perpendicolare** ai vettori componenti le ultime due righe della matrice! C'è da notare che se invertiamo le ultime due righe, il determinante cambia di segno, per cui

$$\vec{w} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{w},$$

questo fatto corrisponde a scegliere un "verso" per il piano: la scelta di uno dei due prodotti vettoriali indica un lato del piano, l'altro è dalla "parte opposta" e quindi corrisponde all'altro prodotto vettoriale. Questo sarà ancora più chiaro ed evidente nel momento in cui si parlerà di superfici (orientabili) in cui si può determinare una parte *esterna* ed una *interna*.

Consideriamo ora un parallelogramma, due lati del quale siano i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e calcoliamone l'area: l'altezza ha lunghezza $|\vec{v}| \cdot \sin(\alpha)$, per cui l'area è data da

$$\text{Area} = |\vec{w}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\alpha).$$



Dimostreremo ora che la lunghezza del vettore $\vec{v} \wedge \vec{w}$ è esattamente la misura dell'area di questo parallelogramma.
Calcoliamo il quadrato del modulo del prodotto vettoriale:

$$|\vec{v} \wedge \vec{w}|^2 = < \vec{v} \wedge \vec{w}, \vec{v} \wedge \vec{w} >$$

ovvero

$$|\vec{v} \wedge \vec{w}|^2 = < \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix} >,$$

ergo:

$$|\vec{v} \wedge \vec{w}|^2 = (v_2w_3 - v_3w_2)^2 + (v_3w_1 - v_1w_3)^2 + (v_1w_2 - v_2w_1)^2.$$

Lo sviluppo di questi quadrati di binomio fornisce l'espressione:

$$\begin{aligned}(v_2w_3)^2 - 2(v_2v_3w_2w_3) + (v_3w_2)^2 + (v_3w_1)^2 - 2(v_1v_3w_1w_3) + \\ + (v_1w_3)^2 + (v_1w_2)^2 - 2(v_1v_2w_1w_2) + (v_2w_1)^2,\end{aligned}$$

mettendo in evidenza w_1^2, w_2^2 e w_3^2 ed il 2 otteniamo:

$$\begin{aligned}w_1^2(v_2^2 + v_3^2) + w_2^2(v_1^2 + v_3^2) + w_3^2(v_1^2 + v_2^2) + \\ - 2(v_1v_2w_1w_2 + v_2v_3w_2w_3 + v_1v_3w_1w_3).\end{aligned}$$

A quest'ultima espressione aggiungiamo e togliamo le quantità

$$v_1^2w_1^2, \quad v_2^2w_2^2 \quad \text{e} \quad v_3^2w_3^2,$$

ottenendo, dopo un'altra evidente messa in evidenza, la quantità:

$$(v_1^2+v_2^2+v_3^2)(w_1^2+w_2^2+w_3^2)-2(v_1v_2w_1w_2+v_2v_3w_2w_3+v_1v_3w_1w_3)+ \\ -(v_1^2w_1^2+v_2^2w_2^2+v_3^2w_3^2).$$

Osserviamo che le prime due parentesi sono proprio i moduli al quadrato di $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Dato che

$$\begin{aligned}\text{Area}^2 = |\vec{v}|^2\cdot|\vec{w}|^2\cdot\sin^2(\alpha) = |\vec{v}|^2\cdot|\vec{w}|^2\cdot(1-\cos^2(\alpha)) &= \\ = |\vec{v}|^2\cdot|\vec{w}|^2 - |\vec{v}|^2\cdot|\vec{w}|^2\cdot\cos^2(\alpha),\end{aligned}$$

basta dimostrare che:

$$\begin{aligned}2(v_1v_2w_1w_2+v_2v_3w_2w_3+v_1v_3w_1w_3)+(v_1^2w_1^2+v_2^2w_2^2+v_3^2w_3^2) &= \\ = |\vec{v}|^2\cdot|\vec{w}|^2\cdot\cos^2(\alpha).\end{aligned}$$

Il secondo membro di questa uguaglianza rappresenta, comunque, il prodotto scalare, elevato al quadrato, dei vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$, per cui esso è

$$(<\vec{v},\vec{w}>)^2 = (v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3)^2 =$$

$$= (v_1w_1)^2+(v_2w_2)^2+(v_3w_3)^2+2v_1v_2w_1w_2+2v_1v_3w_1w_3+2v_2v_3w_2w_3$$

che è proprio il primo membro dell'uguaglianza che volevamo dimostrare.

Ricapitolando, abbiamo visto che la lunghezza [58] del prodotto vettoriale rappresenta l'area di un parallelogramma e, precisamente:

$$|\vec{v}\wedge\vec{w}| = \text{Area parallelogramma due lati del quale sono } \vec{v} \text{ e } \vec{w}.$$

Osserviamo che se ***i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono paralleli, allora il loro prodotto vettoriale è nullo*** [59] .

Esempio: Determinare il piano passante per i punti $A(-1,-2,0)$, $B(1,1,5)$ e $C(3,0,1)$. Poscia la retta ortogonale al piano e passante da $P(4,5,8)$.

Soluzione: Il piano ha equazione vettoriale:

$$\pi : \vec{A}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}+\mu\cdot\overrightarrow{AC}$$

Nel nostro caso è, dunque:

$$\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}.$$

[58] Altrimenti detto "il modulo".

[59] E viceversa.

Analiticamente ricaviamo l'equazione eliminando i parametri λ e μ dal sistema seguente:

$$\begin{cases} x = -1 + 2 \cdot \lambda + 4 \cdot \mu \\ y = -2 + 3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu \\ z = \qquad 5 \cdot \lambda + \mu \end{cases}$$

Operiamo secondo quanto indicato:

$$\begin{cases} II \times 2 - I \\ III \times 2 - II \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - x = -3 + 4\lambda \\ 2z - y = 2 + 7\lambda \end{cases}$$

Moltiplicando la prima per 7 e la seconda per 4, sottraendo, otteniamo:

$$\begin{array}{cccccccc} 14y & - & 7x & = & - & 21 & + & 28y \\ 8z & - & 4y & = & & 8 & + & 28y \\ \hline \\ 18y & - & 7x & - & 8z & = & - & 29 \end{array}$$

ergo, l'equazione cartesiana del piano è:

$$\boxed{7x - 18y + 8z - 29 = 0}.$$

Ora determiniamo la direzione perpendicolare al piano:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 10 \\ -(2 - 20) \\ 4 - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 18 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

L'equazione vettoriale della retta perpendicolare al piano e passante da P è data da:

$$\vec{P} + \lambda \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 4 - 7\lambda \\ 5 + 18\lambda \\ 8 - 8\lambda \end{pmatrix}.$$

Facciamo notare che, l'equazione cartesiana della retta, non può essere data come unica relazione tra le coordinate dei punti che le appartengono: abbiamo bisogno di indicare due piani che si intersecano per determinare la retta desiderata! è, evidentemente, più comodo e chiaro indicare la retta tramite la sua equazione vettoriale ma, giusto per una volta, vogliamo ricavare anche le equazioni cartesiane della singola retta. Procediamo esattamente per come fatto prima nella determinazione dell'equazione cartesiana del piano, pertanto scriveremo:

$$\begin{cases} x = 4 - 7\lambda \\ y = 5 + 18\lambda \\ z = 8 - 8\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-4}{7} = -\lambda \\ \frac{y-5}{18} = \lambda \\ \frac{z-8}{8} = \lambda \end{cases} .$$

L'equazione cartesiana della retta è dunque:

$$\begin{cases} \frac{x-4}{7} + \frac{y-5}{18} = 0 \\ \frac{y-5}{18} + \frac{z-8}{8} = 0 \end{cases} .$$

Suggeriamo di verificare con Geogebra la correttezza dei risultati trovati.

□

Esempio: Trovare il piano perpendicolare al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e passante dal punto $P(0, 2, 3)$.

Soluzione: La retta che $\vec{v}$ determina, passante per l'origine del sistema di coordinate, è: $r : \lambda \cdot \vec{v}$, per cui, un suo punto qualsiasi Q deve avere coordinate $Q = (\lambda, \lambda, \lambda)$ per λ parametro opportuno. Consideriamo allora il vettore $\overrightarrow{PQ}$ ed imponiamo che esso sia perpendicolare a $\vec{v}$, ovvero troviamo per quale punto Q della retta r, $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}$.

$$< \overrightarrow{PQ}, \vec{v} >= 0 \Leftrightarrow < \begin{pmatrix} 0 - \lambda \\ 2 - \lambda \\ 3 - \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >= 0$$

equivalentemente:

$$-\lambda + 2 - \lambda + 3 - \lambda = 0, \quad \Rightarrow \quad -3\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{3}.$$

Quindi $Q = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ è tale che $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}$. Sia ora $R = (x, y, z)$ un punto/vettore nello spazio ed imponiamo che $\overrightarrow{RQ} \perp \vec{v}$:

$$< \overrightarrow{RQ}, \vec{v} >= 0 \Rightarrow < \begin{pmatrix} x - \frac{5}{3} \\ y - \frac{5}{3} \\ z - \frac{5}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >= 0$$

ricaviamo:

$$x - \frac{5}{3} + y - \frac{5}{3} + z - \frac{5}{3} = 0$$

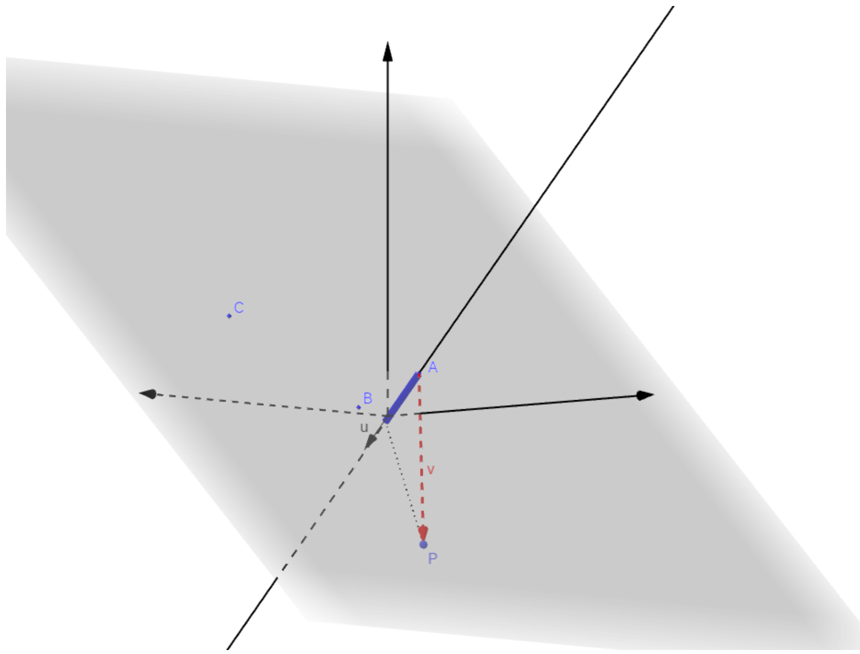
ergo, il piano cercato ha equazione:

$$\boxed{x + y + z - 5 = 0}.$$

□

Esempio: Quanto dista il punto $P(1,2,-3)$ dal piano π passante per i punti $A(-1,0,1)$, $B(2,1,0)$ e $C(4,-1,2)$?

Soluzione: Possiamo determinare la distanza richiesta, del punto P dal piano π, come la proiezione del vettore $\overrightarrow{PQ}$, essendo Q un punto qualsiasi del piano π, lungo la direzione perpendicolare al piano stesso [60].



Ci troviamo quindi i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ che generano il piano:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il vettore perpendicolare ad entrambi lo determiniamo tramite il *prodotto vettoriale* dei due:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix}$$

[60]Per convincersi della bontà di tale affermazione, si invita il lettore ad effettuare uno schizzo di quanto affermato, in particolare per capire che qualsiasi sia il vettore perpendicolare al piano e qualsiasi sia il punto Q di "applicazione" del vettore $\overrightarrow{PQ}$, la proiezione a cui ci si riferisce è lunga sempre la stessa!

Da questo ricaviamo che

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{0^2 + (-8)^2 + (-8)^2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{8\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Come punto $Q \in \pi$ prendiamo il punto A e quindi:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

La proiezione di $\vec{v}$ lungo la direzione definita da $\vec{u}$ è data da:

$$< \vec{v}, \hat{u} >=< \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} >= -\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

□

CAPITOLO 13

Equazioni differenziali

In questo capitolo applichiamo il calcolo differenziale ed ancor più quello integrale, per la risoluzione di problemi di vario tipo e, soprattutto, per creare *modelli matematici* di fenomeni reali che, risolti, consentano di spiegare i fenomeni stessi e permettano di fare previsioni sulla loro evoluzione. Per *modello matematico* intendiamo una rappresentazione quantitativa di un fenomeno naturale: l'utilizzo delle derivate, che rappresentano *velocità istantanee* di crescita delle varie quantità, ha consentito di sviluppare un'ampia gamma di modelli da applicare a vari settori delle scienze o delle tecniche. In verità, la *modellistica differenziale*, è di fondamentale importanza per lo sviluppo di ogni scienza moderna: essa si basa, essenzialmente, sullo studio di equazioni in cui compaiono le derivate [1] di alcune funzioni, le quali rappresentano leggi o relazioni tra le principali quantità coinvolte nell'esame del fenomeno di cui si è interessati. Ad esempio, tra i più semplici modelli differenziali, molto versatile ed utile, è il seguente modello di crescita [2]: ***la velocità di crescita di una popolazione è direttamente proporzionale alla sua numerosità al tempo*** t. Scritto in formule, se indichiamo con $N(t)$ la numerosità della popolazione al tempo t, allora la sua velocità di crescita è data dalla derivata prima [3] che indichiamo con $N'(t)$. Pertanto, il modello summenzionato si scrive semplicemente come:

$$N'(t) \propto N(t)$$

ovvero:

$$N'(t) = k \cdot N(t).$$

Questa semplice equazione, in cui compare la derivata prima della funzione $N(t)$, non solo *"modellizza"* il fenomeno di crescita di una popolazione, ma anche quello di decrescita della stessa! ad esempio può essere utilizzata per rappresentare la crescita di una popolazione di

[1] Anche di vario ordine: derivate prime, seconde ecc...

[2] Detto **modello di Malthus** , dal nome dell'economista che si occupò per prima di descrivere matematicamente la **dinamica delle popolazioni**.

[3] Rispetto al tempo.

batteri, la diffusione di un virus durante le prime fasi di una pandemia; o ancora, il decadimento radioattivo [4] ecc... È nostra intenzione studiare in generale la teoria che permetta di arrivare ad una soluzione di alcune tra le principali equazioni differenziali, che si possano incontrare durante gli studi superiori e, soprattutto, discutere i principali modelli, pervenendo alla risoluzione degli stessi, per avere un'idea giusta riguardo ai fenomeni a cui essi si applicano.

1. Termini e definizioni

Iniziamo con lo stabilire la terminologia giusta, in modo da intenderci quando scriveremo o parleremo dei prossimi argomenti. Una relazione del tipo:

$$F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0$$

si chiama **equazione differenziale ordinaria di ordine** n, a volte indicata anche con l'acronimo **o.d.e.** [5] . In breve, l'**ordine** dell'equazione non è altro che il massimo grado di derivazione della funzione $f(x)$. Per comodità, in generale non scriveremo mai $f(x)$ e le sue derivate, ma -utilizzando una notazione comune e già incontrata- dato che $y = f(x)$, allora l'equazione differenziale verrà scritta come:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Bisogna stare attenti a non confondere l'ordine dell'equazione differenziale, con il suo **grado**: quest'ultimo, infatti, è il più grande esponente che eleva la funzione o le sue derivate nell'equazione stessa. Quindi, ad esempio, $(y')^3 - y + 1 = 0$ è una o.d.e. del primo ordine, ma di terzo grado. Se il grado è uno, allora l'equazione si dirà **lineare.** Ad esempio, l'o.d.e. incontrata prima, come modello di crescita di una popolazione, posto $y = N(t)$ e $x = t$, si riscrive come $y' = k \cdot y$ ovvero $y' - k \cdot y = 0$ e rappresenta una o.d.e del primo ordine, lineare. Chiamiamo **forma normale** una o.d.e. scritta in modo che la derivata di ordine massimo si possa esplicitare come relazione tra le derivate di ordine inferiore [6] :

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

[4] Vedremo, ad esempio, che la datazione dei reperti tramite il metodo del *carbonio 14* si basa proprio su questo modello differenziale!

[5] Dall'inglese: "Ordinary differential equation".

[6] Considerando la derivata $0-$esima come la funzione stessa.

Per **soluzione** (o **integrale** [7]) di una o.d.e. intendiamo una funzione che assieme alle sue derivate, fino all'ordine richiesto, soddisfa all'equazione data. In generale si possono trovare diverse soluzioni, anzi, un'infinità! distinguiamo tre tipi di soluzioni: quelle particolari, quelle generali e quelle singolari. Le generali sono tutte le funzioni che soddisfano all'o.d.e. e, dipendendo da uno o più parametri, sono in numero infinito. Tra le generali, imponendo delle condizioni [8] iniziali [9] si seleziona una particolare soluzione, da cui il nome *soluzione particolare* [10] . Vi possono essere, però, delle soluzioni che non si riescono a ricavare tramite "l'integrazione" dell'equazione differenziale, quindi non sono incluse nelle soluzioni generali: in questo caso si parla di soluzioni singolari. Ad esempio:

$$y' = 4\,x\,\sqrt{y}$$

ha, tra le sue soluzioni, $y = 0$. Il suo integrale generale, che a breve impareremo a calcolare, è però:

$$y = (x^2 + c)^2$$

che non include il caso $y = 0$, qualsivoglia c si scelga in $\mathbb{R}$. Pertanto $y = 0$ è una soluzione singolare dell'equazione testé scritta. In generale, noi siamo interessati alla determinazione delle *soluzioni generali* e, se vi sono condizioni aggiuntive, *tante per quanto è l'ordine dell'o.d.e.,* alla soluzione particolare dell'equazione stessa. A tal proposito diciamo che una equazione differenziale, con la funzione $f(x)$ definita su un dato intervallo $[a, b]$, assieme a tante condizioni iniziali, per quanto è l'ordine dell'equazione stessa [11], si chiama **problema di Cauchy** (indicato con **P.C.**) . Si dimostra che sotto condizioni abbastanza "larghe" i **P.C.** ammettono sempre, localmente, una unica soluzione [12] .

[7] Il cui grafico viene anche detto "curva integrale" .

[8] Ad esempio di "passaggio" della funzione soluzione per un dato punto del piano.

[9] O finali.

[10] Non si pensi, però, che le soluzioni particolari le si determinano sempre a partire dall'integrale generale: vedremo che conoscendo un "integrale particolare", si può risalire alla soluzione generale e quindi è opportuno imparare a trovare le soluzioni particolari a prescindere della conoscenza dell'integrale generale.

[11] Dire che sono date delle condizioni iniziali, si intende che si sono fissati i valori di $f(a)$, $f'(a)$ ... ecc... fino a $f^{(n-1)}(a)$

[12] La dimostrazione di questo fatto e la discussione sulle condizioni da imporre alla funzione acciocché il **P.C.** ammetta un'unica soluzione esula dagli scopi di questo testo, quindi omettiamo bellamente tutto l'argomento.

2. O.d.e. del primo ordine ed a variabili separabili

Un equazione differenziale del primo ordine, scritta in forma normale, è una scrittura del tipo:

$$y' = f(x, y).$$

La più immediata forma da risolvere si ha quando la funzione $f(x, y)$ non dipende da y ma unicamente dalla variabile indipendente x, ovvero $f(x, y) = f(x)$. Nei fatti, integrando direttamente entrambi i membri dell'equazione, si ottiene la soluzione:

$$y' = f(x) \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x \; + c.$$

Esempio: Si risolva l'equazione differenziale:

$$y' = x^2 + 3x.$$

Soluzione: Integrando entrambi i membri si ottiene:

$$y = \int x^2 + 3x\,\mathrm{d}x + c$$

ovvero:

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + c,$$

che rappresenta la soluzione generale dell'o.d.e. data.

□

Se la funzione $f(x, y)$ si riesce a scrivere come prodotto di due funzioni che dipendono, unicamente, l'una da x e l'altra da y, allora l'equazione si dirà **a variabili separabili** . Queste si possono risolvere ricorrendo al seguente trucco: considerato che $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, possiamo scrivere [13] , se $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, quanto segue:

$$y' = f(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1(x) \cdot f_2(y) \qquad \Rightarrow \quad \frac{1}{f_2(y)} \cdot \mathrm{d}y = f_1(x) \cdot \mathrm{d}x.$$

Integrando entrambi i membri di questa equazione, si ottiene la soluzione generale dell'equazione data:

$$\int \frac{1}{f_2(y)} \cdot \mathrm{d}y = \int f_1(x) \cdot \mathrm{d}x \quad + c.$$

[13] Il trucco è legittimato dal fatto che prima ancora di passare al limite per $h \to 0$ che definisce la derivata prima, il rapporto incrementale è una vera e propria frazione e quindi si può operare con le "regole" delle frazioni: dopo aver sistemato la scrittura come più ci aggrada, possiamo far tendere a zero l'incremento $h = \mathrm{d}x$ e ritrovare l'equazione con i differenziali $\mathrm{d}y$ e $\mathrm{d}x$ "separati" come se la derivata stessa fosse stata intesa come un rapporto tra differenziali (infinitesimi).

Esempio: Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale presentata nella sezione precedente:

$$y' = 4\,x\,\sqrt{y}.$$

Soluzione: Separiamo le variabili, ottenendo:

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = 4\,x\,\mathrm{d}x.$$

Integrando entrambi i membri otteniamo:

$$2\sqrt{y} = 2\,x^2 + c \qquad \text{da cui:} \qquad y = (x^2 + \underline{c})^2$$

essendo $\underline{c} = \frac{1}{2}\,c$ la costante arbitraria d'integrazione.

□

Esempio: Risolvere il **modello di Malthus** o, come si dice, il *modello di crescita "esponenziale"*:

$$\boxed{N'(t) = k \cdot N(t)}.$$

Soluzione: Separiamo anche in questo caso le variabili:

$$\frac{1}{N} \cdot \mathrm{d}N = k \cdot \mathrm{d}t \qquad \Rightarrow \qquad \ln(|\,N\,|) = k \cdot t + c.$$

A questo punto ci ricordiamo della definizione di logaritmo e scriviamo:

$$N = e^{k \cdot t + c} \qquad \text{ovvero} \qquad N(t) = e^c \cdot e^{k \cdot t}.$$

Supponiamo che al tempo iniziale $t = 0$ la numerosità della popolazione è $N(0) = N_0$, allora, sostituendo nell'ultima uguaglianza trovata, si ottiene:

$$N(0) = e^c \cdot e^{k \cdot 0} \qquad \text{ergo:} \qquad e^c = N_0$$

e quindi, in ultimo:

$$\boxed{N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}}.$$

Il parametro k è caratterizzante la popolazione: indica quanto velocemente cresce o decresce e, spesso, si fornisce sotto forma di **tempo di duplicazione** oppure **tempo di dimezzamento** [14] . Questi due (tempi) si definiscono, per come dice il nome, come il tempo che impiega una popolazione a raddoppiare, ovvero a dimezzarsi. Nel successivo esempio vedremo come utilizzare queste informazioni.

□

[14] Quest'ultimo caso, specie quando si parla di **decadimento** di una sostanza radioattiva.

Esempio: Si sa che l'isotopo radioattivo del carbonio, il ^{14}C [15] , decade in azoto con un tempo (medio) di dimezzamento di 5730 anni. Di conseguenza questo isotopo a lungo andare scomparirebbe, se non venisse continuamente reintegrato: della produzione di nuovo ^{14}C si occupa la Natura stessa, negli strati alti della troposfera e nella stratosfera. Si instaura un equilibrio dinamico perfetto tra la produzione e decadimento radioattivo, tale per cui si mantiene costante la concentrazione di Carbonio-14 nell'atmosfera, dove è presente principalmente legato all'ossigeno sotto forma di anidride carbonica. Tutti gli organismi viventi che respirano, scambiano continuamente carbonio con l'atmosfera, oppure lo assimilano nutrendosi di altri esseri viventi o sostanze organiche. Di conseguenza, finché un organismo è vivo, la concentrazione di ^{14}C si mantiene costante e uguale a quella che si riscontra nell'atmosfera. Dopo la morte questo equilibrio dinamico viene interrotto, poiché termina il meccanismo di reintegro dell'isotopo per tramite della respirazione e l'organismo, non scambiando più carbonio con l'esterno, tende a perdere, per decadimento radioattivo, la concentrazione di ^{14}C. Per tale scoperta, il chimico Willard Frank Libby vinse nel 1960 il premio Nobel per la chimica: grazie ad essa oggi possiamo datare con una precisione incredibile, oggetti che provengono dal mondo animale o vegetale. La legge del decadimento radioattivo è identica a quella del modello di Malthus, quindi possiamo scrivere [16] :

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}.$$

Supponiamo che un reperto contenga inizialmente 10^3 nuclei di Carbonio-14. Quanti ne rimarranno dopo 17190 anni?

Soluzione: Dal tempo di dimezzamento ricaviamo la seguente uguaglianza che ci permette di determinare k per il fenomeno in esame:

$$\frac{1}{2} N_0 = N_0 \cdot e^{-k \cdot 5730}$$

da cui

$$-k \cdot 5730 = \ln \left| \frac{1}{2} \right| \qquad \Leftrightarrow \qquad k = \frac{ln(2)}{5730} \approx 1.21 \cdot 10^{-4}.$$

Ergo:

$$N(17190) = 10^3 \cdot e^{-1.21 \cdot 10^{-4} \cdot 17190} \approx 125.$$

□

[15] Si legge: Carbonio-14. In Natura ci sono anche altri due isotopi stabili, il 12 ed il 13, che non essendo radioattivi, non servono al fine della datazione, per come descriviamo di seguito.

[16] All'esponente dobbiamo solo aggiungere un segno negativo, dato che l'andamento del fenomeno è decrescente.

Esempio: Da un pezzo di carbone prelevato da una antico forno, viene estratto un campione di carbonio radioattivo di massa $m = 25$ grammi. La sua radioattività è misurata in $A = 250$ dec/min. Quale età ha approssimativamente il campione?

Soluzione: Si sa che la radioattività iniziale di un grammo di ^{14}C è $A_0 = 0.23$ Bq (Becquerel). I venticinque grammi hanno una radioattività residua di 250 dec/min, pari a $\frac{250}{60} \approx 4.167$ Bq. Per cui, un solo grammo presenta un radioattività di 0.167 Bq circa. Per determinare una data, inseriamo questi dati nell'equazione [17] :

$$R(t) = R_0 \cdot e^{-k \cdot t}$$

dove $k \approx 1.21 \cdot 10^{-4}$ per come calcolato nell'esempio precedente.
Quindi:

$$0.167 = 0.23 \cdot e^{-1.21 \cdot 10^{-4} \cdot t}$$

da cui

$$t = -\frac{\ln\left(\frac{0.167}{0.23}\right)}{1.21 \cdot 10^{-4}} \approx 2645 \text{ anni.}$$

□

Esempio: Dopo aver segregato 2 grammi di ^{14}C da un reperto, si effettua una misura della sua radioattività. Si ottengono 6912 decadimenti in 96 ore. Dare una datazione approssimativa del reperto.

Risposta: Esprimiamo la "radioattività" in Becquerel:

$$A_{2\,gr} = \frac{6912}{96\,h} = \frac{6912}{96 \cdot 3600\,s} = 0.02\ Bq.$$

Un grammo, quindi, avrà proporzionalmente una radioattività di $0.01\,Bq$. Utilizziamo ora la formula di decadimento radioattivo:

$$0.01 = 0.23 \cdot e^{-1.21 \cdot 10^{-4} \cdot t}$$

da cui

$$t = -\frac{\ln\left(\frac{0.01}{0.23}\right)}{1.21 \cdot 10^{-4}} \approx 25913 \text{ anni.}$$

□

[17] In questo caso, invece di considerare la numerosità $N(t)$ al tempo t, consideriamo la radioattività... avremmo potuto lavorare sulle *concentrazioni* e considerare $C(t)$: non cambia il succo del discorso, un modello è valido perché può essere applicato per contesti simili!

3. O.d.e. lineari del primo ordine

Parliamo ora di equazioni differenziale del primo ordine lineari: esse hanno numerose applicazioni, che apprezzeremo non appena finito la discussione sulla loro risoluzione. Innanzitutto scriviamo la forma generale di una equazione di questo tipo:

$$y' + p(x)\, y = q(x).$$

Se $q(x) = 0$, l'equazione si dirà **omogenea** e la sua risoluzione si può effettuare tramite il metodo di separazione delle variabili, infatti scriveremo:

$$y' + p(x)\, y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -p(x)\,\mathrm{d}x$$

ed integrando entrambi i membri:

$$\ln|\, y\,| = -\int p(x)\,\mathrm{d}x + c,$$

da cui, ricordando la definizione di logaritmo e ponendo $e^c = k$,

$$y = k \cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Se l'equazione non è omogenea, possiamo utilizzare il **metodo di variazione delle costanti** [18] per la "costruzione" della soluzione. Il ragionamento è questo: se $q(x) = 0$, la soluzione trovata, fatto salve la parte riguardante la funzione esponenziale, dipende da una costante k. Se $q(x) \neq 0$, probabilmente quella costante k non sarà più -propriamente- una costante, ma dipenderà funzionalmente dalla variabile x, ovvero $k = k(x)$. Se questo è vero possiamo determinare questa funzione, applicando direttamente la definizione di soluzione generale dell'o.d.e.. Procediamo quindi nel cercare una soluzione dell'equazione iniziale non-omogenea del tipo:

$$y = k(x) \cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

[19]. Sostituendo la soluzione nell'o.d.e. iniziale, l'equazione deve diventare una identità, per cui:

$$D\left[k(x) \cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\right] + p(x) \cdot \left[k(x) \cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\right] = q(x)$$

ovvero anche:

$$k'(x) \cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} + \cancel{k(x) \cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}} \cdot [-p(x)] + \cancel{p(x) \cdot k(x) \cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}} = q(x).$$

[18] Dovuto a Lagrange.

[19] In particolare vogliamo determinare la funzione $k(x)$.

Quest'ultima uguaglianza rappresenta un'altra o.d.e. ad integrazione immediata per la funzione $k(x)$: la risolviamo e siamo a posto!

$$k'(x) \cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} = q(x) \quad \Leftrightarrow \quad k'(x) = q(x) \cdot e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

e, integrando:

$$k(x) = \int \left[q(x) \cdot e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} \right] \mathrm{d}x + c.$$

A questo punto, la soluzione generale dell'o.d.e. lineare del primo ordine (non omogenea) è data da:

$$\boxed{y = \left[\int \left[q(x) \cdot e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} \right] \mathrm{d}x + c \right] \cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}}.$$

Osservazione: nella costruzione della soluzione conviene procedere per passi, secondo il seguente schema.

(1) Si calcola dapprima:

$$P = \int p(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) Si determina poi l'integrale:

$$Q = \int q(x) \cdot e^{P}\,\mathrm{d}x.$$

(3) Si assembla la soluzione, per come indicato nella formula nel riquadro, eventualmente effettuando delle semplificazioni:

$$y = (Q + c)\, e^{-P}.$$

Esempio: Si risolva l'o.d.e.

$$y' + \cos(x)\, y - 2\cos(x) = 0.$$

Soluzione: Conviene riscrivere l'o.d.e. nella forma "tipica" che abbiamo scritto all'inizio della sezione, identificando le funzioni $p(x)$ e $q(x)$:

$$y' + \cos(x)\, y = 2\cos(x), \quad \Rightarrow \quad p(x) = \cos(x),\; q(x) = 2\cos(x).$$

Procediamo con l'ordine indicato precedentemente:

(1) A meno di una costante additiva, che è opportuno non considerare in questo momento:

$$P = \int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x).$$

(2) Inoltre:

$$Q = \int 2\cos(x) \cdot e^{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = 2\, e^{\sin(x)}.$$

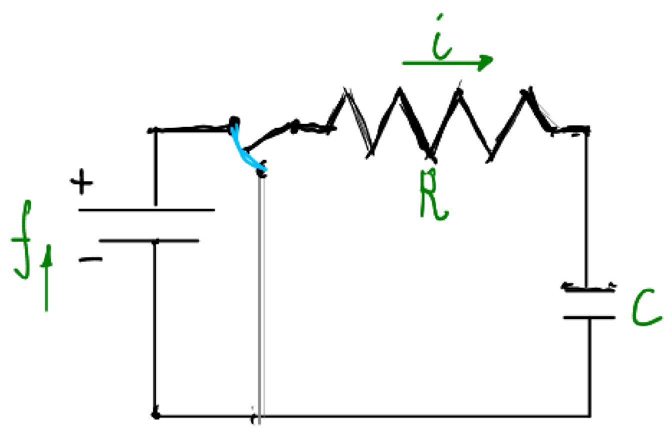
(3) Quindi la soluzione è:

$$y = \left[2\, e^{\sin(x)} + c\right] \cdot e^{-sin(x)} \quad \Leftrightarrow \quad y = 2 + c \cdot e^{-\sin(x)}.$$

□

3.1. Modelli lineari del primo ordine. Vediamo subito qualche interessante applicazione della teoria svolta per le o.d.e. lineari del primo ordine.

PROBLEMA 19 (Circuiti **RC**: processo di carica). *Consideriamo un semplicissimo circuito elettrico costituito da un generatore, una resistenza ed un condensatore: immaginiamo un circuito "ideale", ovvero con resistenze interne trascurabili ed inseriamo un interruttore, in modo da gestire la fase di carica e quella di scarica in modo semplice. Può essere di aiuto lo schema in figura.*



Vogliamo creare un modello matematico che descriva la legge di carica del condensatore nel momento in cui si chiede il circuito.

Soluzione: Supponiamo che inizialmente il condensatore sia scarico ed il circuito aperto. Quando chiudiamo il circuito, il generatore inizierà a far circolare una certa quantità di carica q, con una intensità i, variabili nel tempo. La carica va ad accumularsi sull'armatura positiva del condensatore che, quindi, si "caricherà" non appena chiudiamo il circuito. Considerando le differenze di potenziale agli estremi di ogni elemento presente nel circuito, possiamo dire che esse devono "pareggiare" quella del generatore. Ora, per la resistenza si ha che la quantità di carica che passa nel tempo [20] è direttamente proporzionale alla differenza di potenziale applicato agli estremi della resistenza

[20]Tale **"flusso"** di carica è, per definizione, l'intensità $i(t)$.

stessa, secondo una quantità che si oppone a tale passaggio, indicato con R, che è propria dell'elemento preso in considerazione, ovvero: $i = \frac{1}{R} \cdot \Delta V$. Per il condensatore, dato che la quantità di carica, che andrà ad accumularsi sull'armatura dalla parte positiva, è direttamente proporzionale alla differenza di potenziale applicata agli estremi delle armature, secondo una costate di proporzionalità chiamata *"capacità"* del condensatore ed indicata con C : allora $q(t) = C \cdot \Delta V$. Possiamo quindi scrivere, se f è la forza elettromotrice che genera la differenza di potenziale ΔV del generatore:

$$f = R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C}$$

e, ricordando che il flusso non indica altro che il numero di cariche che passano nel tempo, ovvero $i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = q'(t)$, arriviamo all'o.d.e. che descrive il processo di carica del condensatore in un circuito **RC**:

$$f - R \cdot q'(t) - \frac{q(t)}{C} = 0.$$

Per comodità riscriviamo questa equazione nella forma tipica delle lineari del primo ordine:

$$q'(t) + \frac{1}{RC} \cdot q(t) = \frac{f}{R}$$

individuando le due funzioni [21] $p(t) = \frac{1}{RC}$ e $q(t) = \frac{f}{R}$. Procediamo come fatto nell'esempio di prima.

(1)
$$P = \int p(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{RC}\mathrm{d}t = \frac{t}{RC}.$$

(2)
$$Q = \int q(t) \cdot e^{P}\mathrm{d}t = \int \frac{f}{R} \cdot e^{\frac{t}{RC}}\,\mathrm{d}t = f\,C \cdot e^{\frac{t}{RC}}.$$

(3) La soluzione è allora [22] :
$$q(t) = \left[f\,C \cdot e^{\frac{t}{RC}} + K \right] \cdot e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Determiniamo la costante d'integrazione imponendo che al tempo iniziale $t = 0$, la quantità di carica sulle armature del condensatore è nulla:

$$q(0) = 0 \quad \Longleftrightarrow f\,C + K = 0$$

[21] In questo caso *costanti*.

[22] In questo caso chiamiamo K la costante d'integrazione, in modo da non confonderla con C, la capacità del condensatore.

ergo:

$$K = -f\,C.$$

Abbiamo, quindi, trovato la legge che governa il fenomeno della carica del condensatore, in un semplicissimo circuito **RC** [23]:

$$\boxed{q(t) = f\,C \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}\,t}\right)}.$$

□

Osservazione: la quantità di carica, che accumula il condensatore, tende a crescere molto rapidamente all'inizio e, mano a mano che il tempo passa, il processo di carica rallenta ma, idealmente, non finisce mai: infatti per $t \to +\infty$ la parte "esponenziale" della formula tende a zero, ma non si annullerà mai, se non nel limite infinito! Possiamo dire che il condensatore, per un tempo adeguatamente lungo, tende a raggiungere una carica pari a $f \cdot C$, pur non raggiungendola mai. Inoltre, l'intensità di corrente, essendo la derivata nel tempo della quantità di carica, è data da:

$$i(t) = q\,'(t) = f\,\cancel{C} \cdot \frac{1}{R\cancel{C}} \cdot e^{-\frac{1}{RC}\,t} = \frac{f}{C} \cdot e^{-\frac{1}{RC}\,t}.$$

Essa è quindi rappresentata da una funzione che è decrescente infinitesima, con il suo valore (di partenza) massimo pari a $\frac{f}{C}$. Anche in questo caso, la corrente circolerà "idealmente" per sempre, anche se in misura infinitesima, per un tempo adeguatamente lungo. Il prodotto RC è, dimensionalmente, un tempo: prende il nome di **costante di tempo capacitiva** . Generalmente, dopo un lasso di tempo pari a RC, un condensatore risulta carico al 63%, per cui si considera "empiricamente" che per un tempo pari a tre o quattro volte tale costante capacitiva, il processo di carica sia completato.

Si invitano i lettori volenterosi a fare lo studio delle funzioni $q(t)$ *e* $i(t)$, *nell'intervallo di tempo* $[0, +\infty)$ *al fine di tracciarne il grafico* [24] .

Problema 20 (Circuiti **RC**: processo di scarica). *Una volta caricato il condensatore, escludiamo il generatore, spostando l'interruttore nella posizione che chiude il circuito costituito solo dalla resistenza e dal condensatore stesso e studiamone il processo di scarica.*

[23] Dopo facili semplificazioni e messe in evidenza.

[24] E comparare quanto ottenuto con quello che è stato visto durante le sperimentazioni di laboratorio, per altre discipline (ad esempio Telecomunicazioni o Elettronica).

Soluzione: Rispetto al modello di prima, l'unica cosa che dobbiamo fare è "mettere a zero" la forza elettromotrice, per cui l'o.d.e. che descrive il processo di scarica è:

$$q'(t) + \frac{1}{RC}\, q(t) = 0$$

Questa è lineare omogenea, quindi la integriamo direttamente ottenendo:

$$q(t) = K \cdot e^{-\int \frac{1}{RC}\, \mathrm{d}t} \quad \Longleftrightarrow \quad q(t) = K \cdot e^{-\frac{1}{RC}\, t}.$$

Per determinare la costante d'integrazione K, consideriamo che al tempo $t = 0$ il condensatore è "pienamente" carico con una quantità pari [25] a $f\,C$, e quindi

$$q(0) = f\,C \quad \Longleftrightarrow \quad K = f\,C.$$

La legge che governa il processo di scarica è dunque:

$$\boxed{q(t) = f\,C \cdot e^{-\frac{1}{RC}\, t}}.$$

□

Osservazione: Anche in questo caso possiamo dire che "idealmente" il processo di scarica non si conclude mai, dato che la funzione esponenziale non si annullerà mai! ci vorrebbe un tempo infinito per far tendere a zero la quantità di carica presente sulle armature del condensatore. D'altra parte, la corrente che circola è la derivata della quantità di carica, con il segno invertito, dato che il processo di scarica si ottiene in verso contrario a quello di carica, or dunque:

$$i(t) = -q'(t) = f\,\cancel{C} \cdot \left(-\frac{1}{R\cancel{C}}\right) \cdot e^{-\frac{1}{RC}\, t} = \frac{f}{R}\, e^{-\frac{1}{RC}\, t}.$$

In questo caso, l'intensità massima di corrente è $\frac{f}{R}$ e si ottiene per $t = 0$, dopodiché essa tende a diventare infinitesima.

4. O.d.e. lineari del secondo ordine

Una equazione differenziale lineare del secondo ordine è sempre riconducibile alla seguente scrittura standard:

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = c(x).$$

Anche in questo caso, se $c(x) = 0$ essa viene detta *omogenea.* Per il proseguo, avvertiamo che ci occuperemo solo del caso in cui le funzioni $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ siano ***costanti***. L'importanza delle o.d.e. del secondo ordine risiede soprattutto nel fatto che da Newton in poi, la possibilità di risolverle, ha consentito di capire i fenomeni della Fisica:

[25] Come abbiamo ricavato durante la discussione del problema precedente.

se uno pensa già solo alla seconda legge della dinamica, $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ e si ricorda che l'accelerazione non è altro che la derivata seconda dello spazio, rispetto al tempo, allora realizzerà immediatamente che questa scrittura è proprio una o.d.e. del secondo ordine. In generale, comunque, essa non deve essere anche lineare -anzi, in verità non lo è quasi mai! ad esempio, già il moto oscillatorio di un pendolo semplice non si descrive tramite una equazione lineare ma, in prima approssimazione, "per piccole oscillazioni", un'idea di come descrivere il fenomeno fisico la si può avere anche tramite una "linearizzazione" dell'equazione di partenza. Comunque, bando alle ciance, vediamo come risolvere questo tipo di equazioni. L'idea fondamentale è sfruttare il fatto che la funzione esponenziale abbia sia derivata che integrale uguale a se stessa. Affrontiamo, come primo ed unico caso, molto semplice, l'*o.d.e. lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti,* avvisando che per aumentare il livello di complessità del discorso e considerare anche il caso non-omogeneo, basta sommare alla soluzione generale della o.d.e. *"resa omogenea",* una soluzione particolare che dovrà essere determinata usando trucchi dettati dall'esperienza [26] . Quindi discutiamo la soluzione di una equazione che si possa rappresentare nella forma:

$$y'' + a\,y' + b\,y = 0.$$

Immaginando che essa possa essere risolta da una funzione di tipo esponenziale, supponiamo che la soluzione sia proprio $y(x) = e^{kx}$ con k parametro da determinare. Dalla definizione di soluzione di una equazione, sappiamo che se sostituiamo la sua espressione all'interno dell'equazione, essa deve essere soddisfatta, ovvero, nel caso in esame:

$$\left(e^{\lambda x}\right)'' + a\,\left(e^{\lambda x}\right)' + b\,e^{\lambda x} = 0$$

e, effettuando le derivazioni indicate, arriveremo a scrivere:

$$\lambda^2\,e^{\lambda x} + a\,\lambda\,e^{\lambda x} + b\,e^{\lambda x} = 0,$$

ovvero anche

$$e^{\lambda x} \cdot \left[\lambda^2 + a\,\lambda + b\right] = 0.$$

Ora, sappiamo bene che la funzione esponenziale è strettamente positiva, per cui, se quella scrittura deve essere identicamente soddisfatta, allora dovrà essere il contenuto della parentesi (quadra) uguale identicamente a zero:

$$\Rightarrow\ \lambda^2 + a\,\lambda + b = 0.$$

[26] Non affronteremo il discorso generale con $c(x) \neq 0$, richiedendo esso troppo tempo: vogliamo occuparci anche di risultati interessanti provenienti da altre aree della Matematica.

Questa equazione è una semplice equazione algebrica [27] e viene chiama *equazione caratteristica* associata all'equazione differenziale. Il parametro λ risulta quindi determinato dalla soluzione dell'equazione caratteristica associata all'o.d.e. di partenza! dalla teoria delle equazione di secondo grado sappiamo che il numero delle soluzioni è determinato dal *discriminante* [28] che, nel nostro caso, scriveremo come

$$\Delta = a^2 - 4b.$$

Se questa quantità risulta positiva, allora si troveranno <u>due</u> soluzioni e, conseguentemente, due valori λ che determinano la soluzione dell'o.d.e.. In verità se $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ sono soluzioni della stessa o.d.e., allora qualsiasi loro combinazione lineare continuerà ad essere una soluzione della stessa o.d.e. [29] ergo la soluzione generale dell'o.d.e. è data da:

$$\boxed{\Delta > 0 \;\Rightarrow\; k_1\, e^{\lambda_1 x} + k_2\, e^{\lambda_2 x}}$$

con k_1, k_2 due numeri reali arbitrari e λ_1, λ_2 soluzioni dell'equazione caratteristica associata.
Se $\Delta = 0$, allora l'equazione caratteristica ha una soluzione unica [30]. In tal caso una sola funzione esponenziale è fornita direttamente come soluzione dell'o.d.e. di partenza ($y_1 = e^{\lambda x}$) ma, semplicemente utilizzando la definizione di soluzione dell'equazione [31], si può facilmente verificare che una seconda soluzione all'o.d.e. è data da $y_2 = x \cdot e^{\lambda x}$. Ergo una loro combinazione lineare risulta ancora essere una soluzione e quindi, infine, la soluzione generale è data da:

$$\boxed{\Delta = 0 \;\Rightarrow\; k_1\, e^{\lambda x} + k_2\, x\, e^{\lambda x}}$$

con k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$ e λ soluzione dell'equazione caratteristica associata all'o.d.e..
Se $\Delta < 0$ l'equazione caratteristica non ha soluzioni nel campo reale e quindi la soluzione dell'o.d.e. deve essere determinata con qualche ragionamento in più. Prima, però, di ricavare la soluzione anche nel

---

[27] È di secondo grado, dato che l'equazione da cui viene ricavata è del secondo ordine: qualora l'o.d.e. fosse stata di ordine n, anche l'equazione algebrica associata avrebbe avuto il grado n.

[28] Che ricordiamo, per una equazione di secondo grado completa, del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ è definito come: $\Delta = b^2 - 4ac$

[29] Si invita lo studente solerte a dare una dimostrazione di questo fatto... (non è difficile da verificare!)

[30] O meglio, ne ha due coincidenti ovvero, come si dice in gergo, ha una soluzione con *molteplicità due.*

[31] Si invita, ancora una volta, lo studente solerte ad effettuare la dimostrazione come utile esercizio.

caso di discriminante negativo, è d'uopo introdurre il campo dei numeri complessi ed apprendere come operare con i numeri complessi.

4.1. I numeri Complessi. Tra i tanti modi per introdurre questo importantissimo insieme numerico, scegliamo l'approccio geometrico, facendo vedere come tanti argomenti già trattati nei capitoli precedenti, trovino un punto in comune in questo nuovo tipo di numero. Consideriamo un punto $P = (a, b)$ nel piano cartesiano, quindi semplicemente una coppia ordinata di numeri reali. Abbiamo già visto che le coordinate di questo punto identificano in modo univoco un vettore applicato nell'origine e con il secondo estremo nel punto P : per esprimere tale vettore, abbiamo anche detto di utilizzare nuovamente le coordinate (a, b), scrivendole in colonna $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e chiamandole *componenti* del vettore, anziché coordinate del punto. Aggiungiamo un'altra identificazione del punto P : esso rappresenta un *numero complesso* se dotiamo l'insieme dei punti del piano cartesiano della seguente operazione di prodotto, oltre che dell'operazione di somma componente per componente:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Quindi, l'insieme dei numeri complessi , indicato con $\mathbb{C}$, non è altro che l'insieme dei punti del piano dotato delle operazioni di somma e prodotto [32] testé definite. Il piano cartesiano, nel momento in cui lo si consideri come insieme di numeri complessi, viene chiamato ***piano di Gauss-Angard*** . L'asse delle ascisse, per una ragione che vedremo chiaramente a breve, viene detto *asse reale* mentre quello delle ordinate si chiamerà *asse immaginario.*

Osserviamo che i punti che appartengono all'asse reale hanno tutti la seconda coordinata nulla e, sia nella somma che nel prodotto, il risultato delle operazioni che coinvolgano numeri che stanno sull'asse delle ascisse, continuerà a mantenere la seconda coordinata nulla, infatti si ha: $(a, 0)+(b, 0) = (a+b, 0)$ e $(a, 0)\cdot(b, 0) = (a\cdot b, 0)$. Questo porta anche al fatto che [33] $(a, 0) - (b, 0) = (a - b, 0)$ e $(a, 0) : (b, 0) = (a : b, 0)$, ovvero tutti i punti/numeri complessi considerati sull'asse delle ascisse si comportano -nelle operazioni aritmetiche- esattamente come se fossero numeri reali ed anzi, potremmo identificare il numero $(n, 0)$ semplicemente con il numero n.

Altresì, considerando due numeri che stanno sull'asse delle ordinate, ad esempio $(0, a)$ e $(0, b)$, osserviamo che la loro somma sta ancora

[32] E delle loro operazioni inverse, definite a partire da queste due.

[33] Dimostrarlo per esercizio!

sull'asse delle ordinate [34] mentre il loro prodotto è:

$$(0,a)\cdot(0,b)=(-ab,0)$$

e quindi è un numero appartenente all'asse reale! In particolare, se consideriamo il numero complesso $(0,1)$ e lo moltiplichiamo per se stesso, otteniamo:

$$(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0).$$

Ma abbiamo detto che i numeri dell'asse delle ascisse possono essere identificati come numeri reali, quindi -se ora "etichettiamo" con una i il numero $i=(0,1)$, otteniamo che

$$i^2=-1,$$

ovvero abbiamo trovato un numero che moltiplicato per se stesso dà un risultato negativo. Questo numero i viene chiamato ***unità immaginaria*** per ovvi motivi [35] A questo punto, dato che (a,b) può essere decomposto, tramite le proiezioni sugli assi cartesiani, in due componenti: l'una "reale" e l'altra immaginaria, possiamo anche rappresentare il numero complesso $z=(a,b)$ tramite la quantità:

$$z=a+i\,b,$$

essendo i l'unità immaginaria [36]. Infatti, operando con le ordinarie regole dell'algebra, il prodotto tra due numero complessi $z_1=a+i\,b$ e $z_2=c+i\,d$ diventa:

$$(a+i\,b)\cdot(c+i\,d)=ac+i\,ad+i\,bc+i^2\,bd=ac-bd+i\,(ad+bc)$$

che non è altro $z_1\cdot z_2$ per come definito all'inizio di questa sezione. Da ora in poi, utilizzeremo liberamente una delle due scritture per indicare i numeri complessi, senza precisare ulteriormente il contesto.
Se consideriamo il numero complesso $z=(a,b)=a+i\,b$ nella sua interpretazione vettoriale, allora esso ammetterà una "lunghezza", detta ***modulo*** ed una "inclinazione" [37] detta ***argomento*** ed indicati rispettivamente con $|z|$ e $\arg(z)$. Dal Teorema di Pitagora si ottiene immediatamente

$$|z|=a^2+b^2$$

[34] Infatti sarà: $(0,a)+(0,b)=(0,a+b)$.

[35] Non esiste, tra i numeri reali, alcuna quantità che moltiplicata per se stessa dia un numero negativo, quindi questo numero è stato immaginato esistere dai pionieri dell'algebra del XVI secolo, per risolvere il problema di trovare una soluzione ad equazioni del tipo $x^2+1=0$, o di grado superiore.

[36] Una tale scrittura si dice *rappresentazione algebrica del numero complesso* .

[37] Rispetto all'asse delle ascisse.

e, come semplice applicazione della trigonometria al triangolo rettangolo formato dal vettore con i due segmenti paralleli agli assi cartesiani,

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$

Osserviamo che $(a,b)\cdot(a,-b) = (a^2+b^2,0)$, ergo, il modulo del numero complesso lo si può ottenere tramite il prodotto (notevole):

$$(a+i\,b)\cdot(a-i\,b).$$

Il numero complesso "associato" al numero $z = a+i\,b$ definito tramite $\bar{z} = a-i\,b$ viene detto ***complesso coniugato*** di z ed è molto importante, non solo perché permette di determinare il modulo del numero z, ma anche perché consente di effettuare velocemente le divisioni tra numeri complessi; inoltre ha un ruolo fondamentale nella ricerca delle soluzioni delle equazioni algebriche.

Esempio: Si voglia effettuare la divisione tra i due numeri complessi: $z_1 = 3+2\,i$ e $1-3\,i$.

Soluzione: Scriviamo "banalmente"

$$z_1 : z_2 = \frac{3+2\,i}{1-3\,i}$$

e consideriamo che moltiplicando numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore, la frazione che si ottiene non conterrà più un numero complesso al denominatore! Quindi, con una operazione del genere, il risultato sarà un numero complesso che rappresenta esattamente la divisione richiesta:

$$\frac{z_1}{z_2}\cdot\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{|z_2|}.$$

Procediamo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3+2\,i)\cdot(1+3\,i)}{1^2+3^2} = \frac{3-6+i\,(2+9)}{10} = -\frac{3}{10}+\frac{11}{10}\,i.$$

◇

Purtroppo esula dalle finalità del libro e non possiamo dimostrare qui il seguente teorema fondamentale.

TEOREMA 21 (Teorema Fondamentale dell'Algebra). *Una equazione algebrica di grado n ha in $\mathbb{C}$ esattamente n soluzioni, contante con le relative molteplicità ed a due a due coniugate* [38].

[38] È giusto un'osservazione che se un numero complesso z coincide con il proprio coniugato $\bar{z}$, allora esso è un numero reale! Nel caso delle equazioni di secondo grado, se $\Delta > 0$ le due soluzioni reali sono autoconiugate, così come nel caso

□

PROPOSIZIONE 17. *Data l'equazione di secondo grado* $ax^2+bx+c=0$ *con* $\Delta<0$, *le soluzioni di questa equazione in* $\mathbb{C}$ *sono complesse coniugate.*

Dimostrazione: Se $\Delta<0$ allora, nella formula risolutiva dell'equazione di secondo grado:

$$x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}$$

la soluzione in $\mathbb{R}$ non si può trovare poiché è impossibile determinare la radice quadrata di un numero negativo [39] . Possiamo però scrivere, in generale, se $\Delta<0$:

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{-1\cdot|\Delta|}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{|\Delta|}=i\cdot\sqrt{|\Delta|},$$

infatti, dalla definizione di radice quadrata, si ha che essa rappresenta quel numero che moltiplicato per se stesso dà il radicando e, in effetti, $i\cdot i=-1$ [40] . Le due soluzioni, quindi, sono (in $\mathbb{C}$):

$$z_{1,2}=-\frac{b}{2a}\mp i\,\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

che sono, evidentemente, due numeri complessi coniugati.

c.v.d.

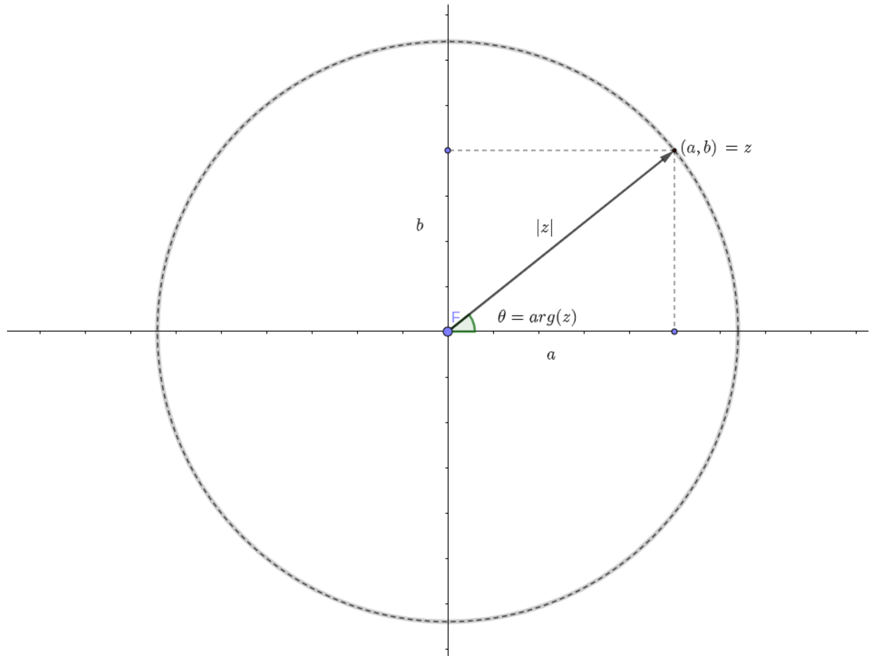
Per poter utilizzare le conoscenze apprese in questa sezione, al fine di completare il discorso sulla soluzione delle o.d.e. del secondo ordine, in caso di equazione caratteristica a discriminante negativo, abbiamo ancora bisogno di una terza interpretazione dei numeri complessi, che porta anche a quella che viene considerata, da un po' di tempo a questa parte, la *"formula più bella della Matematica",* ricavata dal grande Eulero.

4.1.1. *Una terza interpretazione dei numeri complessi.* Consideriamo il numero complesso $z=a+i\,b=(a,b)$ nel piano di Gauss-Angard, come nella figura seguente.

$\Delta=0$, la cui soluzione viene contata con molteplicità due! Nel caso $\Delta<0$ le soluzioni saranno complesse e coniugate, come vedremo nella dimostrazione del prossimo teorema.

[39] Il ché implicherebbe l'esistenza di un numero, che moltiplicato per se stesso sia negativo... cosa che, però, in $\mathbb{C}$ può benissimo essere.

[40] Quindi è stabilito che $i=\sqrt{-1}$.



La "posizione" del punto può benissimo essere definita dalla coppia di numeri *modulo/argomento* del vettore z : quindi lo stesso numero complesso può essere rappresentato dalla coppia:

$$z = (|z|, \arg(z)).$$

La coppia di numeri indicati testé si chiamano ***coordinate polari*** del punto (a, b) e sono molto comode nella rappresentazione di punti in cui si abbia un punto prefissato [41] , detto ***polo*** ed un retta prefissata [42] a partire dalla quale, in verso antiorario, si possano "contare" gli angoli che il raggio, congiungente il punto con il polo, forma con l'asse stesso [43] . Evidentemente sussiste una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ considerato in coordinate "rettangolari" [44] ed i punti del piano $[0, +\infty) \times [0, 2\pi)$, definiti tramite coordinate polari, in cui il polo è sistemato nell'origine del sistema cartesiano e gli angoli vengono contanti a partire dall'asse delle ascisse in verso antiorario. In

[41] Il centro delle circonferenze concentriche su una delle quali si trova il punto da individuare.

[42] Solitamente l'asse delle ascisse.

[43] Un radar, ad esempio, è un impianto che funziona emettendo una serie di onde radio in ogni direzione e, pertanto, si assume in modo naturale una rappresentazione dello spazio attorno a se, tramite coordinate polari, essendo il punto di emissione delle onde esattamente il polo del sistema di coordinate (nel caso tridimensionale, il sistema di coordinate polari viene esteso a formare le così dette ***coordinate sferiche.***)

[44] Le solite coordinate definite da un sistema cartesiano di riferimento

particolare, se $\vec{v}$ è il vettore che parte dall'origine ed arriva al punto P, di coordinate $P = (a, b)$ ed esso forma l'angolo θ con l'asse delle ascisse, allora il passaggio da un sistema di riferimento all'altro è dato dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} a = |\vec{v}| \cdot \cos(\theta) \\ b = |\vec{v}| \cdot \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} |\vec{v}| = a^2 + b^2 \\ \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases} .$$

Per quanto detto, quindi, il numero complesso z può anche essere rappresentato da una coppia di coordinate polari, definite tramite il modulo del numero ed il suo argomento. In particolare si ha, se indichiamo con:

$$\rho = |z| \quad \text{e} \quad \theta = \arg(z),$$

che il numero complesso è rappresentabile come

$$z = (\rho, \theta).$$

Ma si ha anche, per via delle relazioni scritte prima, che

$$z = \rho \cdot \cos(\theta) + i\,\rho \cdot \sin(\theta)$$

ovvero

$$\boxed{z = \rho \cdot [\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)]},$$

questa rappresentazione si chiama anche ***forma trigonometrica*** o ***forma polare*** dei numeri complessi [45]. Enunciamo e dimostriamo il prossimo importantissimo teorema, supponendo di sapere cosa significhi determinare la funzione esponenziale di un numero puramente immaginario, almeno a livello formale [46].

PROPOSIZIONE 18. *Ogni numero complesso z, di modulo unitario, è del tipo $z = e^{i\,\theta}$, essendo i l'unità immaginaria e $\theta = \arg(z)$.*

Dimostrazione: Vogliamo far vedere che sussiste l'uguaglianza:

$$e^{i\,\theta} = \cos(\theta) + i\,\sin(\theta).$$

A tal fine, classicamente, per come insegna Eulero, potremmo considerare le approssimazioni polinomiali delle funzioni esponenziale, seno e coseno, operare formalmente con l'unità immaginaria e non fermare gli sviluppi [47] polinomiali, per ottenere l'identità formale. Operiamo

[45] Osserviamo che ogni numero complesso della forma: $\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)$ è **di modulo unitario.**

[46] Non preoccupiamoci, per ora, di dare un significato alla scrittura $e^{i\,\theta}$, trattando l'unità immaginaria come un normalissimo parametro numerico con la sola condizione che $i^2 = -1$.

[47] Quindi considerando le ***serie di Taylor***.

qui, invece, in quest'altro modo abbastanza sbrigativo; consideriamo la funzione:

$$f(\theta) = \frac{\cos(\theta) + i\ \sin(\theta)}{e^{i\theta}}.$$

Essa è definita dappertutto, stante il fatto che il denominatore è sempre diverso da zero e, per di più, è [48] derivabile, essendo composta tramite funzioni derivabili ovunque. La sua derivata è:

$$f'(\theta) = \frac{[-\sin(\theta) + i\ \cos(\theta)] \cdot e^{i\theta} - [\cos(\theta) + i\ \sin(\theta)] \cdot i\, e^{i\theta}}{\left(e^{i\theta}\right)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{-\sin(\theta)} + \cancel{i\ \cos(\theta)} - \cancel{i\ \cos(\theta)} + \cancel{\sin(\theta)}}{\left(e^{i\theta}\right)^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{e^{i\theta}} = 0.$$

Essendo la derivata nulla, arguiamo che $f(\theta)$ è una funzione costante e, in particolare, essa assume costantemente il valore che ottiene per una scelta qualsiasi di θ [49] :

$$f(0) = \frac{\cos(0) + i\ \sin(0)}{e^{i \cdot 0}} = 1.$$

Ma se essa è costantemente uguale ad 1, allora il numeratore deve essere uguale, identicamente, al denominatore, da cui la tesi.

c.v.d.

COROLLARIO 4. *Ogni numero complesso z può scriversi nella forma $\rho \cdot e^{i\theta}$ [50] , essendo $\rho = |z|$ e $\theta = \arg(z)$.*

Dimostrazione: immediata

□

COROLLARIO 5 (Formula di de Moivre). *Sia z un numero complesso, allora:*

$$z^n = \rho^n \cdot [\cos(n \cdot \theta) + i\ \sin(n \cdot \theta)].$$

Dimostrazione: Scriviamo il numero complesso z nella forma esponenziale:

$$z = \rho\, e^{i\theta}.$$

Elevando il numero alla potenza n-esima, si ottiene:

$$z^n = \left(\rho\, e^{i\theta}\right)^n = \rho^n \cdot e^{i\,n\,\theta}.$$

Per quanto dimostrato nella proposizione precedente:

$$e^{i\,n\,\theta} = \cos(n \cdot \theta) + i\ \sin(n \cdot \theta)$$

[48] Almeno formalmente.

[49] Scegliamo, intuitivamente il valore più semplice da calcolare, ovvero $\theta = 0$.

[50] Questa si chiama ***rappresentazione esponenziale*** dei numeri complessi.

e mettendo assieme le ultime due scritture si previene alla tesi:

$$z^n = \rho^n \cdot [\cos(n \cdot \theta) + i\, \sin(n \cdot \theta)].$$

c.v.d.

COROLLARIO 6 (Radici n-esime dell'unità). *Le radici n-esima dell'unità sono in numero di n e si determinano tutte tramite la formula*

$$\sqrt[n]{1} = \cos\left(\frac{2\pi\, k}{n}\right) + i\, \sin\left(\frac{2\pi\, k}{n}\right) = e^{i\,\frac{2\pi\, k}{n}}$$

per $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Dimostrazione: Per definizione di radice n-esima si ha che essa, elevata alla n deve dare 1. Sia allora z una radice n-esima dell'unità, dovrà essere:

$$z^n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^{i\theta}\right)^n = 1$$

e quindi

$$e^{i\, n \cdot \theta} = 1.$$

Applicando la formula di de Moivre ed osservando che:

$$1 = \cos(0) + i\, \sin(0),$$

otteniamo:

$$\cos(n \cdot \theta) + i \sin(n \cdot \theta) = \cos(0) + i\, \sin(0).$$

Questa scrittura porta alle seguenti due equazioni equivalenti:

$$\cos(n \cdot \theta) = \cos(0) \quad \text{e} \quad \sin(n \cdot \theta) = \sin(0).$$

Risolvendo una di queste equazioni goniometriche otteniamo:

$$n \cdot \theta = 0 + 2k\pi \quad \text{da cui} \quad \theta = \frac{2k\pi}{n}.$$

Questi angoli sono da considerarsi per valori interi di k e quindi, poiché per $k = 0, 1, \ldots, n-1$ le frazioni indicano angoli tutti distinti, per poi ritornare a ripetersi, a partire da $k = n$ ecc...; per la periodicità delle funzioni goniometriche, otteniamo che le radici n-esime dell'unità sono in numero di n e si ottengono tramite la formula enunciata nella tesi del corollario [51] .

c.v.d.

[51] Come esercizio, si rappresenti graficamente, su una circonferenza goniometrica, la posizione delle radici dell'unità, ad esempio per $n = 3, 4, 6$, ecc... convincendosi che i punti sulla circonferenza, corrispondenti a tali radici, formano sempre un poligono regolare di n lati, con il primo vertice nel punto $(1, 0)$ del sistema di coordinate cartesiane, in cui la circonferenza abbia centro nel punto $(0, 0)$.

In ultimo, la formula eletta dalla comunità matematica come "la più bella" della Matematica:

COROLLARIO 7. *Sussiste la seguente relazione:*

$$\boxed{e^{i\,\pi}+1=0},$$

che lega le principali costanti della Matematica:

- *l'unità da cui nascono, per induzione, i numeri Naturali: "1";*
- *l'unità immaginaria, da cui si "creano" i numeri Complessi: "i";*
- *la costante di Nepero, onnipresente nella descrizione dei fenomeni fisici: "e";*
- *l'elementro neutro per l'addizione, nonché l'annichilatore per il prodotto: "0".*

Dimostrazione: Basta considerare la relazione ricava nella proposizione:

$$e^{i\,\theta}=\cos(\theta)+i\,\sin(\theta)$$

e porre $\theta=\pi$. Si avrà quindi:

$$e^{i\,\pi}=\cos(\pi)+i\,\sin(\pi)\quad\Leftrightarrow\quad e^{i\,\pi}=-1+i\cdot 0$$

equivalente alla tesi.

c.v.d.

4.2. Completamento della discussione sulle O.d.e. del II ordine, lineari, omogenee a coefficenti costanti. Possiamo ora, dopo aver introdotto il campo dei numeri complessi e qualche utile formula che li riguardano, completare il discorso lasciato in sospeso qualche pagina fa. Ricordiamo il problema: avevamo una o.d.e. del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti ed omogenea, il cui polinomio caratteristico associato presenta il discriminante negativo. Il polinomio l'avevamo scritto come:

$$\lambda^2+a\,\lambda+b=0$$

ed il discriminante è, pertanto,

$$\Delta=a^2-4b\,<0.$$

Le soluzioni dell'equazione possono essere date solo nel campo complesso e risultano le due radici complesse coniugate:

$$\lambda_{1,2}=-\frac{a}{2}\mp i\cdot\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}.$$

Per comodità poniamo $\alpha = -\frac{a}{2}$ e $\beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$. Pertanto le soluzioni dell'o.d.e. sono della forma:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

che, riscritte utilizzando le etichette di prima, diventano:

$$y_1 = e^{(\alpha - i\,\beta)\,x} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{(\alpha + i\,\beta)\,x}$$

ovvero:

$$y_1 = e^{\alpha\,x} \cdot e^{i\,(-\beta\,x)} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{\alpha\,x} \cdot e^{i\,\beta\,x}.$$

Infine, per le formule di de Moivre, otteniamo:

$$y_1 = e^{\alpha\,x} \cdot [\cos(-\beta\,x) + i\sin(-\beta\,x)] \quad \text{e} \quad y_2 = e^{\alpha\,x} \cdot [\cos(\beta\,x) + i\,\sin(\beta\,x)]$$

ossia:

$$y_1 = e^{\alpha\,x} \cdot [\cos(\beta\,x) - i\sin(\beta\,x)] \quad \text{e} \quad y_2 = e^{\alpha\,x} \cdot [\cos(\beta\,x) + i\,\sin(\beta\,x)].$$

Ora, dato che una qualsiasi combinazione lineare di soluzioni è ancora soluzione, possiamo scrivere che la soluzione generale è del tipo:

$$C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$$

ma, avendo la pazienza di scrivere qualche passaggio e ragionare un poco su quanto scritto, otteniamo ancora:

$$\begin{aligned} C_1\,e^{\alpha\,x}\,[\cos(\beta\,x) - i\sin(\beta\,x)] + C_2\,e^{\alpha\,x}\,[\cos(\beta\,x) + i\sin(\beta\,x)] &= \\ = e^{\alpha\,x} \cdot [(C_1 + C_2) \cdot \cos(\beta\,x) + i\,(C_2 - C_1)\sin(\beta\,x)]&. \end{aligned}$$

Ora osserviamo che scegliendo $C_1 = 1$ e $C_2 = 1$ la soluzione è:

$$2\,e^{\alpha\,x} \cdot \cos(\beta\,x)$$

mentre, scegliendo $C_1 = -1$ e $C_2 = 1$ la soluzione è:

$$2\,e^{\alpha\,x} \cdot i\,\sin(\beta\,x).$$

Questo vuol dire che le combinazioni lineari di $e^{(\alpha + i\,\beta)\,x}$ e $e^{(\alpha - i\,\beta)\,x}$ sono le stesse di quelle generate dalle due funzioni:

$$e^{\alpha\,x} \cdot \cos(\beta\,x) \quad \text{e} \quad e^{\alpha\,x} \cdot \sin(\beta\,x).$$

Ergo, la soluzione generale, nel caso in esame, può essere data utilizzando unicamente le combinazioni lineari delle ultime due funzioni reali:

$$\boxed{\Delta < 0 \;\Rightarrow\; e^{\alpha\,x} \cdot [k_1 \cdot \cos(\beta\,x) + k_2 \cdot \sin(\beta\,x)]},$$

con k_1, k_2 due parametri reali qualsiasi e α, β rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria delle soluzioni $\lambda_{1,2}$ dell'equazione caratteristica associata.

Seguono ora un po' di esempi di risoluzione di o.d.e. del secondo ordine, lineari, omogenee a coefficienti costanti.

Esempio: Si risolva la seguente o.d.e.:

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

Soluzione: L'equazione caratteristica associata è:

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

che ha due soluzioni reali in:

$$\lambda_1 = -3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1.$$

Ergo la soluzione generale dell'equazione è:

$$y(x) = k_1 \cdot e^{-3x} + k_2 \cdot e^x.$$

$\diamond$

Esempio: Risolvere l'o.d.e.:

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Soluzione: L'equazione caratteristica associata è:

$$\lambda^2 + 4\,\lambda + 4 = 0$$

e, dato che il primo membro è il quadrato del binomio $(\lambda + 2)^2$, allora essa si risolve solo per $\lambda = -2$, radice contata con molteplicità due. Ergo, la soluzione generale dell'o.d.e. risulta essere:

$$y(x) = k_1 \cdot e^{-2x} + k_2 \cdot x\, e^{-2x}.$$

$\diamond$

Esempio: Determinare la soluzione generale dell'o.d.e.:

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Soluzione: In questo caso l'equazione caratteristica ha discriminante negativo, infatti essa è data da:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

ed il discriminante risulta essere:

$$\Delta = -16 < 0.$$

Le soluzioni complesse (coniugate) dell'equazione caratteristica sono:

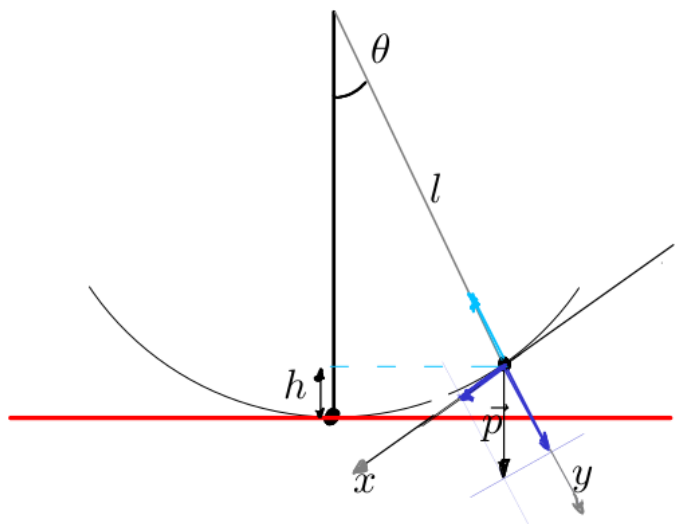
$$\lambda_{1,2} = 1 \mp i\,2,$$

quindi la parte reale $\alpha = \Re(\lambda_{1,2}) = 1$ mentre quella immaginaria è $\beta = \Im(\lambda_{1,2}) = 2$. Ergo, la soluzione cercata dell'o.d.e. è:

$$y(x) = [k_1 \cdot \cos(2x) + k_2 \sin(2x)] \cdot e^x.$$

$\diamond$

Per concludere questo capitolo, risolviamo il problema del *"pendolo semplice"* per piccole oscillazioni, vedendo che esso è modellizzato dalla stessa identica o.d.e. che si ricava per il moto di una massa oscillante collegata all'estremo libero di una molla, vincolato a muoversi su un piano orizzontale. Cominciamo con l'osservare la seguente figura.



Il peso del corpo, supposto puntiforme e di massa m, vincolato al pendolo di lunghezza l, che si suppone idealmente privo di massa e non soggetto ad alcuna forza di attrito [52] è diretto verso il basso e può essere scomposto lungo due direzioni perpendicolari: l'una coincidente con la retta a cui appartiene l'asta del pendolo, che chiamiamo asse y, e l'altra tangente alla circonferenza che descrive il corpo mentre oscilla [53]. La componente lungo l'asse y della forza peso, viene controbilanciata dal pendolo stesso tramite la forza uguale e contraria denominata *tensione.* È essa che vincola il corpo ad oscillare lungo una circonferenza ed a non fargli fare altre traiettorie! La componente del vettore $\vec{p}$, il peso, lungo l'asse delle x, invece, è quella che "procova" il movimento poiché "tira" il corpo verso la direzione tangente (e verso il basso). Per semplici ragioni di trigonometria, tale componente è: $\vec{p}_x = |\vec{p}| \cdot \sin(\theta)$. D'altra parte, $|\vec{p}| = m \cdot g$, essendo $g \approx 9.81\,\text{m/sec}^2$ l'accelerazione di gravità e quindi, per la seconda legge della dinamica, possiamo scrivere:

$$-\cancel{m} \cdot g \cdot \sin(\theta) = \cancel{m} \cdot \vec{a}.$$

[52] E, sicuramente, rigido, nel senso che non si allunga o si accorcia durante le oscillazioni.

[53] Che indicheremo, per semplicità, come "asse x".

Ora $\vec{a}$ è l'accelerazione che il corpo subisce e, come abbiamo abbondantemente visto nei capitoli precedenti, essa corrisponde alla derivata seconda dello spazio percorso: nel nostro caso, quest'ultimo, coincide con l'arco di circonferenza che sottende l'angolo θ, per cui lo spazio equivale a $l \cdot \theta$ (radianti), ergo l'accelerazione non è altro che $\vec{a} = l \cdot \ddot{\theta}$, essendo $\ddot{\theta}$ la derivata seconda di θ rispetto al tempo t. Sostituendo queste quantità nella precedente relazione si ottiene:

$$-g\sin(\theta) = l \cdot \ddot{\theta}$$

da cui

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \sin(\theta) = 0.$$

Per piccole oscillazioni ricordiamo che $\sin(\theta) \approx \theta$ [54] e quindi, in ultimo, chiamando $\omega^2 = \frac{g}{l}$ [55] otteniamo:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2 \cdot \theta = 0}$$

che rappresenta una o.d.e. del secondo ordine a coefficienti costanti.

Alla stessa equazione saremmo arrivati considerando il principio di conservazione dell'energia, infatti, liberando il pendolo dalla posizione di altezza l [56] rispetto alla linea "di terra" [57] e considerando il transito in un punto di altezza h, avremmo dovuto scrivere che *tutta l'energia potenziale iniziale, si è trasformata in energia cinetica più una residuo di energia potenziale* [58] e quindi:

$$\cancel{m} \cdot g \cdot l = \cancel{m} \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot |\vec{v}|^2.$$

Ma $h = l - l\cos(\theta)$ mentre $|\vec{v}| = l \cdot \dot{\theta}$; sostituendo nell'equazione di prima otteniamo:

$$g \cdot \cancel{l} \cdot [\cancel{1} - (\cancel{1} - \cos(\theta))] = \frac{1}{2} \cdot l^{\cancel{2}} \cdot (\dot{\theta})^2.$$

Derivando questa uguaglianza rispetto al tempo si ottiene:

$$-g \cdot \sin(\theta) \cdot \dot{\theta} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot l \cdot \cancel{2} \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta},$$

e semplificando, infine, $\dot{\theta}$ in entrambi i membri:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0,$$

[54] Equivalenza tra infinitesimi!

[55] Che è una quantità positiva.

[56] Ovvero dalla posizione per la quale il pendolo risulta orizzontale e parallela alla linea di terra

[57] Che abbiamo tracciato in rosso.

[58] Quest'ultima nel punto più basso risulta "zero".

esattamente come prima.

Per risolvere questa equazione, troviamo le soluzioni [59] dell'equazione caratteristica associata:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

che sono, evidentemente:

$$\lambda_{1,2} = -i \cdot \omega.$$

Da questo di evince che la parte reale delle soluzioni $\mathcal{R}(\lambda_{1,2}) = 0$ mentre quella immaginaria $\Im(\lambda_{1,2}) = \omega$. La soluzione dell'o.d.e. è, pertanto:

$$\theta(t) = k_1 \cos(\omega\, t) + k_2 \sin(\omega\, t).$$

Se ora, furbescamente, esprimiamo i due parametri k_1, k_2, rispettivamente come

$$k_1 = A \cdot \sin(\omega_0) \qquad \text{e} \qquad k_2 = A \cdot \cos(\omega_0)$$

essendo A e ω_0 due parametri opportunamente scelti, allora potremo scrivere:

$$\theta(t) = A\, \sin(\omega_0)\, \cos(\omega\, t) + A\, \cos(\omega_0)\, \sin(\omega\, t)$$

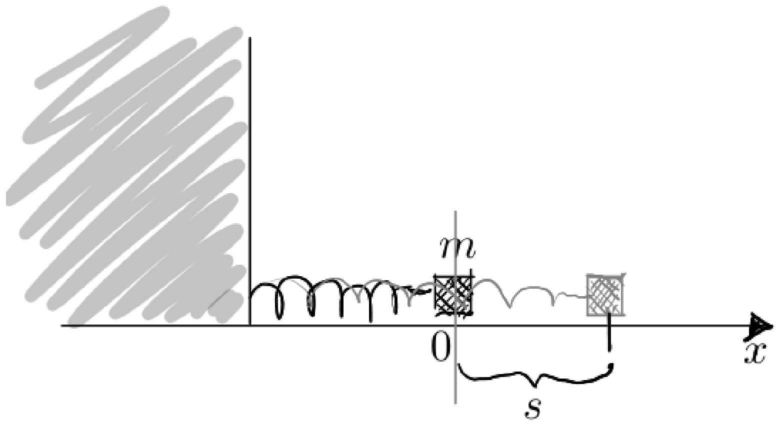
ovvero, ricorrendo alle formule di addizione per archi:

$$\boxed{\theta(t) = A\, \sin(\omega_0 + \omega\, t)}.$$

□

Consideriamo ora la figura seguente, che rappresenta una molla di costante elastica k, ancorata ad un muro e, all'altra estremità, agganciata ad un corpo di massa m. La posizione "di riposo" della molla, che è pari alla lunghezza della molla non allungata, la indichiamo come *"ascissa zero"*.

[59] In $\mathbb{C}$.



Spostando il corpo ad una distanza s, per la legge di Hooke [60] esso sarà soggetto ad una *forza di richiamo* direttamente proporzionale allo spazio di allungamento della molla, per cui possiamo scrivere:

$$m \cdot \vec{a} = -k \cdot s.$$

Ora, $\vec{a}$ non è altro che la derivata seconda dello spazio s rispetto al tempo, per cui, sostituendo:

$$m \cdot \ddot{s} = -k \cdot s$$

da cui

$$\boxed{\ddot{s} + \frac{k}{m} \cdot s = 0}.$$

Dato che il rapporto $\frac{k}{m}$ risulta positivo, lo possiamo rinominare nuovamente come ω^2 e scrivere l'equazione differenziale dell'***oscillatore armonico*** [61]

$$\boxed{\ddot{s} + \omega^2 \cdot s = 0}.$$

Si osserva immediatamente che questa equazione è identica [62] a quella del pendolo semplice per piccole oscillazioni: ergo ha la stessa soluzione. Nel caso dell'oscillatore armonico si preferisce porre i due parametri k_1, e k_2 pari rispettivamente a $A\cos(\Phi)$ e $-A\sin(\Phi)$, in modo che la soluzione si possa scrivere come:

$$s(t) = A\,\cos(\omega\,t + \Phi).$$

◇

[60] Che esprime semplicemente la diretta proporzionalità tra "quanto tira" la molla e "quanto è stata allungata".

[61] Che non è altro il moto del corpo oscillante soggetto unicamente alla forza di una molla

[62] Mutatis mutandi: basta scambiare la s con la θ!

Parte 5

Matematica dell'incerto

CAPITOLO 14

Richiami di calcolo delle probabilità e distribuzioni

Non intendiamo, in questa ultima parte del libro, ritrovare e discutere i risultati già presentati nel primo volume di questa opera [1], a cui si rimanda per approfondire o chiarire meglio quello che ricorderemo, a breve, di calcolo delle probabilità (nel discreto). Vogliamo, piuttosto, introdurre dei concetti fondamentali che permetteranno di estendere lo studio del calcolo delle probabilità anche in un contesto di variazioni continue. Ad esempio, dal punto di vista classico [2], la probabilità di colpire un determinato punto di una parete, lanciando una pallina da tennis ad occhi chiusi, è sempre e comunque zero! infatti sulla parete ci sono un'infinità di punti ed il rapporto tra uno [3] ed una quantità tendente all'infinito di altri punti, tutti quelli presenti sulla parete, tende a zero. Da questo semplice esempio si arguisce che il modo di assegnare valori di probabilità ad un numero finito di casi, su un'infinità di altri che possono comunque avvenire, non può essere quello dell'approccio classico [4] . Però non tutto quello che è stato detto negli anni precedenti va perso, anzi: sarà il punto di partenza per costruire un'altra sontuosa teoria, sulla quale, oggigiorno, si poggia qualsiasi ricerca scientifica di rilievo. Prima di tutto, quindi, ricorderemo, senza spendere ulteriori commenti, esempi o approfondimenti, i principali risultati trovati nello studio del calcolo delle probabilità, durante il primo biennio delle scuole superiori.

1. I principali teoremi del calcolo delle probabilità

Siano E_1, E_2 due eventi ed indichiamo con $Pr(E)$ la probabilità che l'evento E si verifichi [5] . La probabilità che i due eventi accadano assieme, ovvero che accada almeno uno dei due è calcolabile tramite i seguenti due risultati:

[1] Quarta parte del primo volume.

[2] Ovvero, probabilità come rapporto di casi favorevoli su tutti quelli possibili.

[3] Il punto prescelto.

[4] Risulterebbe, altrimenti, che le probabilità di successo sono sempre nulle!

[5] Va bene anche se la assegniamo come rapporto di casi favorevoli sui totali, ovvero come frequenza relativa su un gran numero di prove.

- $$\boxed{Pr(E_1 \wedge E_2) = Pr(E_1) \cdot Pr(E_2/E_1),}$$
  in cui $Pr(E_2/E_1)$ esprime la probabilità condizionale che avvenga E_2 dato che è uscito E_1.
- $$\boxed{Pr(E_1 \cup E_2) = Pr_(E_1) + Pr(E_2) - Pr(E_1 \wedge E_2)}.$$

Ricordiamo ora che due eventi E_1 ed E_2 si dicono ***indipendenti*** se

$$Pr(E_2/E_1) = Pr(E_2),$$

ovvero, il fatto che uno dei due avvenga, non influisce sull'assegnazione della probabilità all'altro evento; se due eventi sono indipendenti, evidentemente, si ottiene anche:

$$Pr(E_1 \wedge E_2) = Pr(E_1) \cdot Pr(E_2).$$

Considerando una famiglia di eventi A_i che non possono avvenire contemporaneamente [6] e che completano tutti i casi possibili [7] e considerato un qualsiasi evento E, tramite le due formule di cui sopra, si giunge ad affermare il seguente *Teorema delle Probabilità totali*:

TEOREMA 22 (Teorema delle Probabilità Totali). *Nell'ipotesi in cui sia data una famiglia esaustiva di eventi $\{A_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ ed un evento E allora*

$$\boxed{Pr(E) = \sum_{i=1}^{n} Pr(A_i) \cdot Pr(E/A_i)}.$$

2. Distribuzioni di probabilità, cumulative e densità

Ricordiamo ora la seguente basilare definizione:

DEFINIZIONE 13 (Variabile Aleatoria). *Una funzione X, definita da uno spazio di eventi [8] ad un insieme di numeri reali, è detta **variabile aleatoria** e la indichiamo con* v.a. .

In definitiva, una *v.a.* è semplicemente una funzione

$$X : S \to \mathbb{R}$$

[6] Ovvero, per i quali $Pr(A_i \wedge A_j) = 0$ per ogni $i \neq j$, il ché significa che sono eventi *a due a due disgiunti.*

[7] E quindi, alcuni di essi devono necessariamente avvenire assieme a qualsiasi altro evento E che noi andassimo a considerare. Si dice, ricordiamolo, che la famiglia A_i costituisce una *famiglia esaustiva di eventi.*

[8] Detto anche **spazio campionario**.

che assegna agli eventi contenuti nello spazio S un numero reale. Ad esempio, consideriamo il seguente esperimento: lancio un dado, se esce "dispari" assegno 1, se esce pari assegno 0. Posso rappresentare la *v.a.* X, tramite la funzione

$$X : \{\text{pari, dispari}\} \to [0,1] \subset \mathbb{R}$$

$$X(\text{pari}) = 0, \qquad X(\text{dispari}) = 1.$$

Altro esempio, magari anche più interessante, è una *v.a.* la funzione X che "conta" il numero di particelle emesse da una sorgente radioattiva in un'ora di tempo.

Se l'immagine della *v.a.* è un insieme finito di valori, oppure è numerabile [9], allora la variabile aleatoria si dirà ***discreta.*** Se invece l'immagine della *v.a.* risulta essere un intervallo [10] incluso in $\mathbb{R}$, allora la *v.a.* si dirà ***continua.*** Se riusciamo ad assegnare ad ogni valore che la *v.a.* possa prendere, una probabilità, allora diciamo che alla variabile aleatoria è stata assegnata una ***distribuzione di probabilità*** . Supponiamo, ad esempio, che la *v.a.* X possa assumere solo i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$, allora una distribuzione di probabilità per X è data conoscendo i valori $Pr\,(X = x_1)\,,\ Pr\,(X = x_2)\,, \ldots,\ Pr\,(X = x_n)\,.$ Per ragionevolmente pochi valori della *v.a.*, una distribuzione di probabilità può essere rappresentata direttamente tramite una tabella come quella che segue:

Valore di X	Probabilità che X assuma quel dato valore
x_1	$Pr\,(X = x_1)$
x_2	$Pr\,(X = x_2)$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$Pr\,(X = x_n)$

Osservazione: Dato che i valori considerati sono tutti quelli che la *v.a.* può assumere, allora è necessario che la somma di tutte le probabilità assegnate, nella distribuzione, sia pari ad uno:

$$\sum_{k=1}^{n} Pr\,(X = x_k)\, = 1.$$

Dovrebbe essere evidente che questo modo di assegnare una distribuzione di probabilità può funzionare solo se le "determinazioni" della

[9] Ovvero si può mettere in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri Naturali.

[10] Possibilmente anche tutto $\mathbb{R}$.

v.a. sono in numero discreto [11] : per una *v.a.* continua non si può, in alcun modo, stilare una tabella di distribuzione delle probabilità [12] . Ciò non significa che dovremo rinunciare a questo potentissimo strumento di lavoro, ma che bisogna ingegnarsi per descrivere le distribuzioni di probabilità in modo diverso. All'uopo si introduce la seguente ***funzione di distribuzione cumulativa*** [13] :

$$F(x) = Pr\,(X \leqslant x)\,.$$

Per una *v.a.* discreta, la "cumulativa" si ottiene semplicemente sommando tutti i valori di probabilità assegnati fino al valore x indicato nell'argomento della funzione di distribuzione. Ad esempio, facendo riferimento alla tabella di distribuzione scritta precedentemente, si ha:

$$F(x_1) = Pr\,(X = x_1)\,, \quad F(x_2) = Pr\,(X = x_1) + Pr\,(X = x_2)\,, \ldots$$

$$\ldots\ F(x_n) = \sum_{k=1}^{n} Pr\,(X = x_k) = 1.$$

Osservazione 1: evidentemente, l'ultimo valore "cumula" tutte i valori di probabilità che, come abbiamo già osservato in precedenza, devono sommare ad uno.

Osservazione 2: Data la funzione cumulativa $F(x)$, volendo determinare la probabilità che la *v.a.* assuma i valori compresi tra due prefissati, diciamo a e b, con $a \leqslant b$, ovvero, volendo determinare:

$$Pr\,(a \leqslant X \leqslant b)$$

possiamo calcolare questa probabilità semplicemente effettuando la differenza:

$$F(b) - F(a).$$

Infatti si ha

$$F(b) - F(a) = Pr\,(X \leqslant b) - Pr\,(X \leqslant a) = Pr\,(a \leqslant X \leqslant b)$$

avendo eliminato tutte le probabilità associate alle determinazioni inferiori ad a della X. Si osserva che questa è una situazione analoga a quanto avviene nel calcolo integrale, in cui, per determinare l'area sottesa ad una curva definita dalla funzione $y = f(x)$, nell'intervallo $[a, b]$, si può determinare una primitiva $F(x)$ di $f(x)$ e calcolare la differenza $F(b) - F(a)$.

[11] Meglio ancora se in numero finito!

[12] Dovendo considerare un numero infinito e non numerabile di possibili valori per la *v.a.*.

[13] Detta anche ***funzione di ripartizione***.

L'ultima osservazione giustifica la seguente definizione che rende possibile parlare di distribuzione di probabilità anche nel caso di *v.a.* continue:

DEFINIZIONE 14. *Data la* v.a. *continua* X, *che prende valori nell'intervallo* [14] $I = [a, b]$, *una funzione positiva ed integrabile* $p_X(x)$ *tale per cui, se* $x_1,\, x_2 \in I$:

$$Pr\,(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p_X(x)\,dx$$

si chiama **funzione di densità di probabilità** *della* X.

Si noti che:

$$\int_a^b p_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

dato che la *v.a.* assume sicuramente uno dei valori compresi nell'intervallo $[a, b]$; inoltre, la funzione cumulativa [15] è data da:

$$F(t) = \int_a^t p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

esprimendo l'integrale proprio la probabilità che la *v.a.* raggiunga al più il valore t : ovvero è $Pr\,(X \leqslant t)$.

Osservazione: dallo studio del calcolo integrale sappiamo già che non tutte le funzioni che si vogliono integrare ammettono primitive: questo significa che avere a disposizione la funzione di densità di probabilità non assicura affatto che noi si riesca a determinare un funzione di distribuzione cumulativa delle probabilità. È, ad esempio, quello che avviene per la *distribuzione normale*, detta anche ***distribuzione gaussiana,*** per la quale si conosce la funzione di densità e -data l'importanza nelle applicazioni probabilistiche e statistiche- si è dovuta scrivere una tabella numerica di valori approssimati, sufficientemente precisi, per descriverne la funzione di ripartizione [16] .

3. Principali Distribuzioni Discrete

Forti dei discorsi fatti precedentemente, passiamo ora alla conoscenza delle principali distribuzioni di probabilità che, ricordiamo, nel discreto vengono definite conoscendo la legge con cui si assegnano le probabilità alle possibili determinazioni della *v.a.,* oggetto di interesse.

[14] Possibilmente anche $a = -\infty$ e $b = +\infty$.

[15] Ovvero la funzione di ripartizione.

[16] Che poi è la funzione che serve conoscere per calcolare la probabilità che una variabile assuma valori compresi tra due altri prefissati.

Pertanto, data la *v.a.* X, che può assumere in valori $x_1, \ldots, x_n$, noi siamo interessati a trovare la funzione $p(x)$ che assegna la probabilità che X assuma il valore x [17], essendo $x = x_1, \ldots, x_n$ ovvero:

$$p(x) = Pr\,(X = x)\,.$$

Prima di procedere con la discussione delle principali distribuzioni discrete [18] di probabilità, introduciamo sue "indici" [19] che descrivono le *v.a.* in modo molto efficace: al primo ci si riferisce come *indice di posizione* ed è conosciuto come ***valore atteso*** o ***aspettazione*** [20] della *v.a.* X. All'altro indice ci si riferisce come *indice di dispersione* ed è conosciuto come ***varianza*** della *v.a.* X.

3.1. Valore atteso e varianza. Data la *v.a.* (discreta) X, che può assumere valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la seguente quantità si definisce il ***valore atteso*** :

$$\boxed{\mathbb{E}\,(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot Pr\,(X = x_k)}.$$

Il valore atteso, quindi, si ottiene sommando tutti i prodotti tra i possibili valori della *v.a.* X e la probabilità che essi vengano assunti.

Esempio: Supponiamo che la distribuzione di probabilità sia quella rappresentata nella seguente tabella:

	x_1	x_2	x_3
X	2	6	-4
$Pr\,(X = x_k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

In questo caso:

$$\mathbb{E}\,(X) = 2 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 = 2 - 2 = 0.$$

◇

Esempio: Supponiamo che nelle otto prove scritte previste durante l'a.s. uno studente abbia preso i seguenti voti:

prova 1	prova 2	prova 3	prova 4	prova 5	prova 6	prova 7	prova 8
6	8	8	2	4	9	7	8

[17] Nel caso discreto non ci interessa determinare la funzione di ripartizione, dato che si può conoscere direttamente la funzione di distribuzione, dalla quale si ricava immediatamente la "cumulativa".

[18] E successivamente di quelle continue.

[19] Ovvero due numeri.

[20] Anche ***speranza matematica*** o ***valore medio***.

Possiamo assegnare le probabilità di ottenere ciascun voto utilizzando le *frequenze relative* secondo questa tabella autoesplicativa:

Voto	Frequenza	$Pr =$ frequenza relativa
2	1	$\frac{1}{8}$
4	1	$\frac{1}{8}$
6	1	$\frac{1}{8}$
7	1	$\frac{1}{8}$
8	3	$\frac{3}{8}$
9	1	$\frac{1}{8}$
tot:	8	1

In questo caso il valore atteso dei voti è

$$\mathbb{E}(V) = 2 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{8} + 7 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{3}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8} =$$

$$= \frac{2+4+6+7+3 \cdot 8+9}{8} = \frac{52}{8} = 6.5$$

che è esattamente la ***media aritmetica*** [21] ***dei voti***.

◇

Volendo ora "misurare" di quanto i valori che la *v.a.* X si discostano dal valore atteso, potremmo pensare di considerare gli "scarti" dalla media e sommarli tutti, ovvero considerare la somma $\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mathbb{E}(X))$. Ebbene, dato che il valore atteso si colloca esattamente al centro dei valori assunti dalla X, questa somma varrà sempre zero: tutti gli scarti "positivi" compensano quelli "negativi" e quindi è chiaro che il risultato uscirà sempre zero! Un aggiustamento si potrebbe fare subito considerando gli scarti in valore assoluto e facendone la media:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} |x_k - \mathbb{E}(X)| .$$

Questa espressione prende il nome di ***scarto assoluto medio*** e viene utilizzato, anche se ha il grave difetto, ereditato dalla funzione "valore assoluto", di non essere differenziabile dappertutto [22] . Il problema si risolve facilmente sostituendo il valore assoluto con la funzione "elevare al quadrato" che, come il valore assoluto, elimina tutti i segni negativi negli addendi della sommatoria e, in più, risulta una funzione differenziabile. Si definisce ***varianza*** o ***scarto quadratico medio*** la

[21] Ponderata .

[22] E quindi limita moltissimo l'utilizzo del potentissimo calcolo differenziale per maneggiare, almeno a livello teorico, le quantità che si ottengono.

quantità:

$$\boxed{Var\left(X\right) = \sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - \mathbb{E}\left(X\right)\right)^2}.$$

Inoltre, dato la varianza somma dei quadrati, volendo riportare questa quantità a "livello dimensionale" del valore atteso, è usuale estrarne la radice quadrata, definendo il seguente diffusissimo indice di variabilità, chiamato ***deviazione standard*** :

$$\sigma = \sqrt{Var\left(X\right)}.$$

Esempio: molto noto è il sonetto di Trilussa dedicato alla Statistica, in cui parlando di divisione di polli, risulta che in media, mangiando due polli una persona e l'altro nessuno, comunque ne han mangiati uno ciascuno [23] . Possiamo rappresentare la situazione nella seguente tabella:

nr. polli	chi
0	Tu
2	Io

Sia X la *v.a.* del numero di polli che vengono mangiati da un individuo [24] , allora si ha:

$$\mathbb{E}\left(X\right) = 0 \cdot Pr\left(0\right) + 2 \cdot Pr\left(2\right) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

23

Sai che d'è la statistica? È na' cosa
che serve pe fa un conto in generale
de la gente che nasce, che sta male,
che more, che va in carcere e che spósa.

Ma pè me la statistica curiosa
è dove c'entra la percentuale,
pè via che, lì, la media è sempre eguale
puro co' la persona bisognosa.

Me spiego: da li conti che se fanno
seconno le statistiche d'adesso
risurta che te tocca un pollo all'anno:

e, se nun entra nelle spese tue,
t'entra ne la statistica lo stesso
perch'è c'è un antro che ne magna due.

.

[24] Considerando un esperimento "virtuale" per il quale viene assegnata equiprobabilità all'evento che si scelga una persona piuttosto che l'altra.

che significa “mediamente” si mangia un pollo ciascuno [25] . A questo punto calcoliamo la varianza:

$$Var\,(X) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{2}(x_k - \mathbb{E}\,(X))^2 = \frac{1}{2}\cdot\left[(0-1)^2 + (2-1)^2\right] = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1.$$

La deviazione standard risulta, perciò, uguale a $\sigma = 1$. La corretta risposta “statistica” al problema di quanti polli mangia mediamente ciascun individuo è :

Tu hai mangiato mediamente $\mathbb{E}\,(X) - \sigma = 1 - 1 = 0$ polli;
io ho mangiato mediamente $\mathbb{E}\,(X) + \sigma = 1 + 1 = 2$ polli,

che descrive davvero cosa è successo in realtà! D’altra parte, immaginando una distribuzione equa dei polli: uno per me ed uno per te, allora il valore medio risulterebbe ancora:

$$\mathbb{E}\,(X) = 1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = 1$$

mentre la varianza:

$$Var(X) = \frac{1}{2}\cdot\left[(1-1)^2 + (1-1)^2\right] = 0.$$

In questo caso con la descrizione:

$$\boxed{\mathbb{E}\,(X) \mp \sigma}$$

si ottiene ancora una rappresentazione fedele di quanto successo in realtà, dato che risulterebbe ancora che abbiamo davvero mangiato un pollo l’uno! Quindi lo enfatizziamo: ***non ha senso associare ad una distribuzione*** [26] ***solo il valore medio della* v.a. *ma va sempre anche indicato l’indice di dispersione dei valori attorno al valore medio***, insomma: l’informazione completa è data dalla quantità nel riquadro scritta testé.

3.2. Qualche riflessione sugli indici di posizione e variabilità. Il valore atteso e la varianza, come “operatori” da applicare su una variabile aleatoria, godono di alcune proprietà “familiari”: nei fatti sono entrambi operatori lineari, sebbene la varianza non sia omogenea (di primo grado), ovvero possiamo dimostrare le due formule seguenti.

[25]Come affermava Trilussa in modo ironico.
[26]Di dati.

PROPOSIZIONE 19. *Date due* v.a. X_1 *e* X_2, **indipendenti ed identicamente distribuite** [27] *, allora:*

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2)$$

e

$$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2).$$

Dimostrazione: Consideriamo le seguenti due tabelle di distribuzione per le *v.a.* dell'enunciato:

X_1	
$x_{1,1}$	p_1
$x_{1,1}$	p_2
$\vdots$	$\vdots$
$x_{1,n}$	p_n

X_2	
$x_{2,1}$	p_1
$x_{2,1}$	p_2
$\vdots$	$\vdots$
$x_{2,n}$	p_n

allora si ha, per definizione di valore atteso:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1 + X_2) &= (x_{1,1} + x_{2,1}) \cdot p_1 + (x_{1,2} + x_{2,2}) \cdot p_2 + \cdots \\ \cdots + (x_{1,n} + x_{2,n}) \cdot p_n &= x_{1,1} \cdot p_1 + x_{2,1} \cdot p_1 + x_{1,2} \cdot p_2 + x_{2,2} \cdot p_2 + \cdots \\ &\cdots + x_{1,n} \cdot p_n + x_{2,n} \cdot p_n = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2).\end{aligned}$$

Inoltre, per la varianza si ottiene:

$$Var(X) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mathbb{E}(X))^2 =$$

(sviluppando il quadrato di binomio)

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[x_k^2 - 2 \cdot x_k \cdot \mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2\right] =$$

considerando che $\mathbb{E}(X)$ *è una costante*

$$= \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2 \cdot \mathbb{E}(X) \sum_{k=1}^{n} x_k + \left((\mathbb{E}(X))^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} 1\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2 \cdot \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(X) + \frac{1}{\cancel{n}} \cdot (\mathbb{E}(X))^2 \cdot \cancel{n}.$$

Ergo:

$$\boxed{Var(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}^2(X)}.$$

La formula nel riquadro è molto usata al fine del calcolo della varianza, dato che velocizza di parecchio di calcoli! Ma, a parte questo, da essa si deduce la linearità della varianza, infatti si ha:

$$Var(X_1 + X_2) = \mathbb{E}\left((X_1 + X_2)^2\right) - (\mathbb{E}(X_1 + X_2))^2 =$$

[27]Come si dice in gergo: "**i.i.d.**"

$$= \mathbb{E}\left(X_1^2 + 2 \cdot X_1 \cdot X_2 + X_2^2\right) - \left(\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2)\right)^2 =$$

$$= \mathbb{E}\left(X_1^2\right) + \cancel{2 \cdot \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(X_2)} + \mathbb{E}\left(X_2^2\right) + \\ - \left(\mathbb{E}(X_1)\right)^2 - \cancel{2 \cdot \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(X_2)} - \left(\mathbb{E}(X_2)\right)^2 =$$

$$= \mathbb{E}\left(X_1^2\right) - \left(\mathbb{E}(X_1)\right)^2 + \mathbb{E}\left(X_2^2\right) - \left(\mathbb{E}(X_2)\right)^2 =$$

$$= Var(X_1) + Var(X_2).$$

c.v.d.

3.3. Distribuzione uniforme. Se si lancia un dado non truccato, la probabilità dell'uscita di ciascuna faccia è un sesto: questo è il tipico esempio di ***distribuzione uniforme*** di probabilità, per la quale si assegna ad ogni possibile sortita, sempre la stessa identica probabilità. Per cui, se X è una *v.a.* con possibili valori $1, 2, \ldots, n$, essa è distribuita uniformemente se $Pr(X = k) = \frac{1}{n}$ per qualsiasi valore di k compreso tra 1 ed n.
Nel caso scriveremo anche

$$X \sim U(n),$$

intendendo che la *v.a.* X è distribuita secondo una legge **U**niforme su n valori. Il valore atteso è dato da:

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{n} + \cdot + n \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n} = \frac{\cancel{n} \cdot (1+n)}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{n}} = \frac{1+n}{2}.$$

Calcoliamo la varianza con la "formula veloce", dato che:

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = 1^2 \cdot \frac{1}{n} + 2^2 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + n^2 \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{\cancel{n} \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \cdot \frac{1}{\cancel{n}} = \frac{(n+1) \cdot (2n+1)}{6},$$

ne segue che [28] :

$$Var(X) = \frac{(n+1) \cdot (2n+1)}{6} - \left(\frac{1+n}{2}\right)^2 = \cdots = \frac{n^2-1}{12}.$$

[28]Si invita lo studente solerte ad effettuare tutti i passaggi che saranno tralasciati, laddove abbiamo messo e i punti sospensivi.

3.4. Distribuzione di Bernoulli. Una distribuzione di Bernoulli si ha quando la *v.a.* X può assumere solo due valori: 0 od 1. Supponiamo che $Pr(X = 1) = p$ allora $Pr(X = 0) = q = 1-p$. La speranza matematica è:

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p;$$

inoltre si calcola:

$$Var(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - p^2 = \cancel{0^2 \cdot q} + 1^2 \cdot p - p^2 = p - p^2 = p \cdot (1-p) = p \cdot q.$$

3.5. Distribuzione binomiale. Data una sequenza ripetuta di prove bernoulliane, ovvero di "esperimenti" in cui si può registrare solo successo od insuccesso [29] , il numero di successi è, chiaramente, una variabile aleatoria. Sia X la *v.a.* che ***conta il numero di successi*** in n prove, allora si dirà che essa è una *v.a.* ***binomiale*** [30], scriveremo anche:

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

in cui n indica il numero di prove e p la probabilità di avere successo [31]. Cerchiamo ora la sua funzione di distribuzione, ovvero come ricavare la $Pr(X = k)$ laddove k indica il numero di successi in n prove. Il discorso è piuttosto semplice: ogni successo ha probabilità p e gli insuccessi probabilità q, per cui un singolo modo di "raggruppare" k successi su n posizioni porta alla probabilità: $p^k \cdot q^{n-k}$. Ora, tutti i possibili raggruppamenti di k prove positive su n effettuate sono in numero di $\binom{n}{k}$ e dato che le prove si suppongono ***i.i.d.*** [32] , allora:

$$Pr(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

[33] . Consideriamo ora la variabile bernoulliana Y_k che assume i soli due valori 0 od 1. Se X è distribuita secondo la "binomiale" su n valori, allora potremmo pensare che

$$X = \sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

[29] Nel caso di successo, potremmo attribuire il valore 1 alla prova, altrimenti il valore 0, da cui l'attributo "bernoulliano" dato alle prove.

[30] Oppure che segue una ***distribuzione binomiale***

[31] Ovvero $Pr(X = 1)$.

[32] Che ricordiamo sta per "indipendenti ed identicamente distribuite".

[33] Lasciamo come facile esercizio dimostrare che:

$$\sum_{k=1}^{n} Pr(X = k) = 1.$$

Allora, per la linearità del valore atteso, possiamo scrivere:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k) = \sum_{k=1}^{n} p = n \cdot p.$$

Inoltre si ha, per la varianza:

$$Var(X) = Var\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} Var(Y_k) = \sum_{k=1}^{n} p \cdot q = n \cdot p \cdot q.$$

Esempio: Supponendo che la probabilità di nascita di una maschio o di una femmina sia uguale, consideriamo una famiglia di 6 figli. Qual è la probabilità che siano tre maschi e tre femmine? e che ci siano più femmine che maschi?

Soluzione: Se X è la *v.a.* che "conta il numero dei maschi", allora essa segue un distribuzione binomiale:

$$X \sim \mathcal{B}\left(6, \frac{1}{2}\right).$$

Pertanto calcoliamo la probabilità che i maschi siano in numero di 3, utilizzando la funzione di distribuzione [34] :

$$Pr(X=3) = \binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-3} = \cdots = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}.$$

Per rispondere all'altra domanda dobbiamo calcolare la funzione cumulativa:

$$Pr(X \leqslant 2) = Pr(X=0) + Pr(X=1) + Pr(X=2) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{6} + \binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5} + \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4} = \cdots = \frac{11}{32}.$$

◇

Esempio: La probabilità che un virus colpisca una persona è del 20%, in una comunità di 30 persone, qual è il numero medio di persone infettate? e quanto vale la probabilità che due persone siano infette? e che il virus abbia colpito almeno 5 persone ma non più di 10?

Soluzione: Anche in questo caso la variabile X, che indica il numero di persone infettate dal virus è distribuito secondo una binomiale:

$$X \sim \mathcal{B}\left(30, \frac{1}{5}\right).$$

[34] Preferiamo continuare a separare i valori di p e q nonostante essi siano entrambi uguali ad $\frac{1}{2}$.

Il numero atteso delle persone infettate è dato da:

$$\mathbb{E}(X) = n \cdot p = 30 \cdot \frac{1}{5} = 6.$$

La probabilità che due persone siano infette è:

$$Pr(X = 2) = \binom{30}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{28} = \frac{30 \cdot 29}{2} \cdot \frac{4^{28}}{5^{30}} \approx 3,37\%.$$

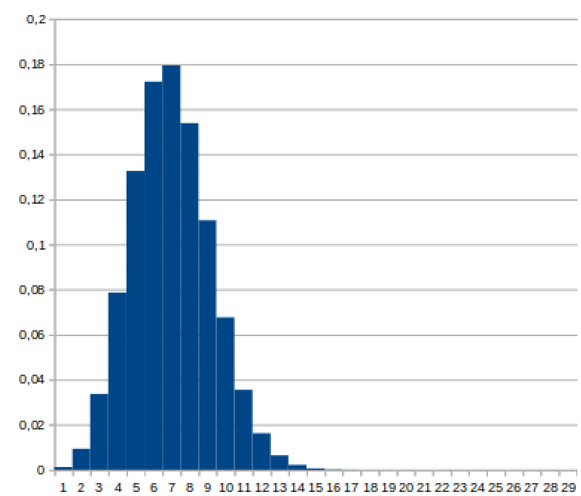
Per rispondere all'ultima domanda, dobbiamo trovare la funzione di distribuzione, dato che:

$$Pr(5 \leqslant X < 10) = Pr(X \leqslant 10) - Pr(X \leqslant 5).$$

Una volta tanto, calcoliamo con un foglio di calcolo la tabella di distribuzione per questa $v.a.$ e la rappresentiamo anche graficamente secondo degli istogrammi [35] .

X	Coefficiente binomiale:	Pr(X)
0	1	0,00123794
1	30	0,00928455
2	435	0,033656495
3	4060	0,078531821
4	27405	0,132522448
5	142506	0,172279183
6	593775	0,179457482
7	2035800	0,153820699
8	5852925	0,110558627
9	14307150	0,067563606
10	30045015	0,035470893
11	54627300	0,016123133
12	86493225	0,006382074
13	119759850	0,002209179
14	145422675	0,000670644
15	155117520	0,000178838
16	145422675	4,19152E-05
17	119759850	8,62961E-06
18	86493225	1,55812E-06
19	54627300	2,46019E-07
20	30045015	3,38277E-08
21	14307150	4,0271E-09
22	5852925	4,11863E-10
23	2035800	3,58142E-11
24	593775	2,61145E-12
25	142506	1,56687E-13
26	27405	7,53303E-15
27	4060	2,79001E-16
28	435	7,47324E-18
29	30	1,28849E-19
30	1	1,07374E-21

p	0,2
q	0,8



Per rispondere all'ultima domanda, quindi, dobbiamo sommare i valori di probabilità corrispondenti ai valori della $v.a.$ compresi tra 5 e 10 :

$$Pr(5 \leqslant X < 10) = 0,1723 + 0,1795 + 0,1538 + \\ + 0,1105 + 0,0676 + 0,0354 = 0,7191 = 71,91\%.$$

◇

[35] Per istogramma si intende un grafico a barre con la proprietà che l'area disegnata, compresa nell'intervallo $[a,b]$, rappresenta proprio la probabilità che la $v.a.$ assuma valore compresi tra gli estremi dell'intervallo stesso.

3.6. Distribuzione geometrica. Supponiamo di chiederci quante prove debbano effettuarsi prima che si riscontri il primo successo, in una serie di esperimenti bernoulliani. In tal caso, la *v.a.* X che conta il numero di prove da effettuare, prima che si verifichi il primo successo, è detta seguire una ***distribuzione geometrica*** e scriveremo $X \sim \mathcal{G}(p)$ dove p indica la probabilità di successo nella sequenza di prove bernoulliane i.i.d.. Evidentemente, se $p = Pr\left(X_k = 1\right)$ e $q = 1 - p = Pr\left(X_k = 0\right)$, dove abbiamo indicato con X_k il risultato della k-esima prova, per ottenere il primo successo all'n-esima prova, dovranno essere accaduti $n-1$ insuccessi, ergo:

$$Pr(X = k) = q^{k-1} \cdot p = p \cdot (1-p)^{k-1}.$$

Per calcolare il valore atteso di tale variabile, consideriamo che il numero di prove, prima di ottenere il successo, potrebbe tendere all'infinito, quindi -in linea di principio- la *v.a.* X può assumere tutti i valori dei numeri naturali: significa che la speranza matematica si dovrà calcolare tramite la seguente serie numerica [36] :

$$\mathbb{E}\left(X\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1}\, p = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{\left(1-(1-p)\right)^2} = \frac{1}{p}$$

[37] . Si può far vedere che la varianza è data da:

$$Var\left(X\right) = \frac{q}{p^2},$$

ma non essendo un risultato che utilizzeremo, se ne tralascia la dimostrazione.

[36] Secondo definizione.

[37] Si è utilizzato il seguente risultato:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Una possibile dimostrazione è stata suggerita dall'eccellente prof. Vincenzo Rubino, il quale osserva:

$$1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \cdots = \begin{cases} 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots & = \frac{1}{1-q} + \\ 0 + q + q^2 + q^3 + \cdots & = q \cdot \frac{1}{1-q} + \\ 0 + 0 + q^2 + q^3 + \cdots & = q^2 \cdot \frac{1}{1-q} + \\ \cdots & \cdots \end{cases},$$

per cui, sommando tutto, si ottiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

3.7. Distribuzione di Poisson. Supponiamo che si abbia una *v.a.* X che conti il numero di successo in n prove [38] per la quale si abbiano le seguenti ipotesi aggiuntive:

(1) Il numero di prove è alto e la probabilità di successo è bassa.
(2) Il successo è direttamente proporzionale all'intervallo di tempo entro cui si attende che accada.
(3) Due eventi non avvengono mai contemporaneamente.

allora si dirà che la *v.a.* è distribuita secondo una ***distribuzione di Poisson*** e scriveremo:

$$X \sim P(\lambda)$$

dove λ rappresenta il numero atteso [39] di successi. Per quanto abbiamo supposto potremmo pensare di ricavare la legge di distribuzione determinando il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}(n,p) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Ora, se chiamiamo, per comodità, $\mathbb{E}\,(X) = n\,p = \lambda$ allora: $p = \frac{\lambda}{n}$ e quindi:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}(n,p) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot \cancel{(n-k)!}}{\cancel{(n-k)!}} \cdot \frac{1}{n^k} \cdot \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} \sim \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n^k} \cdot \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{1} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}.$$

Il valore medio, come abbiamo già indicato, è dato da $\mathbb{E}\,(X) = \lambda$; si può dimostrare [40] che anche la varianza coincide con tale valore, ovvero che $Var\,(X) = \lambda$.

Esempio: Si supponga che 300 errori di stampa siano distribuiti a caso in un libro di 500 pagine. Scelta una pagina a caso, qual è la probabilità che contenga 2 errori? e che ne contenga almeno due?

Soluzione: Questo problema si potrebbe risolvere pure utilizzando la distribuzione binomiale, ma dato che il numero degli errori è esiguo rispetto al numero di parole che, presumibilmente, sono state prodotte

---

[38] Quindi di tipo binomiale.

[39] Il valore medio.

[40] Ne omettiamo la dimostrazione, essendo solo questione di calcolo "pesante".

nelle 500 pagine, è piuttosto agevole pensare che "incontrare un errore" sia un *evento raro*. Ipotizziamo quindi che la *v.a.* X, che conta il numero di errori per pagina, sia distribuita secondo una distribuzione di Poisson:

$$X \sim P(\lambda)$$

e, inoltre, che la probabilità di incontrare un errore in una pagina sia $\frac{1}{500}$, dato che gli errori sono distribuiti in modo totalmente casuale tra tutte le 500 pagine. Prima di tutto dovremo calcolare il numero medio di errori: questo è facile poiché possiamo utilizzare le conoscenze del paragrafo precedente riguardanti la distribuzione binomiale!

$$\lambda = \mathbb{E}(X) = n \cdot p = 300 \cdot \frac{1}{500} = 0.6.$$

Quindi possiamo rispondere alla prima domanda:

$$Pr(X = 2) = \frac{(0,6)^2}{2!} \cdot e^{-0,6} \approx 0,0988 \approx 0,1.$$

Per rispondere alla seconda domanda possiamo calcolare la probabilità che ci siano 0 oppure 1 errori e poi complementare rispetto ad 1:

$$Pr(X = 0) = \frac{(0,6)^0}{0!} \cdot e^{-0,6} \approx 0,549$$

$$Pr(X = 1) = \frac{(0,6)^1}{1!} \cdot e^{-0,6} \approx 0,329$$

ergo:

$$Pr(X \geqslant 2) = 1-(Pr(X = 0) + Pr(X = 1)) = 1-(0,549+0,329) = 0,122.$$

◇

Esempio: Supponendo che il 2% delle persone siano mancine, determinare la probabilità che tra 100 persone ce ne siano 3 o più mancine.

Soluzione: Sia X la *v.a.* che indica il numero di persone mancine nel gruppo. Il valore atteso p dato da:

$$\mathbb{E}(X) = n \cdot p = 100 \cdot \frac{2}{100} = 2 \quad = \lambda.$$

Per determinare la probabilità $Pr(X \leqslant 3)$ possiamo calcolare le probabilità che il numero dei mancini siano 0, 1 o 2 e poi complementare ad 1. Ora:

$$Pr(X = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} \approx 0,1353;$$

$$Pr(X = 1) = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} \approx 0,2706;$$

$$Pr(X = 2) = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \approx 0,2706.$$

Da questo segue che:

$$Pr(X \geqslant 3) = 1 - (0,1353 + 0,2706 + 0,2706) = 0,3235 = 32,35\%.$$

◇

4. La normalità secondo Gauss

Prima di passare a descrivere la più importante distribuzione per *v.a.* continue, ricordiamo l'estensione al caso continuo, dei due indici associati a qualsiasi distribuzione di probabilità: il valore medio $\mathbb{E}(X)$ e la varianza $Var(X)$. Nel caso continuo non possiamo "sommare" quantità come se fossero numeri, ma abbiamo imparato, nel capitolo sugli integrali, che possiamo sempre pensare di "discretizzare lo spazio", effettuare le somme sulle quantità "discretizzate" e poi passare al limite per effettuare la somma di un'infinità di "addendi continui". Il passaggio, formale, dal discreto al continuo si effettua semplicemente *sostituendo il simbolo di sommatoria con quello di integrale,* pertanto possiamo ri-definire la speranza matematica e la varianza, per *v.a.* continue, a cui è associata una distribuzione descritta dalla funzione densità $p_X(x)$, nel modo seguente:

$$\mathbb{E}(X) = \int_a^b x \cdot p_X(x)\, \mathrm{d}\, x$$

essendo $[a, b]$ l'insieme dei valori che la *v.a.* può assumere e [41] :

$$Var(X) = \int_a^b (x - \mathbb{E}(X))^2 \cdot p_X(x)\, \mathrm{d}\, x = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 .$$

Nel 1809 il grande Gauss , ragionando sulla curva di distribuzione degli errori accidentali che si possono commettere effettuando una serie di misurazioni, in particolare immaginando che pochi errori debbano discostarsi di molto dalla reale misura di un oggetto e che, comunque, la maggior parte delle misure debbano essere prossime al valore medio di tutte quelle effettuate, dedusse che la curva che meglio rappresentava la situazione fosse una ***campana.*** Una curva che descrivesse la forma a campana, su tutto l'asse reale, è facilmente descritta dalla funzione $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Questa, però, non sottende un'area pari all'unità e quindi

[41]Dimostrare, per esercizio, l'ultima uguaglianza della seguente definizione.

non può essere utilizzata come funzione di densità per la "curva degli errori": si dimostra [42] che l'area sottesa dalla funzione testé scritta è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}\,x = \sqrt{2\,\pi}.$$

Pertanto, dividendo la funzione $f(x)$ per il valore di tale integrale, la funzione che si trova risulta "normalizzata ad 1", ovvero il suo integrale risulta unitario su tutto l'asse delle ascisse. A questo punto

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

è la densità di probabilità associata alla distribuzione "a campana" su cui Gauss indagava.

Definizione 15. *Una* v.a. *continua* X *che abbia come funzione di densità:*

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

si dice distribuita normalmente, oppure che è distribuita secondo la "normale di Gauss" e si scriverà

$$X \sim N(0,1),$$

evidenziando con questo che il valore medio -che coincide anche con il punto massimo della curva- si trova per $x = 0$ *e la deviazione standard -che coincide con i valori assoluti delle ascisse nei punti di flesso- è pari ad* 1.

C'è solo un particolare: il valore medio della *v.a.* descritta dalla densità $p_X(x)$ è 0 con varianza 1, per come abbiamo evidenziato anche nella definizione, mentre quasi mai le misurazioni che uno andrà ad effettuare avranno questa stessa media e varianza. Il problema, comunque, si supera facilmente effettuando una semplice trasformazione del piano: si fa in modo che la media assunta dalla *v.a.* X sia in corrispondenza dell'origine del sistema di riferimento e si "restringe" [43] l'asse delle ascisse in modo che la deviazione standard σ risulti la nuova unità di riferimento per le x. In definitiva, si effettua la seguente trasformazione:

$$\boxed{z = \frac{x - \mathbb{E}\,(X)}{\sigma}},$$

[42]Nemmeno tanto difficilmente, utilizzando un trucchetto sugli integrali doppi ed il cambio di coordinate da cartesiano a polare.

[43]O si dilata, a seconda dei casi opportuni.

la nuova *v.a.* Z così ottenuta si chiama ***standardizzata di*** X. Di conseguenza si ottiene anche la funzione densità per la *v.a.* standardizzata:
$$p_Z(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\,\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mathbb{E}(X)}{\sigma}\right)^2}.$$
Come affermato, si può verificare che [44] :
$$\mathbb{E}\,(Z) = \mathbb{E}\left(\frac{X-\mathbb{E}\,(X)}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \cdot \mathbb{E}\,(X-\mathbb{E}\,(X)) =$$
$$= \frac{1}{\sigma} \cdot [\mathbb{E}\,(X) - \mathbb{E}\,(\mathbb{E}\,(X))] = \frac{1}{\sigma} \cdot [\mathbb{E}\,(X) - \mathbb{E}\,(X)] = 0.$$
Si verifica altresì che [45] :
$$Var\,(Z) = \mathbb{E}\left(Z^2\right) - [\mathbb{E}\,(Z)]^2 = \mathbb{E}\left(\left(\frac{X-\mathbb{E}\,(X)}{\sigma}\right)^2\right) - 0 =$$
$$= \frac{1}{\sigma^2} \cdot \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}\,(X))^2\right) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2 = 1.$$
Il processo di standardizzazione o, come si suole anche dire, di ***normalizzazione*** è estremamente importante: purtroppo non può essere calcolata una primitiva della funzione e^{-x^2} e questo comporta che la funzione di ripartizione, corrispondente alla funzione di densità $p_Z(x)$, non si può esplicitamente trovare. Avremmo dovuto stilare tavole numeriche per qualsiasi coppia di numeri corrispondenti, rispettivamente, ad una media ed ad una deviazione standard; questo non è un lavoro improbo: è semplicemente impossibile! tramite la standardizzazione, invece, qualsiasi sia la distribuzione normale di partenza, con media μ e deviazione standard σ, si può ricondurre il calcolo delle probabilità alla funzione cumulativa -tabulata- della normale $N(0,1)$.

Esempio: Su diecimila numeri casuali (compresi tra 0 e 9), quanto vale la probabilità che il 3 si presenti al massimo 950 volte?

Soluzione: Ammesso che il processo di generazione dei numeri casuali non sia condizionato da qualcosa di estraneo, esso deve ritenersi del tutto normale, per cui possiamo pensare che il numero delle volte in cui si genererà il tre, sia una *v.a.* X distribuita secondo una legge normale. Ora, essendo la probabilità di uscita del 3 pari a un decimo, si ha:
$$\mathbb{E}\,(X) = n \cdot p = 10000 \cdot \frac{1}{10} = 1000.$$

---

[44]Per quanto segue, preventivamente si dimostri la lineare omogeneità dell'operatore valore medio, ovvero che $\mathbb{E}\,(n \cdot X) = n \cdot \mathbb{E}\,(X)$

[45]Preventivamente alla seguente dimostrazione, si faccia vedere che la varianza è quadraticamente omogenea, ovvero che $Var\,(n \cdot X) = n^2 \cdot Var\,(X)$.

Inoltre
$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{10000 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10}} = 30.$$
Dobbiamo determinare $Pr(X \leqslant 950)$. A tal fine standardizziamo la variabile, per ottenere $Z \sim N(0,1)$. Nei fatti si ha:
$$Z = \frac{950 - 1000}{30} = -1,67.$$
Ora si va a cercare sulla tabella della $N(0,1)$ il valore corrispondente di probabilità e, dato che è negativo, si dovrà determinare il valore corrispondente a $1,67$, e sottrarlo da 1: in pratica stiamo dicendo che:
$$Pr(Z \leqslant -1,67) = 1 - Pr(Z \geqslant 1,67),$$
infatti si tratta comunque di calcolare la probabilità che la *v.a.* standardizzata prenda valore nella *"coda"* della distribuzione, che è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate. Quindi si ha:
$$Pr(X \leqslant 950) = Pr(Z \leqslant -1,67) = \\ = 1 - Pr(Z \leqslant 1,67) = 1 - 0,9525 = 0,0475.$$

◇

Esempio: Un bullone scelto a caso da una produzione industriale ha una lunghezza media X, che normalmente è di 10 cm, con una deviazione standard di $0,2$ cm. Qual è la probabilità che scelto un bullone a caso, esso sia con una lunghezza compresa tra $9,9$ e $10,1$ cm?

Soluzione: Valore medio e deviazione standard sono già dati: possiamo passare direttamente alla *v.a.* standardizzata Z i cui valori dovranno essere compresi tra:
$$\frac{9,9-10}{0,2} \leqslant Z \leqslant \frac{10,1-10}{0,2} \qquad \Leftrightarrow \qquad -0,5 \leqslant Z \leqslant 0,5.$$
Ergo:
$$Pr(9,9 \leqslant X \leqslant 10,1) = Pr(-0,5 \leqslant Z \leqslant 0,5) = \\ = Pr(Z \leqslant 0,5) - Pr(Z \leqslant -0,5) = Pr(Z \leqslant 0,5) - (1 - Pr(Z \leqslant 0,5)) = \\ = 2 \cdot Pr(Z \leqslant 0,5) - 1 = 2 * 0,6915 - 1 = 0,383.$$

◇

Esempio: L'altezza media di un bambino di 7 mesi è normalmente di 71 cm, con una varianza di $\sigma^2 = 6,25$. Qual 'e la percentuale di bambini di 7 mesi che superano i 74 cm di altezza?

Soluzione: Standardizziamo la *v.a.* X che misura l'altezza media di un bambino di 7 mesi e rispondiamo alla domanda:

$$Pr(X \geqslant 74) = Pr\left(Z \geqslant \frac{74-71}{\sqrt{6,25}}\right) = Pr(Z \geqslant 1,2).$$

Dalla tabella della normale ricaviamo il valore di probabilità in corrispondenza di $Z^* = 1,2$ che è: 0.8849. Ergo:

$$Pr(Z \geqslant 74) = 1 - Pr(Z \leqslant Z^*) = 1 - 0,8849 = 0,1151 = 11,51\%.$$

◇

Notevole fu il risultato pubblicato da De Moivre, in un articolo del 1773, in cui egli giunge alla distribuzione normale attraverso il limite, a cui tende la binomiale, quando il numero di prove tende all'infinito. In verità qualsiasi sia la distribuzione di partenza, per un gran numero di prove, il valore medio dei valori di tante *v.a.* indipendenti ed identicamente distribuite, tende ad essere rappresentata da una *v.a.* distribuita secondo la normale di Gauss! ovvero, essa è una distribuzione che si può utilizzare per approssimare qualsiasi altra e questo giustifica il suo largo uso in tutti i campi delle scienze [46] . Questo è un risultato notevole ed è il contenuto, detto in modo grossolano, di un teorema fondamentale del calcolo delle probabilità, conosciuto con il nome di ***Teorema Limite Centrale***. Più precisamente l'enunciato, di cui si omette la dimostrazione, essendo al di là delle finalità di questo volume, è il seguente:

Teorema 23 (Toerema del limite centrale). *Se* X_i *sono delle* v.a. **i.i.d.** *con uguali valori attesi e varianze:* $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ *e* $Var(X_i) = \sigma^2$, *allora la* v.a. *"standardizzata":*

$$Y_n = \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

tenderà ad essere normalmente distribuita, ovvero:

$$Y_n \longrightarrow Y \sim N(0,1).$$

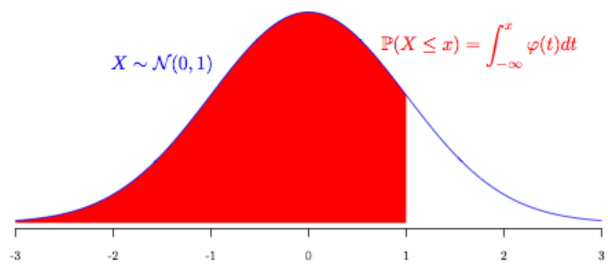
[46] Inoltre, da questa "centralità" della distribuzione normale, prende avvio tutta la Statistica inferenziale e la Teoria delle Decisioni.

CAPITOLO 15

EPILOGO

Ci sono ancora tanti argomenti da collegare a quelli trattati nei precedenti capitoli, approfondimenti e divagazioni varie che, si spera, siano ora alla portata del lettore attento e, soprattutto, oggetto di interesse ed investigazione personale. Purtroppo il tempo è tiranno e ci sembra che il contenuto del testo scritto, compreso del volume per il primo biennio, sia già sufficientemente ampio, soprattutto se rapportato allo spazio che gli studi secondari superiori riservano alla studio della Matematica. È una disciplina bellissima, che dà soddisfazioni intellettuali notevoli, oltre ad essere utile per comprendere il mondo: vogliamo ricordare un aneddoto riguardante Hilbert che, un giorno, avendo un colloquio con un suo studente disse (grosso modo): "Lei non ha abbastanza fantasia per fare il Matematico, ma abbastanza per essere un buon poeta: si dedichi alla poesia e sicuramente avrà gran successo". In verità è un gran mistero del perché il frutto della fantasia di qualcuno possa anche tornare utile nella realtà del mondo, ma è così e di questo non possiamo che essere felici: il nostro invito è di non assumere mai un atteggiamento impaurito verso la Matematica, magari dichiarando ignominosamente che "ai tempi non ne capivo nulla", andando fieri di essere ignoranti in questa disciplina. L'augurio, invece, è di poter godere appieno delle primizie e delle bontà di questa disciplina unica, che tra le attività umane eccelle e rende migliore la vita di chiunque la frequenti e le dedichi tempo nello suo studio. Per concludere, si raccomanda di svolgere gli esercizi proposti nell'ultimo capitolo, afferenti -come già fatto nel primo volume- a ciascun capitolo scritto in questo libro e... ***buon divertimento!***

TABELLA DELLA $N(0,1)$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Parte 6

Esercizi

Esercizi

Relativi al Capitolo 1

Sulla determinazione di distanze o lunghezze.

(1) Determinare la distanza tra i punti $A(2,1)$ e $B(-3,3)$.
(2) Determinare la distanza tra i punti $A\left(1,\frac{1}{3}\right)$ e $B\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.
(3) Determinare la distanza tra i punti $A\left(\frac{1}{4},\frac{3}{5}\right)$ e $B\left(-1,\frac{3}{2}\right)$.
(4) Determinare la lunghezza del vettore che è applicato nel punto di coordinate $P(-2,1)$ e termina nel punto $Q(3,4)$.
(5) Determinare la distanza tra i punti $(4,4)$ e $(4,6)$. C'è bisogno di usare la formula? perché?
(6) Determinare la misura del vettore ottenuto come differenza tra $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ e $\vec{w}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$.
(7) Quali coordinate ha il baricentro del triangolo i cui vertici sono i punti $A(-3,-4)$, $B(0,3)$ e $C(3,1)$?
(8) Sul segmento di estremi $A(2,0)$ e $B(4,6)$, determinare un punto che lo ripartisce nella proporzione $1:4$.
(9) Trovare le componenti del vettore che è applicato nel punto $P(-5,2)$ e termina nel punto $Q(3,6)$. Quanto è lungo?
(10) Dividi a metà i lati del rettangolo di estremi $A(0,0)$, $B(4,1)$, $C(4,3)$ e $D(0,3)$. Detti M_{AB}, M_{AC}, M_{CD} e M_{BD} i punti medi dei rispettivi lati indicati a pedice, verifica che il vettore di estremi M_{AB} e M_{CD} e M_{AD} e M_{CD} hanno le stesse identiche componenti, ovvero coincidono.
(11) Sia CD la mediana relativa al lato AB, del triangolo di estremi $A(3,3)$, $B(-2,1)$, e $C(1,2)$. Quanto è lunga la mediana? Quanto dista il suo punto medio dall'origine del sistema di coordinate? e dal baricentro del triangolo stesso?
(12) I punti $A(-1,0)$, $B(3,0)$ e $C(5,7)$ sono gli estremi di un parallelogramma: determinare le coordinate del quarto vertice D.

[*Hint: Si considerino i vettori sui lati del parallelogramma...*]

(13) Il punto medio del segmento $\overline{AB}$ ha coordinate $(3,2)$ ed il

punto A ha coordinate $(-2,-1)$. Determinare le coordinate del punto B.

(14) Un quadrilatero ha vertici in $A(-5,2)$, $B(-1,3)$, $C(1,-2)$ e $D(3,-8)$. Verifica che il quadrilatero, i cui vertici sono i punti medi dei lati di $\overline{ABCD}$, è un parallelogramma.

[*Hint: I vettori, su ciascuna coppia di lati opposti di un parallelogramma, devono coincidere...*]

(15) Il baricentro del triangolo di vertici A, B e C si trova nel punto di coordinate $(1,1)$. Conoscendo le coordinate di A e B, che sono rispettivamente $(-1,-3)$ e $(4,0)$, determinare le coordinate del vertice C.

Relativi al Capitolo 2

Sulla retta.

(16) Determinare l'equazione della retta passante dai punti $A(1,1)$ e $B(-3,4)$, in almeno due modi diversi.

(17) La pendenza di una retta è $\frac{3}{4}$, sapendo che passa dal punto $(2,1)$, determinarne l'equazione. Il punto $(6,4)$ appartiene a quella retta? si può stabilire l'appartenza alla retta senza doverne verificare la condizione di passaggio?

(18) Una retta è diretta secondo il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e passa dal punto $(0,-2)$. Determinarne l'equazione cartesiana.

(19) Trovare la retta perpendicolare a $r : y = \frac{2}{3}x + 1$ e passante da $(-1,-2)$. Quanto vale l'area del triangolo delimitato dalle due rette e d'asse delle ascisse?

(20) Trovare quando dista la retta $r_y = \frac{1}{2}x + 2$ dall'origine del sistema di riferimento.

(21) L'intersezione tra due rette è il punto $I(3,1)$. Sapendo che una è diretta secondo il vettore $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e l'altra secondo il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ determinarne le equazioni cartesiane. Quanto è lungo il segmento i cui estremi sono le intersezioni delle due rette con l'asse delle ordinate?

(22) Sia r la retta di equazione $y = \frac{1}{3}x - 1$. Si scriva l'equazione in forma vettoriale.

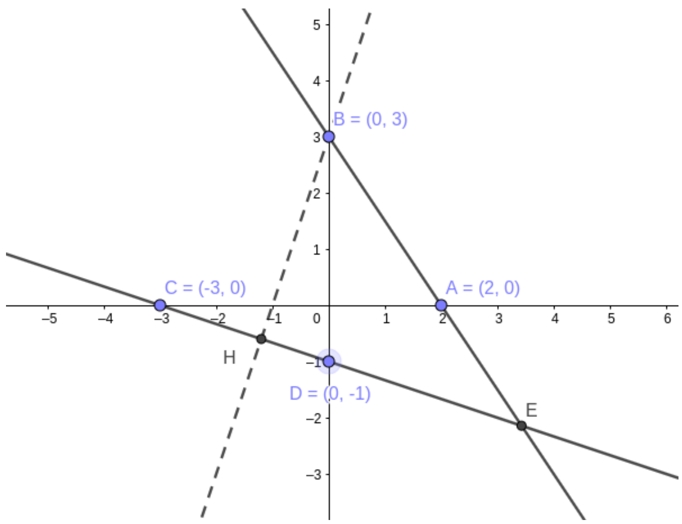
(23) Sia dato il parallelogramma di vertici $A(0,0)$, $B(3,1)$, $C(5,4)$ e $D(2,3)$. Verificare che le distanze, tra due vertici opposti e la diagonale che passa per gli altri due (vertici), sono uguali.

(24) Considera il quadrilatero di estremi $A(-1,-2)$, $B(2,0)$, $C(0,3)$ e D. Sapendo che $\overline{ABCD}$ è un rombo trovare le coordinate del punto D. Quanto vale l'area di questo rombo?

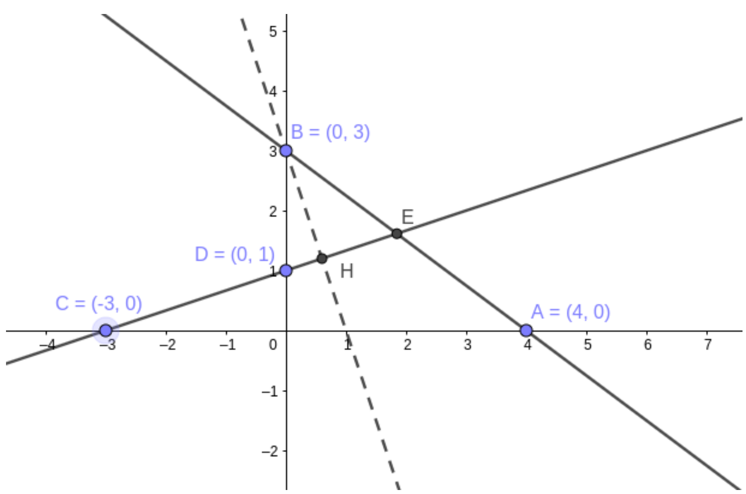
[*Hint: Le diagonali del rombo sono perpendicolari e bisecate...*]

(25) Il punto d'intersezione tra le rette $r: y = 2x+1$ e $s: y = -x-2$ è il punto medio di un segmento di estremi A e B. Sapendo che A ha coordinate $(-3,1)$, quali sono le coordinate del punto B?

(26) Determina le equazioni delle rette presenti nella figura, le coordinate del punto E e l'area del triangolo BHE:



(27) Determina le equazioni delle rette presenti nella figura, le coordinate del punto E e l'area del triangolo BHE:



(28) Data la retta passante per $P(-1,-3)$ e $Q(2,1)$ determina le perpendicolari passanti per P e per Q e l'area del quadrilatero che ha come vertici i quattro punti di intersezione di queste rette con gli assi. cartesiani.

(29) Determina le rette passanti per $O(0,0)$ e tali che la distanza da $A(3,0)$ sia due.

(30) Dal punto di intersezione delle rette di equazioni $r_1 : y = 2x - 1$ e $r_2 : y = -\frac{3}{2}x + 1$ conduci la retta passante per l'origine del sistema di riferimento e la sua perpendicolare nel punto d'intersezione. Calcola l'area del triangolo formato da queste ultime due rette con l'asse delle ascisse.

(31) Sia data la retta di equazione $r : y = 2x - 3$. Si applichino le seguenti trasformazioni: $r' = R_y(r)$, posto $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, sia $r'' = T_{\vec{t}}(r')$ e, infine $r''' = R_x(r'')$. Le rette r, r', r'' e r''' determinano un parallelogramma, di cui si richiede area e perimetro.

(32) Sia data la retta di equazione $r : y = \frac{3}{2}x + 2$. Si applichino le seguenti trasformazioni: $r' = R_y(r)$, posto $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, sia $r'' = T_{\vec{t}}(r')$ e, infine $r''' = R_x(r'')$. Le rette r, r', r'' e r''' determinano un parallelogramma, di cui si richiede area e perimetro.

(33) Tra le rette del fascio $(k-2)x + 3y - k + 4 = 0$ determinare quella che è parallela alla retta di equazione $y = -\frac{1}{2}x + 1$; quella parallela all'asse delle ascisse e quella perpendicolare alla retta di equazione: $x - 3y - 1 = 0$.

(34) Scrivi l'equazione del fascio di rette perpendicolari a $y = \frac{2}{2} - 1$. Tra le rette del fascio determina quella che passa dal punto $(-1,3)$ e chiamale r; calcola l'area del triangolo formato dalla retta r con gli assi cartesiani.

(35) Scrivi l'equazione dell'asse del segmento di estremi $A(-1,2)$ e $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$, ricavandola in due modi diversi. Su questo asse determina i punti che formano con il segmento $\overline{AB}$ un triangolo (isoscele) la cui area misura 10 unità quadrate.

[*Hint: L'asse è il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi del segmento... oppure è la retta perpendicolare passante per il punto medio...*]

(36) Tra le rette del fascio generato da $r_1 : y = 2x - 1$ e $r_2 : y = -x + 1$, determinarne una che dista dall'origine due unità.

(37) Tra le rette del fascio generato da $r_1 : y = x + 1$ e $r_2 : y = \frac{1}{2}x - 2$, determinarne una che dista dall'origine una unità.
(38) Tra le rette del fascio generato da $r_1 : y = x$ e $r_2 : y = \frac{3}{2}x + 2$, determinarne una che dista dall'origine tre unità.
(39) Tra le rette del fascio generato da $r_1 : 2y + x - 1 = 0$ e $r_2 : y = 2x - 3$, determinarne una che dista dall'origine due unità.
(40) Tra le rette del fascio generato da $r_1 : y = x + 3$ e $r_2 : y = \frac{1}{2}x + 1$, determinarne una che dista dall'origine una unità.

Relativi al Capitolo 3

Sulla parabola.

(41) Determinare l'equazione della parabola con vertice nell'origine del sistema di coordinate e passante per il punto $(2, 1)$.
(42) Determinare l'equazione della parabola con vertice in $(1, 2)$ e passante dal punto $(0, 3)$.
(43) Determinare l'equazione della parabola il cui fuoco è nel punto $(0, 1)$ e la retta direttrice è $y = -2$.
(44) Determinare fuoco e retta direttrice della parabola di equazione $y = 2x^2 - 8x + 1$.
(45) Determinare l'equazione della parabola passante per i punti $A(2, 1)$, $B(3, -1)$ e $C(6, 3)$. In quale punto si trova il vertice?
(46) Determinare le coordinate del vertice della parabola passante per l'origine del sistema di coordinate, dal punto $A(3, 2)$ e dal punto $B(4, 1)$.
(47) Trova la parabola di vertice $V(-1, 1)$ e passante da $P(1, 0)$. Dire quanto è lunga la corda che l'asse delle x stacca sulla parabola.
(48) Determinare le equazioni delle rette tangenti alla parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 2$ che passano dal punto $P(2, -3)$.
(49) Si consideri la parabola di equazione $\gamma : y = 2x^2 + x + 1$ e la si sottoponga dapprima alla traslazione secondo il vettore $\vec{t} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ottenendo la parabola γ', poi si ribalti quest'ultima rispetto all'asse delle ordinate, ottenendo la parabola γ'' ed infine si sottoponga γ'' ad un ribaltamento rispetto all'origine: trovare l'equazione anche di quest'ultima parabola e dare una rappresentazione grafica dei risultati ottenuti dopo ogni trasformazione.
(50) Si consideri la parabola di equazione $\gamma : y = -x^2 + 2x + 1$ e la si sottoponga dapprima alla traslazione secondo il vettore

$\vec{t} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ ottenendo la parabola γ', poi si ribalti quest'ultima rispetto all'asse delle ordinate, ottenendo la parabola γ'' ed infine si sottoponga γ'' ad un ribaltamento rispetto all'origine: trovare l'equazione anche di quest'ultima parabola e dare una rappresentazione grafica dei risultati ottenuti dopo ogni trasformazione.

(51) Si scriva l'equazione della retta tangente alla parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ nel suo punto di intersezione con l'asse delle ordinate.

(52) Una parabola ha vertice nel punto $V(3, -1)$ e fuoco in $F(3, 0)$. Si determini la sua equazione.

(53) Determinare l'equazione della retta tangente alla parabola $y = 2x^2 + 3x + 1$, nel punto di ascissa -1, in almeno due modi differenti.

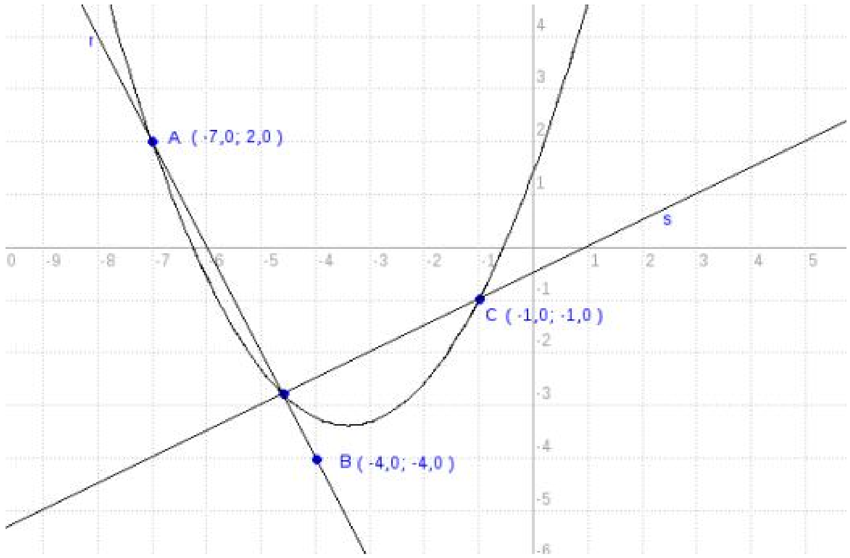
(54) Trovare e disegnare la parabola con vertice in $V(1, -2)$ e passante da $P(-1, 1)$. Infine determinare le coordinate del fuoco.

(55) Data la parabola di equazione $y = 2x^2 - 4x + 2$ determinare l'equazione della retta passante per il suo vertice e per l'intercetta asse delle ordinate.

(56) Trovare e disegnare la parabola con vertice in $V(-2, 3)$ e passante da $P(1, -1)$. Infine determinare le coordinate del fuoco. item Data la parabola di equazione $y = 3x^2 + 6x + 1$ determinare l'equazione della retta passante per il suo vertice e per l'intercetta asse delle ordinate.

(57) Una parabola passa per il punto $A(-2, 1)$ ed ha in $B(3, 2)$, come tangente, la retta di equazione $y = \frac{1}{3}x + 1$. Si determinino le coordinate del vertice.

(58) Osserva la figura seguente, dati i punti A, B e C, determina le rette r ed s ad essa perpendicolare e passante per C. Si richiede di determinare le coordinate del vertice della parabola passate per A, C ed il punto d'intersezione tra le rette r ed s.



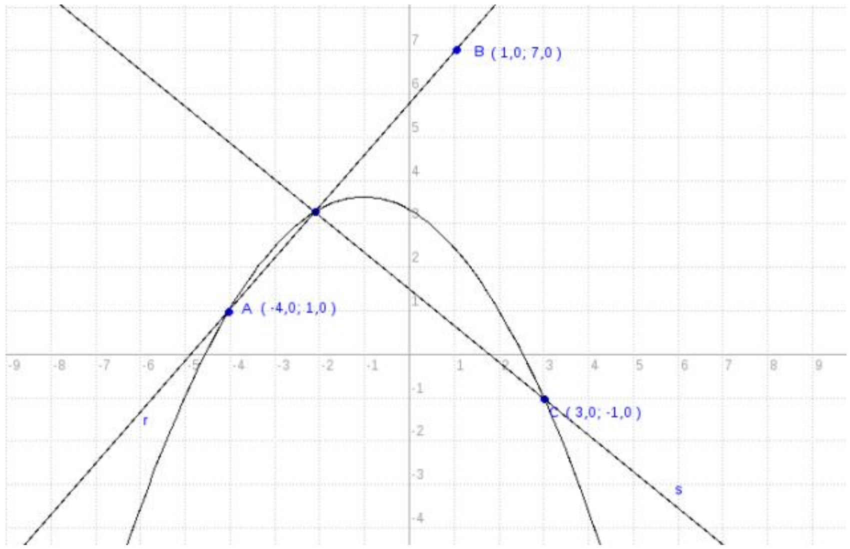
(59) Determina l'equazione della parabola il cui vertice è in $(2, 1)$ e che passa per l'origine del sistema di riferimento. Il vertice, con i due punti d'intersezione della parabola con l'asse delle ascisse, determina un triangolo di cui si vuole conoscere area, perimetro ed equazioni delle rette su cui giacciono i lati.

(60) Dopo aver disegnato le curve di equazione

$$y = 3x^2 - 6x + 1 \qquad \text{e} \qquad 2x + y - 3 = 0$$

determina quanto il fuoco della parabola dista dalla retta data.

(61) Osserva la figura seguente, dati i punti A, B e C, determina le rette r ed s ad essa perpendicolare e passante per C. Si richiede di determinare le coordinate del vertice della parabola passate per A, C ed il punto d'intersezione tra le rette r ed s.



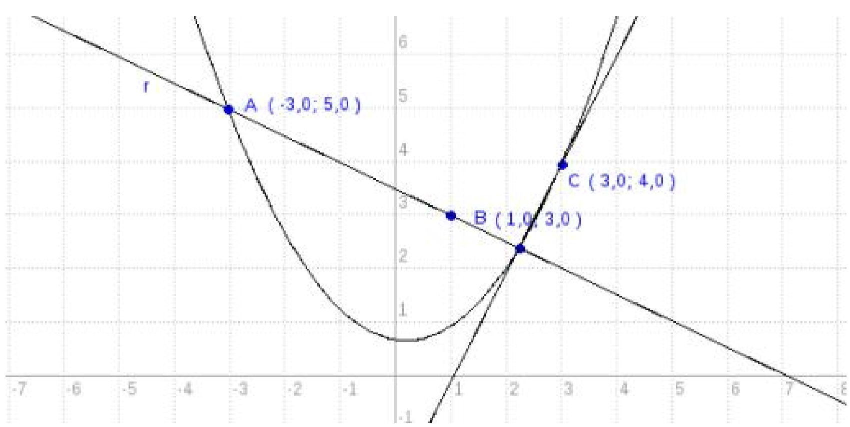
(62) Determina l'equazione della parabola il cui vertice è in $(-3, -4)$ e che passa per l'origine del sistema di riferimento. Il vertice, con i due punti d'intersezione della parabola con l'asse delle ascisse, determina un triangolo di cui si vuole conoscere area, perimetro ed equazioni delle rette su cui giacciono i lati.

(63) Dopo aver disegnato le curve di equazione

$$y = x^2 - 4x + 2 \qquad \text{e} \qquad x - y + 1 = 0$$

determina quanto il fuoco della parabola dista dalla retta data.

(64) Osserva la figura seguente, dati i punti A, B e C, determina le rette r ed s ad essa perpendicolare e passante per C. Si richiede di determinare le coordinate del vertice della parabola passate per A, C ed il punto d'intersezione tra le rette r ed s.



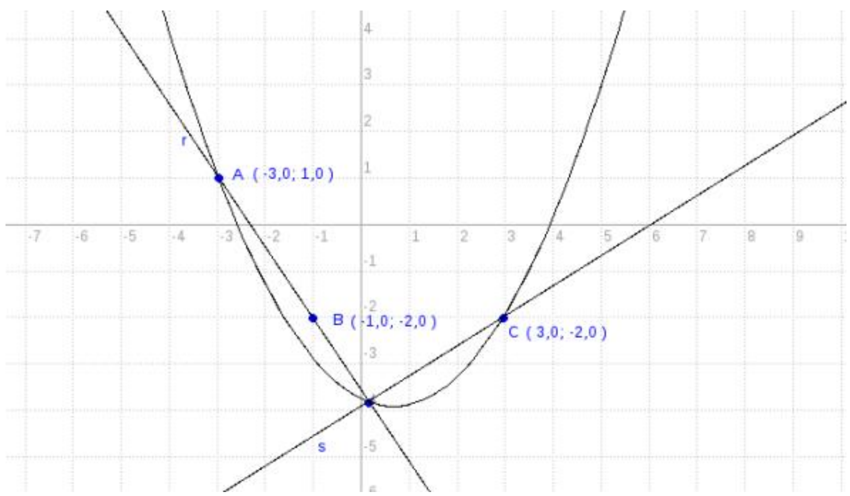
(65) Determina l'equazione della parabola il cui vertice è in $(2, -5)$ e che passa per l'origine del sistema di riferimento. Il vertice, con i due punti d'intersezione della parabola con l'asse delle ascisse, determina un triangolo di cui si vuole conoscere area, perimetro ed equazioni delle rette su cui giacciono i lati.

(66) Dopo aver disegnato le curve di equazione

$$y = -x^2 + 4x + 2 \qquad \text{e} \qquad y - 2x - 4 = 0$$

determina quanto il fuoco della parabola dista dalla retta data.

(67) Osserva la figura seguente, dati i punti A, B e C, determina le rette r ed s ad essa perpendicolare e passante per C. Si richiede di determinare le coordinate del vertice della parabola passate per A, C ed il punto d'intersezione tra le rette r ed s.



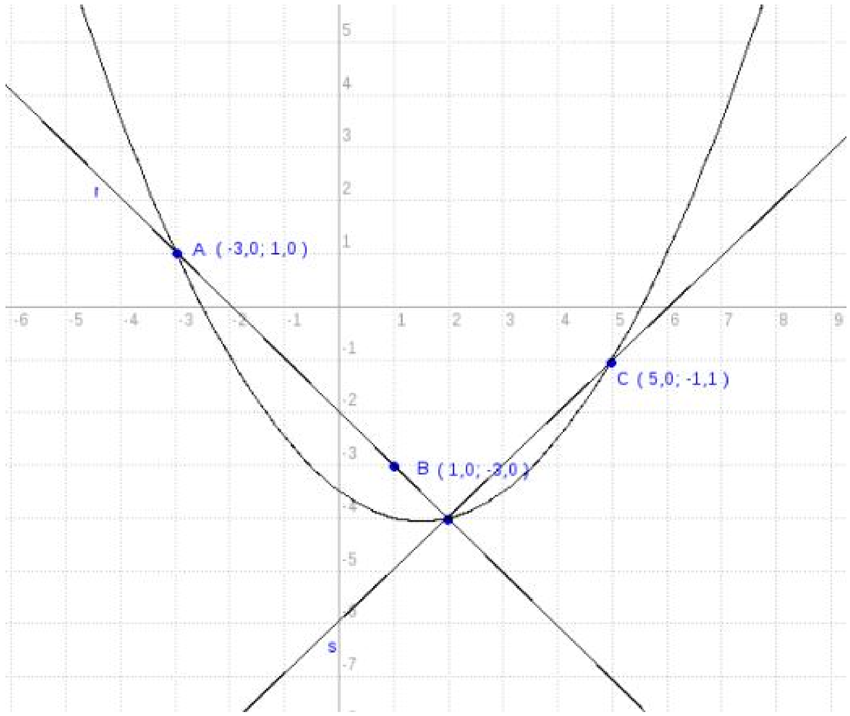
(68) Determina l'equazione della parabola il cui vertice è in $(-3, 4)$ e che passa per l'origine del sistema di riferimento. Il vertice, con i due punti d'intersezione della parabola con l'asse delle ascisse, determina un triangolo di cui si vuole conoscere area, perimetro ed equazioni delle rette su cui giacciono i lati.

(69) Dopo aver disegnato le curve di equazione

$$y = 2x^2 + 4x \qquad \text{e} \qquad x - 4y - 1 = 0$$

determina quanto il fuoco della parabola dista dalla retta data.

(70) Osserva la figura seguente, dati i punti A, B e C, determina le rette r ed s ad essa perpendicolare e passante per C. Si richiede di determinare le coordinate del vertice della parabola passate per A, C ed il punto d'intersezione tra le rette r ed s.



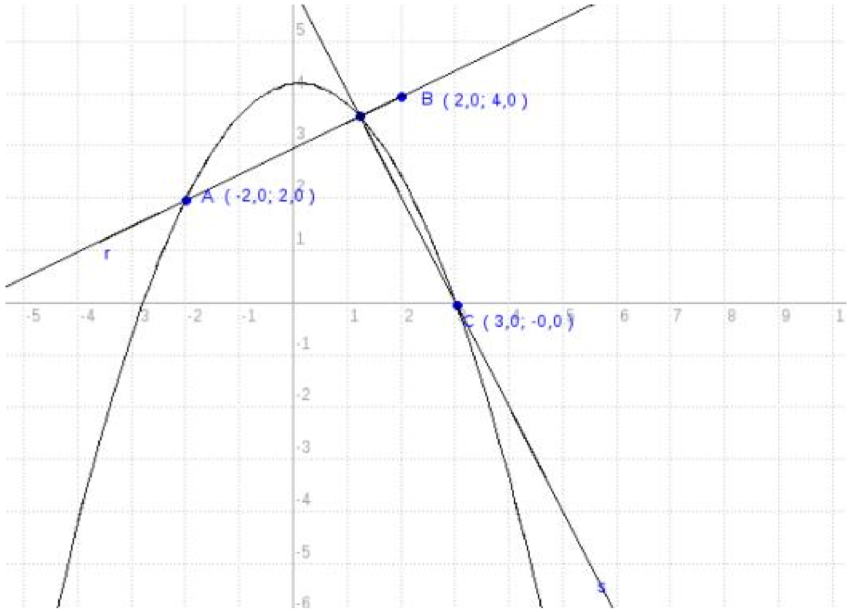
(71) Determina l'equazione della parabola il cui vertice è in $(2, -1)$ e che passa per l'origine del sistema di riferimento. Il vertice, con i due punti d'intersezione della parabola con l'asse delle ascisse, determina un triangolo di cui si vuole conoscere area, perimetro ed equazioni delle rette su cui giacciono i lati.

(72) Dopo aver disegnato le curve di equazione

$$y = -4x^2 + 8x - 2 \qquad \text{e} \qquad 2x + 4y + 6 = 0$$

determina quanto il fuoco della parabola dista dalla retta data.

(73) Osserva la figura seguente, dati i punti A, B e C, determina le rette r ed s ad essa perpendicolare e passante per C. Si richiede di determinare le coordinate del vertice della parabola passate per A, C ed il punto d'intersezione tra le rette r ed s.



(74) Determina l'equazione della parabola il cui vertice è in $(-4, -2)$ e che passa per l'origine del sistema di riferimento. Il vertice, con i due punti d'intersezione della parabola con l'asse delle ascisse, determina un triangolo di cui si vuole conoscere area, perimetro ed equazioni delle rette su cui giacciono i lati.

(75) Dopo aver disegnato le curve di equazione

$$y = 2x^2 - 5 \qquad \text{e} \qquad x + y + 1 = 0$$

determina quanto il fuoco della parabola dista dalla retta data.

(76) Determina la parabola passante per $A(1, 1)$, $B(3, 2)$ e $C(-1, -2)$. Dopo averla disegnata, indicandone fuoco e vertice, determina la retta tangente nel punto A e l'area del triangolo delimitato da questa retta con gli assi coordinati.

(77) Determina la parabola passante per $A(-3, 1)$, $B(0, -2)$ e $C(1, 4)$. Dopo averla disegnata, indicandone fuoco e vertice, determina la retta tangente nel punto A e l'area del triangolo delimitato da questa retta con gli assi coordinati.

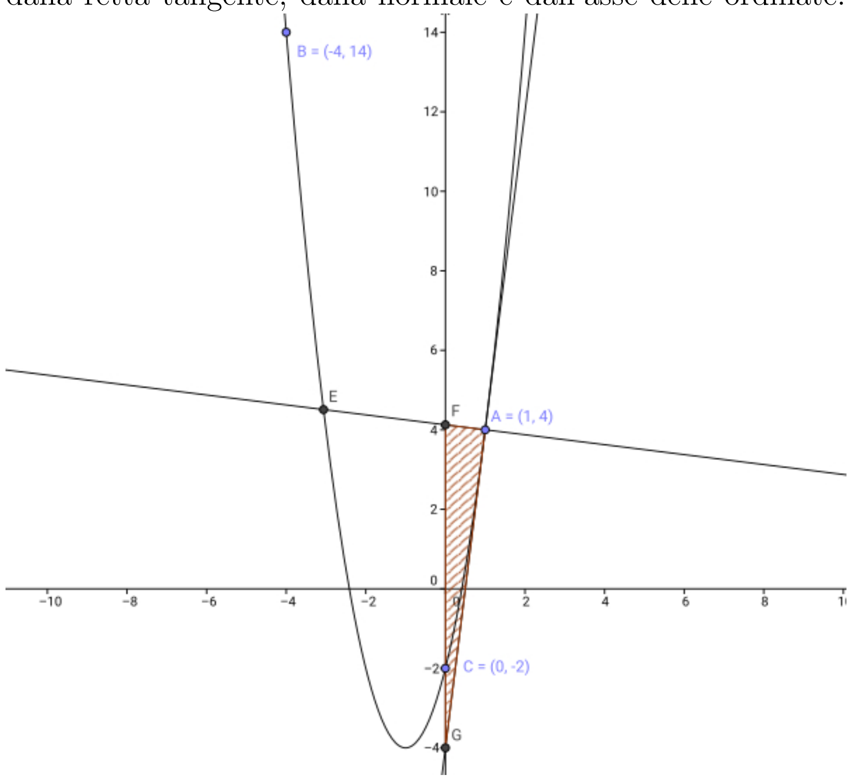
(78) Determina la parabola passante per $A(1, 3)$, $B(2, -2)$ e $C(-1, 4)$. Dopo averla disegnata, indicandone fuoco e vertice, determina la retta tangente nel punto C e l'area del triangolo delimitato da questa retta con gli assi coordinati.

(79) Determina la parabola passante per $A(-4, 2)$, $B(-1, 4)$ e $C(2, 3)$. Dopo averla disegnata, indicandone fuoco e vertice, determina la retta tangente nel punto A e l'area del triangolo delimitato da questa retta con gli assi coordinati.

(80) Determina la parabola passante per $A(-3,-1)$, $B(0,1)$ e $C(2,-2)$. Dopo averla disegnata, indicandone fuoco e vertice, determina la retta tangente nel punto B e l'area del triangolo delimitato da questa retta con gli assi coordinati.

(81) Determina la parabola passante per $A(-4,4)$, $B(-1,-1)$ e $C(2,3)$. Dopo averla disegnata, indicandone fuoco e vertice, determina la retta tangente nel punto C e l'area del triangolo delimitato da questa retta con gli assi coordinati.

(82) Della figura seguente determina l'equazione della parabola passante per i punti A, B e C; l'equazione della retta tangente nel punto A e della retta normale nello stesso punto (ovvero della perpendicolare alla retta tangente in A). Poi determina il secondo punto di intersezione di tale retta normale con la parabola e l'area del triangolo (rettangolo) formato dalla retta tangente, dalla normale e dall'asse delle ordinate.

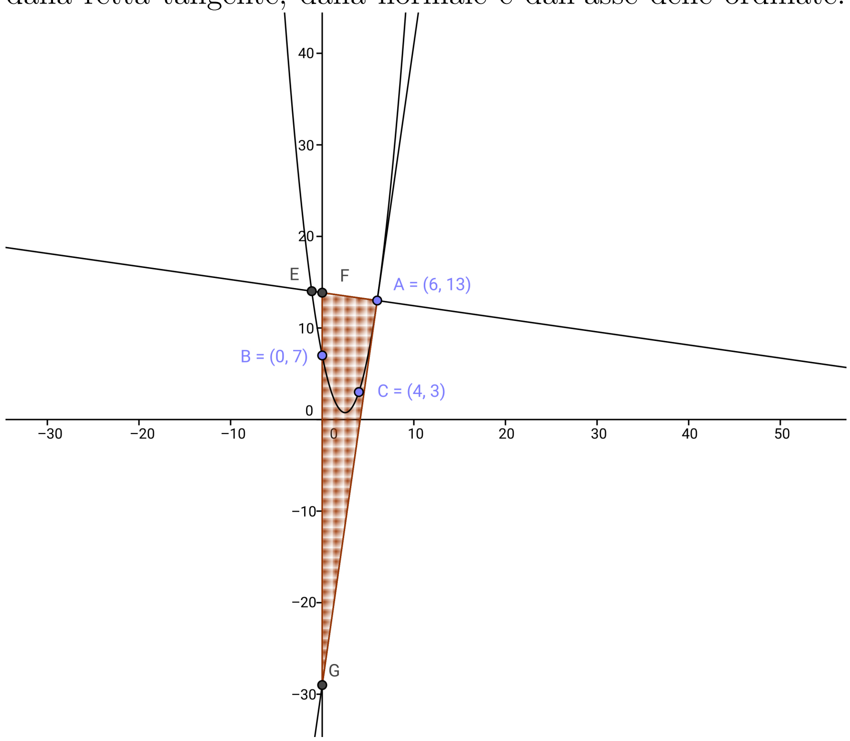


(83) Lancio un oggetto da 12 metri di altezza ed atterra a 8 metri di distanza dal punto di partenza. Supponendo che ad un metro di distanza dal punto da cui lo lancio, raggiunge l'altezza massima di 15 metri, dire a che distanza -in orizzontale- esso avrà un'altezza di tre metri.

(84) Determina la parabola che abbia per fuoco il punto $F(3,2)$ e

per vertice il punto $V(3,-1)$. Si determini la retta tangente nel punto della parabola di ascissa 1 e la distanza del fuoco da tale retta.

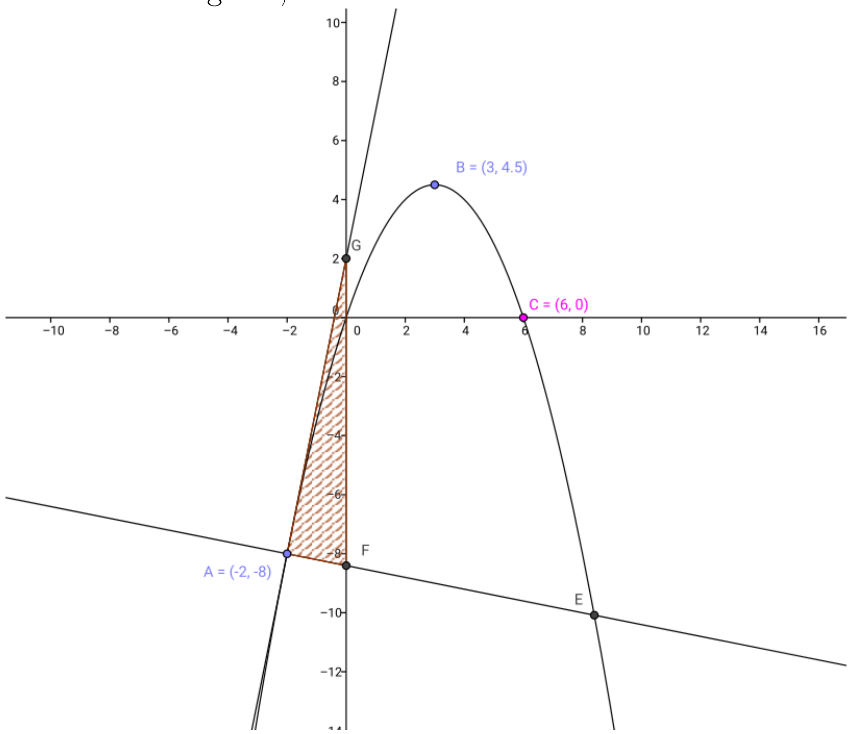
(85) Della figura seguente determina l'equazione della parabola passante per i punti A, B e C; l'equazione della retta tangente nel punto A e della retta normale nello stesso punto (ovvero della perpendicolare alla retta tangente in A). Poi determina il secondo punto di intersezione di tale retta normale con la parabola e l'area del triangolo (rettangolo) formato dalla retta tangente, dalla normale e dall'asse delle ordinate.



(86) Un tuffatore si lancia da un trampolino alto due metri e rientrante nella piscina di un metro rispetto al bordo di quest'ultima. Il tuffatore si lancia prima verso l'alto, raggiungendo un'altezza massima di un metro e mezzo rispetto al trampolino, ad un metro di distanza da esso e poi ridiscende verso la piscina entrando in acqua in un punto, la cui distanza dal bordo piscina si chiede di indicare con assoluta precisione.

(87) Determina la parabola che abbia per fuoco il punto $F(-1,1)$ e per vertice il punto $V(-1,-2)$. Si determini la retta tangente nel punto della parabola di ascissa 2 e la distanza del fuoco da tale retta.

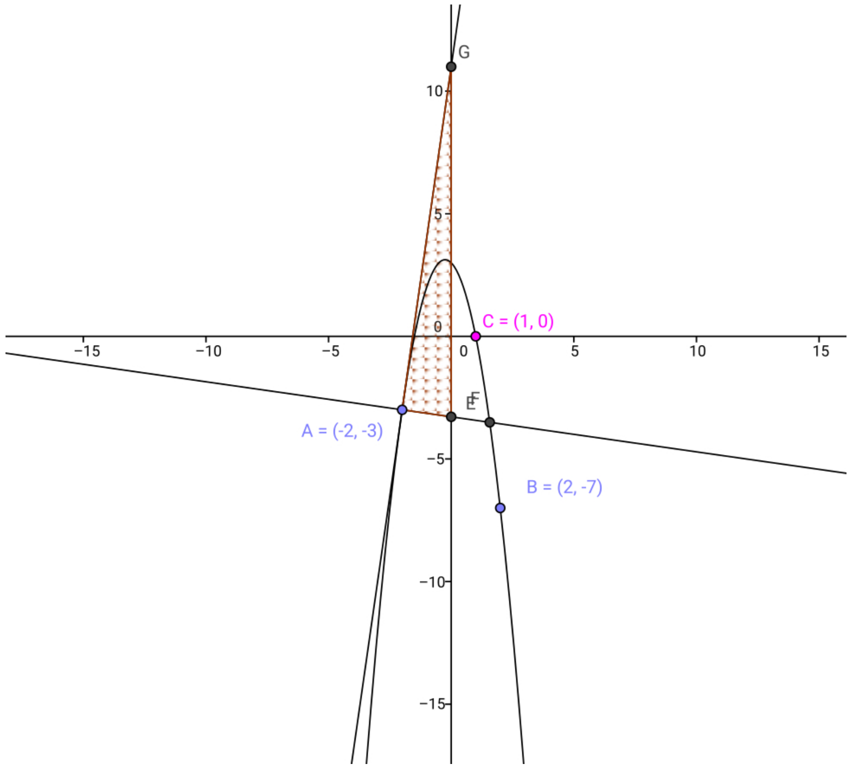
(88) Della figura seguente determina l'equazione della parabola passante per i punti A, B e C; l'equazione della retta tangente nel punto A e della retta normale nello stesso punto (ovvero della perpendicolare alla retta tangente in A). Poi determina il secondo punto di intersezione di tale retta normale con la parabola e l'area del triangolo (rettangolo) formato dalla retta tangente, dalla normale e dall'asse delle ordinate.



(89) Se sparo un proiettile da un'altezza di un metro e settanta e so che la sua altezza massima, di due metri, la raggiunge a cinquanta metri da me, a quale distanza ricade a terra?

(90) Determina la parabola che abbia per fuoco il punto $F(1,2)$ e per vertice il punto $V(1,3)$. Si determini la retta tangente nel punto della parabola di ascissa 3 e la distanza del fuoco da tale retta.

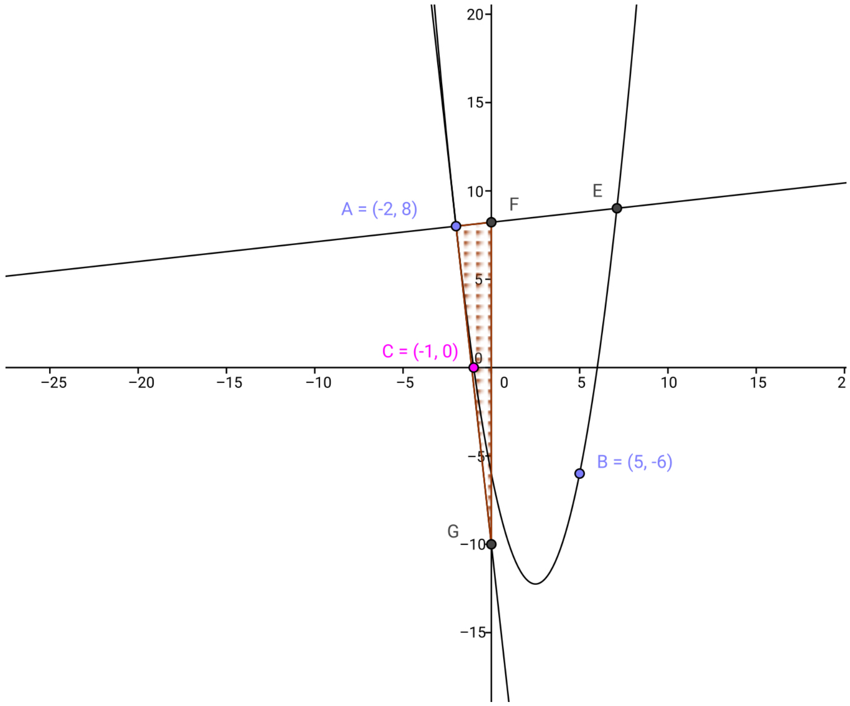
(91) Della figura seguente determina l'equazione della parabola passante per i punti A, B e C; l'equazione della retta tangente nel punto A e della retta normale nello stesso punto (ovvero della perpendicolare alla retta tangente in A). Poi determina il secondo punto di intersezione di tale retta normale con la parabola e l'area del triangolo (rettangolo) formato dalla retta tangente, dalla normale e dall'asse delle ordinate.



(92) Chiedo le chiavi di casa a mia moglie, che si trova al primo piano e lei me le lancia dalla finestra. Il punto da cui parte il mazzo di chiave è alto circa quattro metri e mezzo rispetto al piano della strada e la traiettoria che segue nella discesa è tale che, a mezzo metro dal punto di partenza si trovi già a tre metri di altezza ed ad un metro di distanza dal punto di partenza, l'altezza osservabile è di due metri e venti. A quale distanza da casa cadranno le chiavi?

(93) Determina la parabola che abbia per fuoco il punto $F(2,1)$ e per vertice il punto $V(2,4)$. Si determini la retta tangente nel punto della parabola di ascissa 4 e la distanza del fuoco da tale retta.

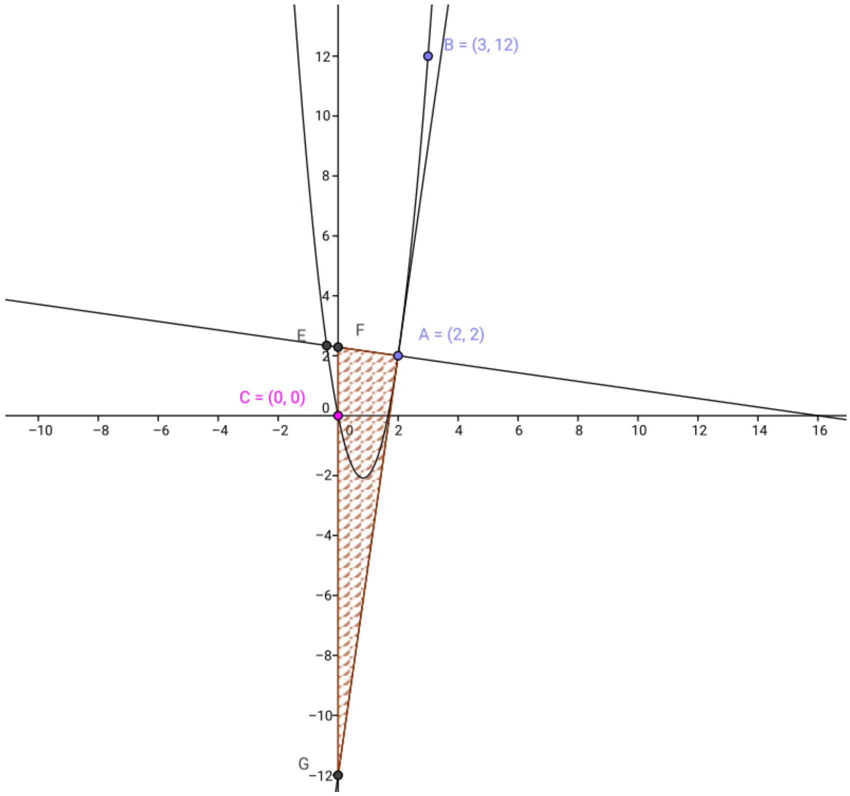
(94) Della figura seguente determina l'equazione della parabola passante per i punti A, B e C; l'equazione della retta tangente nel punto A e della retta normale nello stesso punto (ovvero della perpendicolare alla retta tangente in A). Poi determina il secondo punto di intersezione di tale retta normale con la parabola e l'area del triangolo (rettangolo) formato dalla retta tangente, dalla normale e dall'asse delle ordinate.



(95) Dall'arco scocca una freccia diretta verso il bersaglio posto ad una distanza di 10 metri ed ad una altezza di due metri da terra. Per colpire il bersaglio, si sa che l'arciere deve dirigere la freccia secondo una traiettoria che tocchi l'altezza massima di tre metri, a quattro metri da sé. Trovare a che altezza, rispetto il livello del terreno, la freccia deve partire e, se fosse tolto il bersaglio, a che distanza dovrebbe cadere.

(96) Determina la parabola che abbia per fuoco il punto $F(-3,0)$ e per vertice il punto $V(-3,2)$. Si determini la retta tangente nel punto della parabola di ascissa -2 e la distanza del fuoco da tale retta.

(97) Della figura seguente determina l'equazione della parabola passante per i punti A, B e C; l'equazione della retta tangente nel punto A e della retta normale nello stesso punto (ovvero della perpendicolare alla retta tangente in A). Poi determina il secondo punto di intersezione di tale retta normale con la parabola e l'area del triangolo (rettangolo) formato dalla retta tangente, dalla normale e dall'asse delle ordinate.



(98) Si lancia un oggetto da una torre alta 20 metri e si osserva che cade ad una distanza di 10 metri dalla base della torre. Sapendo che è lanciato verso l'alto ed ad un metro dalla torre si trova ad una altezza di 24 metri, dire quale è l'altezza massima raggiunta e a che distanza dalla torre essa si ottiene.

(99) Determina la parabola che abbia per fuoco il punto $F(1,-1)$ e per vertice il punto $V(1,3)$. Si determini la retta tangente nel punto della parabola di ascissa -1 e la distanza del fuoco da tale retta.

(100) Data la parabola γ con vertice in $V(1,-2)$ e passante per l'origine del sistema di riferimento, la si ribalti rispetto all'origine e si dermino i punti d'intersezione della retta tangente in O, alla parabola γ, con la nuova parabola γ'. Si scrivano le equazioni e si rappresenti il tutto in un piano cartesiano.

(101) Data la parabola γ con vertice in $V(2,3)$ e passante per l'origine del sistema di riferimento, la si ribalti rispetto all'origine e si dermino i punti d'intersezione della retta tangente in O, alla parabola γ, con la nuova parabola γ'. Si scrivano le equazioni e si rappresenti il tutto in un piano cartesiano.

La parabola permette di risolvere *problemi di ottimizzazione* [1] quali quelli di determinare il minimo o il massimo di una quantità, che varia in funzione di un'altra, secondo una legge parabolica: proponiamo i seguenti problemi, che verranno risolti anche successivamente utilizzando uno strumento di calcolo molto più potente, che è la *funzione "derivata"*.

(102) Il profitto mensile di una azienda è una funzione parabolica della quantità di prodotto. Sapendo che le spese fisse (mensili) ammontano a 100000 euro, con una produzione di 800 pezzi al mese si ha un utile di 13600 euro, mentre con una produzione di 1000 pezzi, l'utile mensile è di 40000 euro, con quale produzione (mensile) si raggiungerà il profitto massimo?

(103) Una fabbrica produce un articolo di largo consumo, che vende a 25 euro al pezzo. Nella produzione di questo articolo, l'azienda incontra una spesa fissa mensile di 50000 euro, un costo di 15 euro al pezzo per una produzione sotto i 15000 al mese e un costo di $800 + \frac{1}{20}x$ per ogni pezzo prodotto oltre i 15000. Quale produzione mensile rende il massimo profitto, per ogni fascia di costi?

(104) Determina il rettangolo di area massima tra tutti quelli aventi perimetro assegnato.

(105) Dato un triangolo equilatero ed un punto P su uno dei suoi lati, determina la distanza di P da uno degli estremi del lato a cui appartiene, in modo che il prodotto delle distanze di P dagli altri due lati del triangolo sia massimo.

[*Hint: Si ricordi che in un triangolo rettangolo, se un angolo è di* 30 *gradi, allora il cateto che gli si oppone è metà dell'ipotenusa...*]

(106) Dato il quadrato $\overline{ABCD}$ ed il punto $P \in \overline{AD}$, si consideri il triangolo $\overline{PBC}$. Determinare la distanza di P dal vertice A in modo che la somma dei quadrati dei tre lati del triangolo $\overline{PBC}$ sia minima.

(107) Considerato un filo di lunghezza l, dividerlo in due parti in modo che le parti ottenute diventino i bordi di due quadrati per i quali la somma delle aree sia minima.

(108) Una ditta produttrice di detersivi per lavatrici ha costi al litro di 2 euro e sostiene una spesa fissa di 100 euro settimanale. La ditta prevede di ricavare dalla vendita 3 euro al litro con una spesa di vendita, per ogni litro, pari ad $\frac{1}{1000}$ del numero di litri venduti. Calcola il numero di litri che la ditta deve

[1] Detti appunti **di tipo parabolico**.

produrre per ottenere il massimo guadagno e quanti per non andare in perdita.

(109) Una lamiera, a forma rettangolare, lunga l e larga d, con $d < l$, deve essere piegata in modo da formare una canaletta che raccolga più acqua possibile; a tal fine si decide di segnare le linee di piegatura sul lato corto, equidistanti dai lati lunghi della lamiera. A quale distanza dagli estremi, sul lato corto, devono essere posti i segni di piegatura?

(110) La somma di due numeri, di cui uno precede di due posti l'altro, è cento. Determina il valore massimo del prodotto tra questi numeri e quali essi siano.

(111) Un'agenzia per il noleggio di auto noleggia 300 auto al giorno alla tariffa giornaliera di 40 euro cadauno. Ad ogni aumento della tariffa di 1 euro corrisponde un calo di 5 auto nel noleggio. A quale tariffa giornaliera dovrebbero essere noleggiate le auto per avere il massimo ricavo?

(112) Un'agenzia immobiliare dà in affitto tutti gli $,800,$ appartamenti di uno stabile a 1000 euro al mese (per ciascun appartamento). Ad ogni aumento dell'affitto di 40 euro, corrisponde una partenza da un appartamento. Ogni appartamento libero comporta una spesa per l'agenzia di 60 euro al mese per tasse e manutenzione, mentre il costo mensile per tasse, servizi, manutenzione e acqua di uno di quelli occupati ammonta a 260 euro al mese. Che affitto dovrebbe pretendere l'agenzia per avere il massimo profitto?

(113) Da un quadrato di cartone si vuole ricavare, tagliando quattro quadrati uguali dagli spigoli e ripiegando opportunamente i lembi, si ottiene una scatola aperta, a base quadrata, di capacità massima. Determinare il lato di base della scatola.

Sulla risoluzione dei sistemi lineari.

(114) Risolvi il seguente sistema lineare con il metodo di Gauss-Jordan:
$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x - 3y - 2z = 1 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

(115) Risolvi il seguente sistema lineare con il metodo di Gauss-Jordan:
$$\begin{cases} x + y + 3z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \\ x + z = -1 \end{cases}$$

(116) Risolvi il seguente sistema lineare con il metodo di Gauss-Jordan:
$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y = z \end{cases}$$

(117) Risolvi il seguente sistema lineare con il metodo di Gauss-Jordan:
$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 2y + z = -3 \end{cases}$$

(118) Risolvi il seguente sistema lineare con il metodo di Gauss-Jordan:
$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x - z = 3 \end{cases}$$

(119) Risolvi il seguente sistema lineare con il metodo di Gauss-Jordan:
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3z = -1 \end{cases}$$

(120) Risolvi il seguente sistema lineare con il metodo di Gauss-Jordan:
$$\begin{cases} x + 4y - 2z + 1 = 0 \\ y - 2 = x + z \\ 4x + 2z = -7 \end{cases}$$

(121) Risolvi il seguente sistema lineare con il metodo di Gauss-Jordan:
$$\begin{cases} x - 3y - z = 1 \\ 4x - 2z = 7 \\ x - y - 2z = -1 \end{cases}$$

Relativi al Capitolo 4

Sulla ellisse.

(122) Disegnare l'ellisse di equazione $x^2 + \frac{y^2}{4} = 2$ indicando anche le coordinate dei fuochi e dei quattro vertici.

(123) Stesso esercizio di prima per l'ellisse di equazione $2\,x^2 + 5\,y^2 = 10$.

(124) Scrivi l'equazione dell'ellisse passante per i punti $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ e $(-1, 1)$.

(125) Una ellisse ha i semiassi lunghi rispettivamente $a = 4$ e $b = 3$. Determinarne l'equazione, disegnarla e trovare le coordinate dei due fuochi.

(126) Determinare l'equazione della retta tangente all'ellisse di equazione $4x^2 + 2y^2 = 8$, in almeno due modi differenti, nel suo punto di ascissa 1 ed ordinata positiva.

(127) Determinare le coordinate dei vertici, il perimetro e l'area del rettangolo inscritto nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$, sapendo che due vertici del rettangolo appartengono alla retta di equazione $y = -1$. Un'ellisse passa per i punti $A\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Trovane l'equazione e la misura dell'area del rombo avente come vertici i fuochi ed i vertici appartenenti all'asse delle ordinate.

(128) Scrivi l'equazione dell'ellisse che abbia semiasse maggiore lungo 3 unità e che passa per il punto $\left(1, \frac{4}{3}\right)$.

(129) Scrivi le equazioni delle rette tangenti all'ellisse di equazione $x^2 + 2y^2 = 1$ che abbiano pendenza 2.

(130) Una ellisse, di cui si chiede l'equazione, ha due vertici nei punti $(\mp 5, 0)$ ed i due fuochi nei punti $(\mp 4, 0)$. Determina la misura dell'area del rettangolo, inscritto nell'ellisse, con un lato sulla retta di equazione $x = 2$.

(131) Un'ellisse è tangente nel punto di ordinata 1 alla retta di equazione $4x + 5y - 21 = 0$. Determinane l'equazione.

(132) Un satellite artificiale S ruota intorno alla terra, che indichiamo con T, seguendo un'orbita ellittica con un perigeo P di 150 km ed un apogeo A di 15000 km [2]. Si consideri la Terra con un raggio approssimativo di 6380 km e si determini l'asse maggiore dell'orbita satellitare, l'asse minore, la distanza focale, l'eccentricità e l'equazione canonica della traiettoria del satellite.

(133) Durante la missione Apollo, fu messo un veicolo spaziale in orbita ellittica intorno alla Luna, con periluna P di 110 km e apoluna A di 300 km (e con la Luna che occupava uno dei due fuochi della traiettoria ellittica). Essendo il valore del

[2]Si ricorda che, per le Leggi di Keplero, le traiettorie degli oggetti orbitanti attorno alla Terra, sono ellittiche con il pianeta che occupa uno dei due fuochi. Inoltre, è utile ricordare che il perigeo è il punto più vicino alla terra, mentre l'apogeo è quello più lontano.

raggio lunare di circa 1740 km, determinare i semiassi dell'orbita ellittica, la distanza focale, l'eccentricità e l'equazione dell'ellisse che ne rappresenta l'orbita.

(134) Un satellite artificiale S ruota attorno alla Terra T in un'orbita circolare, avente il centro nel centro della Terra, con distanza media di 900 km. Si vuole trasferire S in un'orbita circolare più vicina, avente una distanza media di soli 200 km da T. All'uopo si decide di far percorrere ad S la metà di un'orbita ellittica, detta **orbita di Hohmann**, con fuoco nel centro di T. Essendo il raggio terrestre supposto di 6380 km, determinare le equazioni delle due orbite circolare e le caratteristiche dell'orbita ellittica, ovvero la lunghezza dei semiassi, la distanza focale, l'eccentricità e l'equazione canonica.

[*Hint: Se non si è studiata ancora la circonferenza, la si consideri come una* ellisse degenere *i cui semiassi sono uguali e pari al raggio ed i due fuochi risultano sovrapposti in un unico punto, il centro della circonferenza...*]

Relativi al Capitolo 5

Sulla iperbole.

(135) Trovare le coordinate dei fuochi, dei vertici e le equazioni delle rette asintotiche dell'iperbole di equazione $2x^2 - y^2 = 8$ e, successivamente, disegnala.

(136) Determinare asintoti, vertici, distanza focale ed eccentricità dell'iperbole di equazione: $x^2 - y^2 = 1$ e poi disegnala.

(137) Scrivi l'equazione dell'iperbole che ha un fuoco nel punto $F(\sqrt{5}, 0)$ e che come asintoti le rette: $x \mp 3\,y = 0$.

(138) Una iperbole, di cui si chiede l'equazione, passa dal punto $P(-\sqrt{3}, 2\sqrt{2})$ ed ha un fuoco nel punto $F(0, \sqrt{7})$.

(139) Scrivi l'equazione dell'iperbole che passa dai punti $P(1, 9)$ e $Q(\sqrt{3}, 4)$. Dopo aver trovato le coordinate dei fuochi, le equazioni degli assi asintotici, i vertici e l'eccentricità, disegnala.

(140) Scrivi l'equazione della rette tangente all'iperbole di equazione $8x^2 - y^2 = 1$ nel suo punto di ascissa $\frac{1}{2}$ ed ordinata negativa, in almeno due modi differenti.

(141) Scrivi l'equazione delle rette tangenti all'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 6$ e passanti dal punto $P(2, 0)$.

(142) Una **funzione omografica** non è altro che una iperbole equilatera traslata . Dimostra che l'equazione $y = \frac{a\,x+b}{c\,x+d}$ con $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$, rappresenta proprio una iperbole traslata i cui asintoti sono $y = \frac{a}{c}$ e $x = -\frac{d}{c}$.

[*Hint: Effettua l'opportuna traslazione per riportare la frazione nella forma* $y = \frac{\text{“Numero”}}{x}$, *una volta determinato il “centro di simmetria”, ovvero la nuova origine del sistema di riferimento...*]

(143) Delle seguenti funzioni omografiche determina gli asintoti, il centro di simmetria, le coordinate dei vertici e tracciane il grafico:

i.
$$y = \frac{-8x - 10}{2x + 1}.$$

ii.
$$y = \frac{4 - 2x}{x - 1}.$$

iii.
$$y = \frac{2x + 1}{1 - 6x}$$

iv.
$$y = \frac{x - 4}{3x - 21}$$

v.
$$y = \frac{3}{x - 1}.$$

(144) Determina l'area del rettangolo, con i lati paralleli agli assi coordinati, avente i vertici sull'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 0$ e con due lati (opposti) passanti per i fuochi dell'iperbole stessa.

(145) Le due iperboli di equazione $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ e $x^2 - 16y^2 = 4$ si intersecano nei punti A e B. La retta $x - 3y = 0$ e l'iperbole $xy = 3$ si incontrano invece nei punti C e D. Determinare l'area del quadrilatero $\overline{ABCD}$.

(146) Scrivi le coordinate dei punti d'intersezione tra l'iperbole $x^2 - 2y^2 = 2$ e l'ellisse $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$. Poscia scrivi le equazioni delle rette tangenti in tali punti all'iperbole e calcola l'area del poligono che esse delimitano.

(147) Determinare l'equazione dell'iperbole tangente in $P\left(-5, \frac{3}{2}\right)$ alla retta di equazione $5x + 6y + 16 = 0$.

(148) Determinare i due punti d'intersezione della retta di equazione $28x - 25y - 100 = 0$ con l'iperbole di equazione $16x^2 - 25y^2 = 400$ e le tangenti all'iperbole in tali punti.

(149) Determinare l'equazione dell'iperbole passante per $P(-2, 5)$ e $Q\left(\frac{4}{3}, -2\right)$ e le equazioni delle rette tangenti in tali punti.

(150) Se un vertice dell'iperbole è $V(2, 0)$ e l'eccentricità è $e = 3$, quale è l'equazione dell'iperbole e dove si trovano i suoi fuochi?

Relativi al Capitolo 6

Sulla circonferenza.

(151) Determinare l'equazione della circonferenza di centro $C(3,2)$ e raggio $r = 3$.

(152) Determinare l'equazione della circonferenza di centro $(-1,1)$ e raggio 2.

(153) Sia data la circonferenza di equazione $x^2+y^2-4x+6x-12 = 0$ determinare centro e raggio.

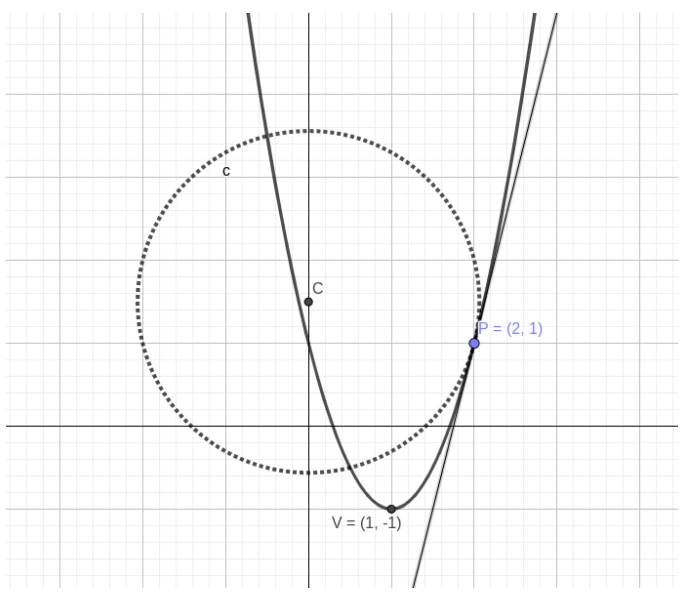
(154) Dire se l'equazione rappresenta una circonferenza, in caso negativo dire perché e cosa sia: $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5 = 0$.

(155) Determinare la circonferenza di centro $C(2,-1)$ e passante dall'origine del sistema di riferimento.

(156) Determinare l'equazione della circonferenza di centro $(-1,3)$ e tangente alla retta di equazione: $y = x - 2$.

(157) Determina l'equazione della circonferenza il cui centro sta nel vertice della parabola di equazione $y = 2x^2 + 4x - 1$ ed è tangente alla retta di equazione $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

(158) Data la parabola di vertice V e passante dal punto P, come in figura, si determini il centro e l'equazione della circonferenza tangente in P alla parabola (ovvero che condivide con la parabola la retta tangente in P) ed il centro sull'asse delle ordinate.

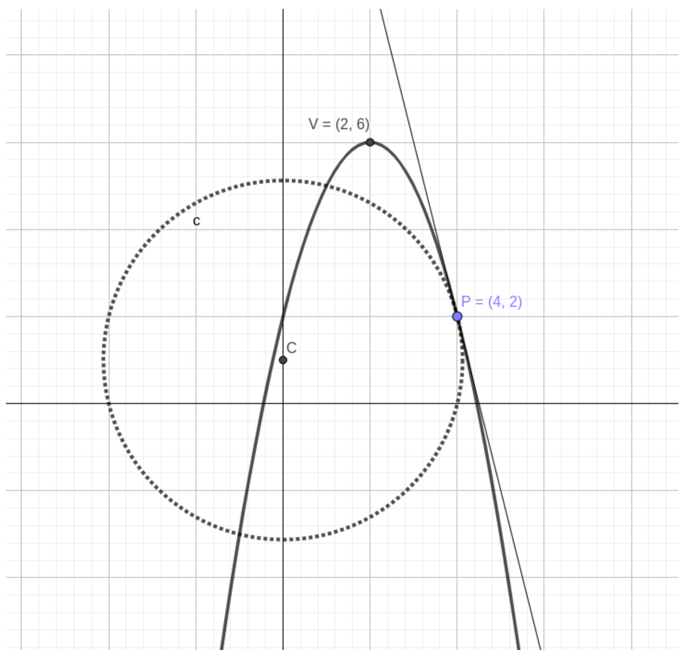


(159) Considera la retta passante per $A(-2,4)$ e $B(4,0)$. Essa è una tangente alla circonferenza centrata nell'origine del sistema di riferimento. Dopo aver determinato l'equazione di tale

circonferenza, determina il punto di tangenza T e la parabola con vertice nell'origine del sistema di riferimento e passante per T.

(160) Determina la circonferenza centrata in $C(3,2)$ e tangente all'asse delle ordinate. Detti A e B i punti di intersezione della circonferenza con l'asse delle ascisse, determina la parabola con vertice in C e passante da A e l'inclinazione della tangente alla parabola nel punto B.

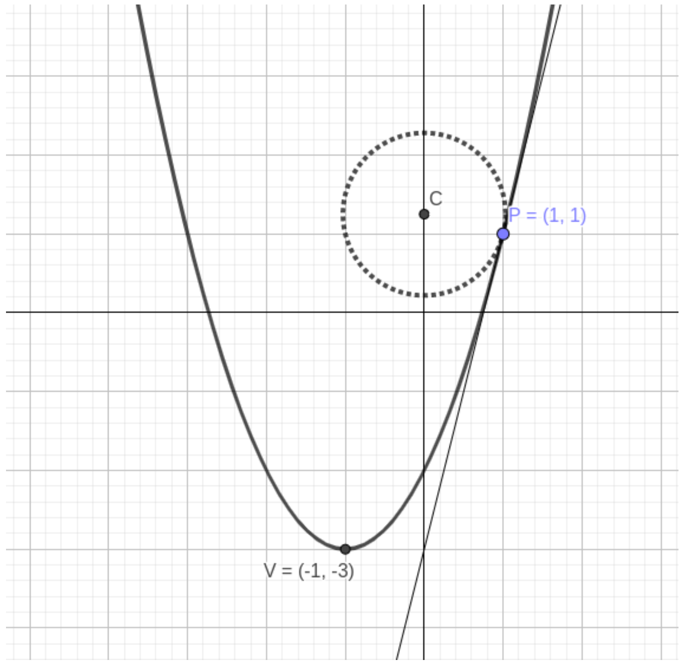
(161) Data la parabola di vertice V e passante dal punto P, come in figura, si determini il centro e l'equazione della circonferenza tangente in P alla parabola (ovvero che condivide con la parabola la retta tangente in P) ed il centro sull'asse delle ordinate.



(162) Determina la parabola con vertice in $V(2,1)$ e passante dall'origine del sistema di riferimento. La corda con estremi nei punti di intersezione della parabola con l'asse delle ascisse è il diametro di una circonferenza di cui si chiede l'equazione analitica. Giustifica il fatto che la tangente nell'origine alla parabola non coincide con la tangente alla circonferenza nell'origine.

(163) Data la parabola di vertice V e passante dal punto P, come in figura, si determini il centro e l'equazione della circonferenza tangente in P alla parabola (ovvero che condivide con la parabola la retta tangente in P) ed il centro sull'asse delle

ordinate.

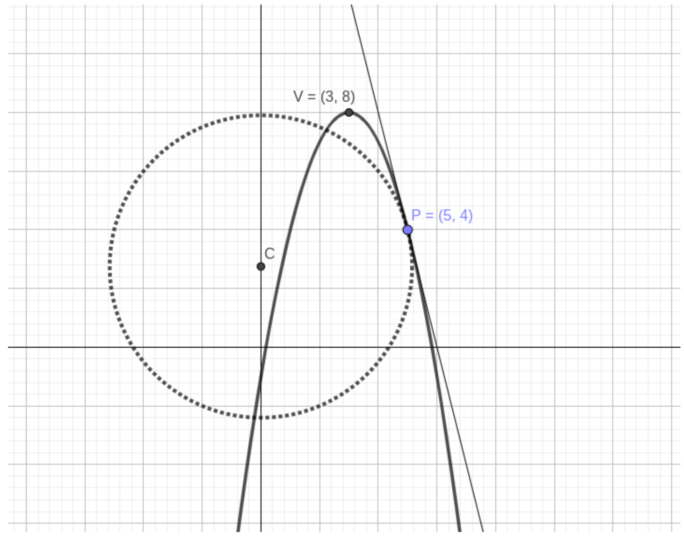


(164) La parabola di equazione $y = 2x^2 - 4x + 1$ ha come tangente nel suo punto di ascissa 1 la retta r. Tale retta, a sua volta è tangente alla circonferenza con centro nel vertice della parabola. Si chiede di determinare le equazioni della retta e della circonferenza, nonché disegnare il tutto in un opportuno sistema di riferimento.

(165) Data la parabola di vertice V e passante dal punto P, come in figura, si determini il centro e l'equazione della circonferenza tangente in P alla parabola (ovvero che condivide con la parabola la retta tangente in P) ed il centro sull'asse delle ordinate.

(166) Due circonferenze si incontrano nei punti A e B. La prima ha centro in $C_1(3, 2)$ e la seconda nel punto $C_2(3, -3)$. I raggi sono rispettivamente $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$. Determinare la retta AB e le parabole con vertici nei centri delle circonferenze e passanti per A (e B).

(167) Si consideri la circonferenza di equazione $x^2+y^2-4x+2y-4 = 0$ e, dopo averla rappresentata nel piano cartesiano, si determini la sua tangente nel punto di intersezione con il semiasse positivo delle ascisse. Si scriva, infine, l'equazione della parabola con vertice nel centro della circonferenza e passante dall'origine del sistema di riferimento.



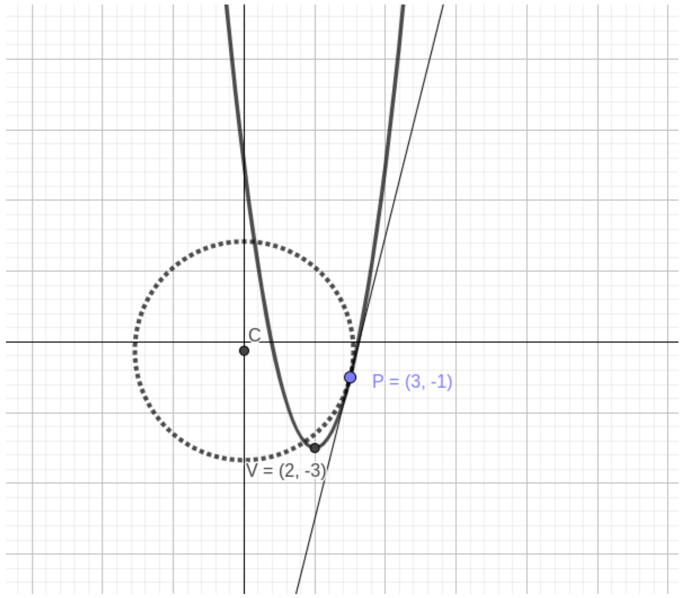
(168) La parabola con fuoco nel punto $F(3,2)$ e vertice $V(3,-1)$ ha la retta direttrice che è anche una tangente alla circonferenza con centro in $C(3,4)$. Oltre le equazioni delle curve e le rappresentazioni grafiche, si chiede di determinare i punti di intersezione della circonferenza con l'asse delle ascisse.

(169) Una circonferenza ed un parabola hanno nel punto $P(3,5)$ il centro ed il vertice rispettivamente. Sapendo che la parabola passa per il punto $A(1,-2)$ e che la sua retta direttrice è tangente alla circonferenza nel punto T, si chiede di determinare l'equazione della circonferenza e l'area del triangolo formato da A, P e dal punto di tangenza T.

(170) Due circonferenze si incontrano nei punti A e B. La prima ha centro in $C_1(0,2)$ e la seconda nel punto $C_2(0,-4)$. I raggi sono rispettivamente $r_1 = 3$ e $r_2 = 5$. Determinare la retta AB e le parabole con vertici nei centri delle ciconferenze e passanti per A (e B).

(171) Due circonferenze si incontrano nei punti A e B. La prima ha centro in $C_1(-1,3)$ e la seconda nel punto $C_2(-1,-3)$. I raggi sono rispettivamente $r_1 = 4$ e $r_2 = 5$. Determinare la retta AB e le parabole con vertici nei centri delle circonferenze e passanti per A (e B).

(172) Data la parabola di vertice V e passante dal punto P, come in figura, si determini il centro e l'equazione della circonferenza tangente in P alla parabola (ovvero che condivide con la parabola la retta tangente in P) ed il centro sull'asse delle ordinate.



(173) Due circonferenze si incontrano nei punti A e B. La prima ha centro in $C_1(0,5)$ e la seconda nel punto $C_2(0,1)$. I raggi sono rispettivamente $r_1 = 3$ e $r_2 = 3$. Determinare la retta AB e le parabole con vertici nei centri delle circonferenze e passanti per A (e B).

(174) Due circonferenze si incontrano nei punti A e B. La prima ha centro in $C_1(2,3)$ e la seconda nel punto $C_2(2,-1)$. I raggi sono rispettivamente $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$. Determinare la retta AB e le parabole con vertici nei centri delle circonferenze e passanti per A (e B).

(175) Due circonferenze si incontrano nei punti A e B. La prima ha centro in $C_1(3,3)$ e la seconda nel punto $C_2(3,1)$. I raggi sono rispettivamente $r_1 = 3$ e $r_2 = 2$. Determinare la retta AB e le parabole con vertici nei centri delle circonferenze e passanti per A (e B).

(176) Circonferenza e parabola hanno, rispettivamente, il centro ed il vertice nel punto $A(3,2)$. Sapendo che la parabola passa per l'origine del sistema di riferimento e la sua retta direttrice è tangente alla circonferenza, determinare le equazioni sia della parabola, sia della circonferenza.

(177) La parabola di equazione $y = 2x^2+4x-6$ interseca l'asse delle ascisse in due punti, estremi del diametro di una circonferenza di cui si chiede l'equazione. Determinare le rette tangenti alla circonferenza che passano per il vertice della parabola (se ci sono).

(178) È data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$. Sapendo che una parabola ha vertice coincidente con il centro della circonferenza e passa per l'origine del sistema di coordinate, determinarne la tangente nei suoi punti d'intersezione con l'asse delle ascisse e verificare che l'intersezione tra le due rette tangenti è un punto allineato in verticale con il centro della circonferenza.

(179) Trovare la circonferenza che ha come diametro il segmento i cui estremi sono le intersezioni della parabola $y = x^2 - 4x + 4$ con i due assi cartesiani. Determina le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza, agli estremi di tale diametro.

(180) Trovare l'equazione della parabola con vertice in $(3, -2)$ e passante per $P(1, 0)$. Con centro nell'altro punto di intersezione della parabola con l'asse delle ascisse, tracciare una circonferenza che è tangente alla retta tangente, in P, alla parabola e determinare il punto di tangenza tra tale retta e la circonferenza stessa.

(181) Una parabola ha fuoco nel punto $(3, 3)$ e vertice nel punto $(3, 1)$. Dopo aver determinato l'equazione della parabola e l'equazione della retta tangente nel punto d'intersezione della parabola con l'asse delle ordinate, si scriva l'equazione della circonferenza centrata nell'origine del sistema di coordinate e tangente alla retta tangente alla parabola testé menzionata.

(182) Una parabola ed una circonferenza hanno vertice e centro rispettivamente nei punti $V(-2, 1)$ e $C(3, 2)$. Sapendo che la circonferenza passa per il vertice della parabola, mentre la parabola passa per il centro della circonferenza, determinare le equazioni delle due curve. Determinare infine l'equazione della retta tangente in V alla circonferenza.

(183) Determinare le coordinate dei punti comuni alla parabola passante per $(0, 1)$, $(1, -3)$ e $(-1, 9)$, ed alla retta $3x - y - 8 = 0$. Scrivere poi l'equazione della circonferenza che ha per diametro la corda intercettata dalla retta sulla parabola e trovare le ulteriori intersezioni della circonferenza con la parabola.

(184) Scrivere l'equazione di una circonferenza che passa dall'origine del sistema di riferimento, dal punto $(-1, 1)$ e che stacca sulla retta $y = -x + 2$ una corda lunga $2\sqrt{2}$ unità. Si determini poi, della parabola con vertice nel punto medio della corda e passante per l'origine del sistema di riferimento, l'equazione della retta tangente all'origine.

(185) Scrivere le equazioni delle circonferenze passanti per $A(-3, 2)$,

tangenti all'asse delle ascisse ed aventi il centro sulla retta di equazione $r : 2x - 3y + 2 = 0$. Qual'è l'equazione della parabola che passi per l'origine del sistema di riferimento e sia tangente alla retta r nel centro della circonferenza?

(186) Dal punto $P(5, 0)$ condurre le tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$ e si trovino i punti di tangenza A e B. Verificare che le tangenti sono perpendicolari tra loro; calcolare perimetro ed area del quadrilatero $CAPB$ essendo C il centro della circonferenza. Scrivere infine l'equazione di una tra le parabole che abbiano il vertice in uno dei vertici di $CAPB$ e che passi dal vertice opposto del quadrilatero.

(187) La diagonale di un quadrato $ABCD$ ha per estremi i punti $(-2, 8)$ e $(2, 4)$. Dopo aver determinato le coordinate degli altri due vertici, si scrivano le equazioni delle circonferenze inscritta e circoscritta al quadrato e l'equazione della parabola con vertice nel punto d'intersezione delle due diagonali e passate dal primo vertice dato.

(188) Data la parabola passante per $A(2, 4)$ e di vertice $V(0, 6)$, inscrivere nel segmento parabolico, delimitato dalla parabola e dall'asse delle ascisse, un quadrato con un lato sull'asse delle ascisse. Poi, dentro il quadrato, inscrivere una circonferenza e determinarne l'equazione.

Relativi al Capitolo 7

Sulla Goniometria.

(189) Dedurre, dal grafico delle funzioni goniometriche elementari, i grafici delle seguenti funzioni:

i.
$$y = \sin(2x).$$

ii.
$$y = \cos(2x - \pi).$$

iii.
$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

iv.
$$y = 2 \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

v.
$$y = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{4}\,x + \frac{3}{2}\,\pi\right).$$

(190) Esprimere in funzione di solo $\sin(x)$ la seguente espressione goniometrica:

$$\sin^2(x) + 2\cos^2(x) + 3\tan^2(x).$$

(191) Idem esercizio precedente per l'espressione:

$$\sec(x) \cdot \left(\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(2x)\right) + \csc(x).$$

(192) Calcola il valore delle seguenti espressioni goniometriche:

i. Considerando gli angoli in gradi:

$$\sin(30) + \cos(60) - 5.$$

ii. Considerando gli angoli in gradi:

$$\sin(60) + \sqrt{3}\sin(30) - \sqrt{3}.$$

iii. Considerando gli angoli in gradi:

$$2\,\sin(30) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(60) + 1.$$

iv. Considerando gli angoli in gradi:

$$\sqrt{2}\,\sin(45) + \frac{1}{2}\,\cos(45) - 3.$$

v. Considerando gli angoli in gradi:

$$\frac{\sin(90) - \sqrt{3}\,\cos(180) + 3\,\cos(90)}{a + \sqrt{3}\,\cos(30)}.$$

vi. Considerando gli angoli in radianti:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos(2\pi) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3}{2}\,\pi\right).$$

vii. Considerando gli angoli in radianti:

$$\frac{2\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}}.$$

viii. Considerando gli angoli in radianti:

$$\frac{\frac{3}{2}\cos(\pi) - \frac{2}{5}\sin(\pi) + \frac{11}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{6}\right)}.$$

ix. Considerando gli angoli in radianti:

$$\frac{\tan(\pi) - 2\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{3}{2}\,\pi\right)}{\cot\left(\frac{\pi}{6}\right)\,\cot\left(\frac{\pi}{3}\right)\,\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)}.$$

x. Considerando gli angoli in radianti:

$$\frac{\sin(2\,\pi) - 2\,\cos(\pi)}{5\,\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4\,\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}.$$

(193) Sfruttando gli archi associati, semplifica le seguenti espressioni:

i.
$$\sin(\pi - x)\,\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(2, \pi - x)\,\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

ii.
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\,\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi - x)\,\cos(2\,\pi - x).$$

iii.
$$\frac{\tan\left(\frac{3}{2} + x\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cot(2\,\pi - x)}{\tan(\pi + x)}.$$

(194) Dopo aver ridotto al primo quadrante, dire qual è il valore delle seguenti funzioni:

i.
$$\sin(390)$$

ii.
$$\sin(412)$$

iii.
$$\cos(405)$$

iv.
$$\cos(750)$$

v.
$$\cos(210)$$

vi.
$$\sin(150).$$

(195) Risolvere le seguenti equazioni goniometriche elementari:

i.
$$\sin(x) = \frac{1}{2}.$$

ii.
$$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

iii.
$$3\,\tan(x) = \sqrt{3}.$$

iv.
$$\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

v.
$$\sqrt{2}\,\cos(x) + 1 = 0.$$

(196) Risolvere le equazioni sfruttando gli archi associati:

i.
$$\sin(x + 30) = \sin(135 + 2x).$$

ii.
$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin(2x).$$

iii.
$$\sin(4x + 3\,\pi) = \sin(4x - \pi).$$

iv.
$$\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10}\right).$$

v.
$$\sin(x + 10) = \sin(36 - x).$$

vi.
$$\cos(3x + 15) = \cos(x - 75).$$

vii.
$$\cos\left(5x - \frac{2}{9}\,\pi\right) = \cos(\left(x + \frac{2}{3}\,\pi\right).$$

viii.
$$\cos\left(7x - \frac{2}{9}\,\pi\right) = \cos\left(x + \frac{5}{18}\,\pi\right).$$

ix.
$$\cos(2x - 15) = \cos(x - 45).$$

x.
$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(3x - \frac{\pi}{3}).$$

xi.
$$\sin(x) = \cos(x - 30).$$

xii.
$$\sin(3x + 2) = \cos(50 - x).$$

xiii.
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right).$$

xiv.
$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right).$$

xv.
$$\sin(2x - 30) = \cos(x - 15).$$

(197) Risolvere le seguenti equazioni goniometriche:

i.
$$\cos(x) - \sin(x) \cdot \tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

ii.
$$2\left(\sin^4(x) - \cos^4(x)\right) = 1.$$

iii.
$$\sin(x + 60) + \cos(x + 60) = 1.$$

iv.
$$\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2\ \tan(x) = \sqrt{3}.$$

v.
$$4\left(\sin(x) - 2\cos(x)\right)^2 = 13 - 8\ \sin(2x).$$

vi.
$$\sqrt{3}\sin(x) - \cos(x) = 0.$$

vii.
$$(2 + \sqrt{2})\ \sin(x) - \sqrt{2}\ \cos(x) = 0.$$

viii.
$$\sin(x) + \cos(x) - \sqrt{2} = 0.$$

ix.
$$\sqrt{3}\ \sin(x) + \cos(x) - 1 = 0.$$

x.
$$6\cos^2(x) + 190\cos(x) - 11 = 0.$$

xi.
$$\sin^2(x) + 4\sin(x) - 21 = 0.$$

xii.
$$4\sin^2(x) + 4\sin(x) + 1 = 0.$$

xiii.
$$5\cos^2(x) - 2\sqrt{6}\ \cos(x) + 1 = 0.$$

xiv.
$$2\sin^2(x) - 5\sin(x)\cos(x) + 3\cos^2(x) = 0.$$

xv.
$$3\sin^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) - \cos^2(x) = 0.$$

Sulla Trigonometria.

(198) Dall'inizio di una salita, lunga 100 metri, con pendio uniforme ed angolo di inclinazione di 12 gradi, una torre è vista sotto un angolo di 48 gradi. Calcolare l'altezza della torre, sapendo che il piede della torre è in cima alla salita.

(199) Una persona posta sulla riva di un fiume, vede sotto un angolo di 60 gradi un albero piantato sull'argine opposto e se si allontana di 40 metri, l'angolo si riduce a 30 grafi. Quanto è alto l'albero e quanto è largo il fiume, sapendo che la base dell'albero ed il punto di osservazione sono sullo stesso piano orizzontale?

(200) Calcolare l'altezza di un aereo sapendo che esso si trova verticalmente sopra un punto A, che a terra si vedono altri due punti B e C allineati con A distanti tra loro 2 chilometri (= d(B, C)) e che l'elevazione angolare da C è la metà di quella da B ed un terzo di quella da A.

(201) Due osservatori sistemati a livello del mare a 1,2 chilometri di distanza tra loro, osservano passare un aeroplano nell'istante in cui attraversa il piano verticale passante per la loro congiungente. Essi trovano che da un lato l'angolo di elevazione è di 78 gradi e dall'altro 75 gradi. Dire a quale altezza si trova l'aereo.

(202) Calcolare l'altezza di una torre, la cui base sia accessibile, sapendo che l'osservatore si trova a 72 metri dalla base (in orizzontale), che l'angolo di elevazione è di 43 gradi, mentre il goniometro è posto a 1,10 metri di altezza.

(203) Una nave, che pesa 850 tonnellate, deve essere trascinata per riparazioni sopra uno scalo inclinato di 15 gradi. Calcolare l'intensità della forza agente parallelamente allo scalo, che si deve applicare per tirare su la nave, supponendo nullo l'attrito (esprimere tale forza in "tonnellate").

(204) Due corpi, di massa $m_1 = 10$ Kg e m_2 ignota, sono vincolati l'uno all'altro per mezzo di una fune e si trovano in equilibrio su due piani inclinati contigui. Sapendo che il piano su cui è posto m_1 è inclinato di 33 gradi, mentre l'altro piano ha un'inclinazione di 40 gradi, determinare la massa di m_2.

(205) In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume, è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 mt. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a 18^o e 24^o. Determina la

larghezza del fiume in quel punto.

(206) Un fotografo naturalista individua una rara specie di uccello appollaiata su un albero spinoso. L'angolo di elevazione è di 14^o ed il telemetro dell'apparecchio fotografico indica che tra l'uccello e l'obiettivo vi è una distanza di 103 mt. Per fotografare meglio l'uccello, il naturalista avanza lentamente, sino ad arrivare ad un punto per cui l'angolo di elevazione è di 20^o. A che distanza si trova ora l'uccello dall'obiettivo del fotografo?

(207) Due corridori partono, mantenendo la stessa velocità costante, dal medesimo punto C e seguono due diversi sentieri rettilinei, che portano a due punti A e B allineati lungo il tracciato rettilineo di una autostrada. Il primo podista raggiunge il punto A dopo 70 min. di corsa, mentre il secondo arriva in B dopo un certo intervallo di tempo (che non ti dico!). Sapendo che l'angolo CAB ha ampiezza 105^o e che l'angolo CBA misura 50^o, calcola tu quanto tempo ha impiegato il secondo corridore per percorrere il tratto CB.

(208) Un radioamatore trasmette illegalmente con un impianto CB (il cosiddetto "Baracchino") da un punto C. Due poliziotti tengono le trasmissioni sotto sorveglianza, disponendosi in due punti A e B, distanti 3,8 Km tra di loro. Da queste due stazioni di sorveglianza, utilizzando un radiogoniometro, essi determinano le seguenti misure angolari: CAB è un angolo di $40,1^o$ e CBA è di $31,8^o$. A che distanza dal punto A si trova l'impianto fuorilegge?

(209) Mentre corre con una velocità costante attraverso il deserto, montando il suo fido cammello Clyde, Lawrence vede la cima di una grande palma. Pensando che la palma debba trovarsi per forza in un'oasi, egli dirige, senza indugio, direttamente verso l'albero. Al primo avvistamento la cima della palma si presentava con un angolo di elevazione di 4^o; venti minuti più tardi, l'angolo di elevazione misura 9^o. Quanti minuti sono ancora necessari a Lawrence per raggiungere l'oasi?

(210) Un paracadutista viene seguito da terra da due giudici di gara, distanti tra loro 5 Km, i quali misurano, ad un certo istante, due angoli di elevazione pari a $26,5^o$ e $18,2^o$. Supponendo che tanto i due giudici, quanto il paracadutista, giacciono nello stesso piano verticale, a che altezza rispetto al suolo si trova l'atleta quando si sono eseguite le due misurazioni?

(211) Si vuole installare su una terrazza di Roma un pannello solare quadrato, con il lato lungo 3 metri. I costruttori raccomandano di installare il pannello in modo che formi con il piano

orizzontale un angolo di 10 gradi inferiore a quello della latitudine del luogo (trovandosi Roma alla latitudine di 41 gradi, il pannello dovrà essere inclinato di ...?). A che altezza dal pavimento della terrazza arriverà la sommità del pannello ?

(212) Dalla cima di una scogliera alta 50 metri si vede una nave sotto un angolo di 20 gradi rispetto all'orizzontale. Quanto dista la nave dalla scogliera?

(213) Un ponte lungo 80 metri attraversa un fiume formando un angolo di 50 gradi con le sponde; qual è la larghezza del fiume?

(214) Abbiamo un tavolo lungo 1.50 metri, largo 0.85 metri, e alto 0.75 metri. Vogliamo illuminare il tavolo con un faretto appeso al soffitto. L'apertura angolare del fascio luminoso proiettato dal faretto è di 50 gradi. A quale altezza dal tavolo occorre porre il faretto affinché non ci siano parti del tavolo in ombra?

(215) Un calciatore sta per battere un rigore. Sapendo che la larghezza della porta è di 7.32 metri e che la distanza del dischetto dalla porta è di 11 metri, qual è l'ampiezza dell'angolo sul piano orizzontale entro cui il calciatore deve indirizzare la palla per sperare di segnare?

(216) Una torre è alta 60 metri ed è posta alla distanza di 45 metri dall'origine di un canale. Calcolare la larghezza del canale sapendo che è vista, dalla cima della torre, sotto un angolo di 20 gradi.

(217) Una statua AB poggia su di un piedistallo CA. Calcolare l'altezza della cima della statua, dopo aver considerato una "base" orizzontale DE lunga 24 metri, con D ed E allineati con C e D più vicino a C, ed aver misurato i seguenti angoli: $C\hat{D}B = 75$ gradi, $C\hat{D}A = 30$ gradi e $C\hat{E}B$ di 45 gradi.

(218) Tra due costruzioni A e B scorre un canale; calcolare la loro distanza sapendo che la prima, A, dista dall'argine più vicino 500 metri e che l'altra, B, è posta sul secondo argine. Da un punto O, scelto come punto di osservazione, i due argini sono visti sotto un angolo di 20 gradi e le misure degli angoli $B\hat{A}O$ e $A\hat{B}O$ sono rispettivamente 68 e 28 gradi.

(219) Un palazzo sorge sull'argine di un canale ed un osservatore, posto sull'altra sponda, vede il palazzo sotto un angolo di 59 gradi; se si allontana dal palazzo di 38 metri, lo vede sotto un angolo di 29 gradi.Calcola l'altezza del palazzo, sapendo che l'operatore si muove sullo stesso piano della base del palazzo.

(220) Calcola la distanza tra due punti inaccessibili X ed Y sapendo che la distanza tra due punti A e B, che servono come "base" di osservazione, è di 100 metri e che si misurano si seguenti angoli: $X\hat{A}B = 120$ gradi; $X\hat{A}Y = 60$ gradi, $A\hat{B}X = 15$ gradi e $A\hat{B}Y = 45$ gradi.

(221) Calcola la distanza tra due promontori A e B sapendo che, da due navi C e D distanti tra loro 2 chilometri, sono fatte le seguenti misurazioni: $A\hat{C}D = 88$ gradi; $B\hat{C}D = 57$ gradi, $B\hat{D}C = 60$ gradi e $C\hat{D}A = 14$ gradi.

(222) Calcolare l'altezza di una torre AB, con il piede accessibile, sapendo che la base AC misura 72 metri, l'angolo di elevazione è di 43 gradi e che l'altezza a cui è posto il goniometro è di 1,10 metri.

(223) La differenza tra due ombre, proiettate da una torre AB, sul piano orizzontale e passante per A, quando il sole ha le altezze sull'orizzonte di 32 gradi e 37 gradi, rispettivamente, è di 5,5 metri. Calcola l'altezza della torre.

(224) Da un osservatorio posto a 33,4 metri sul livello del mare, si osservano due navi poste sullo stesso piano verticale passante per l'osservatorio. Si misurano gli angoli di depressione pari a 10 gradi e 44 gradi rispettivamente. Si calcoli la distanza tra le due navi.

(225) Calcolare l'altezza di un campanile sapendo che per due osservatori, posti sullo stesso piano del piede del campanile, ad una distanza di 30 metri l'un dall'altro e posti da parti opposte rispetto alla torre stessa, gli angoli di elevazioni risultano rispettivamente di 75 gradi e 82 gradi.

Relativi al Capitolo 8

Sulle Progressioni.

(226) In una progressione geometrica di termini positivi, ogni termine è uguale alla somma dei due termini che lo seguono, quanto vale la ragione?

[Annual High School Mathematics Examination 1953]

(227) La somma dei primi 50 termini di una progressione aritmetica è 200, la somma dei successivi 50 termini è 2700. Quanto vale il primo termine?

[Annual High School Mathematics Examination 1961]

(228) Trovare due numeri a e b in modo tale che 3, a e b sia una progressione geometrica, mentre a, b e 9 una progressione aritmetica.

[Annual High School Mathematics Examination 1972]

(229) In una progressione geometrica la differenza tra il quinto ed il quarto termine è 576, mentre la differenza tra il secondo ed il primo termine è 9. Quanto vale la somma dei primi cinque termini?

[Annual High School Mathematics Examination 1974]

(230) I numeri a, x, b e $2x$ sono in progressione aritmetica. Quanto vale il rapporto $\frac{a}{b}$?

[Annual High School Mathematics Examination 1987]

(231) La somma di 49 interi consecutivi è 74. Qual è il primo di essi?

[A & M University High School Mathematics Contest 2006]

(232) Sia S la somma dei primi n termini della progressione $8, 12, 16, \ldots$ e sia T la somma dei primi n termini della progressione $17, 19, 21, \ldots$. Per quali valori di n si ha $S = T$?

[A & M University High School Mathematics Contest 2006]

(233) In una progressione geometrica la somma dei primi due termini è 7, mentre la somma dei primi sei termini è 91; quanto vale la somma dei primi quattro termini?

[Annual High School Mathematics Examination 1981]

(234) Se x, $2x + 2$, e $3x + 3$ sono termini non-nulli in progressione geometrica, qual è il quarto termine?

[A & M University High School Mathematics Contest 2001]

(235) Una palla cade da una altezza di nove metri e rimbalza. A ogni rimbalzo da una altezza h, la palla risale a una altezza di $\frac{2}{3}h$. Trovare lo spazio percorso dalla palla nel suo moto di ascesa e discesa.

(236) Un'altalena per bambini, dopo la prima leggera spinta, inizia ad oscillare perdendo ad ogni passaggio l'1% di energia. Dopo cinque oscillazioni, fatta "uno" l'energia iniziale, quanto energia ha disperso? Quanta energia residua è rimasta all'inizio della settima oscillazione?

(237) Sette vecchie vanno a Roma, ognuna ha sette muli, ogni mulo ha sette sacchi, in ogni sacco ci sono sette pani, ogni pane ha sette coltelli, ogni coltello sette guaine. Si chiede la somma di tutti.

[By Leonardo Pisano, detto Fibonacci]

(238) Il **triangolo di Sierpinski**, si ottiene partendo da un triangolo equilatero e costruendo triangoli equilateri, al suo interno, i cui vertici sono punti medi dei lati precedenti del triangolo precedente. Supponiamo di colorare ogni nuovo triangolo ottenuto, iterando la procedura più volte. Dopo cinque passi quanta parte del triangolo originale è non colorata?

(239) La curva **"fiocco di neve" di von Koch**, si ottiene a partire da un segmento lungo una unità, che viene diviso in 3 parti uguali; quindi si elimina la parte centrale e si sostituisce con due segmenti che formano, con il segmento eliminato, un triangolo equilatero. Si procede in tal guisa su ciascuno dei segmenti ottenuti dopo il primo passaggio. Se continuiamo questa costruzione per altri 7 passi, quanto sarà lunga la spezzata finale?

(240) Il **tappeto di Sierpinski** si ottiene a partire da un quadrato, che viene diviso in 9 quadrati uguali, poscia eliminando il quadrato centrale, e così via. Se continuiamo questa costruzione per un totale di 8 passi, quanta sarà l'area eliminata?

(241) Nella fase di lavaggio di una lavatrice sono immessi $90\,g$ di detersivo. In ogni risciacquo viene eliminato il 96% del detersivo presente in quel momento. Quanti risciacqui sono necessari affinché rimanga meno di $0.1\,g$ di detersivo?

(242) In un vivaio ogni anno muore il 25% circa delle piante presenti. Da quante nuove piantine bisogna partire per avere 300 piante di 5 anni?

(243) Una colonia di batteri raddoppia ogni 10 giorni. Se dopo 10 settimane abbiamo 20 milioni di batteri, quanti ne avevamo all'inizio?

(244) Ho una sostanza con delle impurità ed uso un procedimento che ad ogni applicazione elimina il 30% delle impurità. Se uso il procedimento 5 volte, qual è la percentuale di impurità eliminate?

(245) Tenendo conto che il tempo di dimezzamento del ^{14}C è di 5730 anni, determinare con ragionevole approssimazione quale età ha un reperto fossile la cui concentrazione di ^{14}C è il 3% di quella originaria.

(246) La costruzione di una diga su un torrente ha dato luogo alla formazione di un laghetto della capienza di circa $12000\,m^3$ d'acqua. Il torrente sbarrato immette mediamente nel bacino $200\,m^3$ di detriti l'anno. Determinare la capienza del laghetto

nei primi 20 anni mediante una formula. Dopo quanti anni la capienza del laghetto sarà ridotta alla metà di quella iniziale?

Sulle esponenziali e logaritmiche.

(247) Determina il valore dei seguenti logaritmi:

$$\log_2(16); \qquad \log_4(2); \qquad \log_{\frac{1}{2}}(8); \qquad \log_3\left(\frac{1}{9}\right); \qquad \log_9(27).$$

(248) Determina la base opportuna acciocché si verifichi l'uguaglianza:

$$\log_x(8) = 3; \qquad \log_x(121) = 2; \qquad \log_x(16) = -4; \qquad \log_x\left(\frac{4}{9}\right) = -4.$$

(249) Dire per quale valore di x si verificano le seguenti uguaglianze:

i.
$$\log(x) = \log(a) + 2\ \log(b)$$

ii.
$$\log(x) = 2\log(3) + \frac{1}{3}\ \log(a) - 3\log(b)$$

iii.
$$\log_3(x) = \frac{1}{2}\log_x(a) - 2\log_3(b) + 1$$

iv.
$$\log(x) = \log(a+b) - 2\log(a-b) - \log(a).$$

(250) Calcola il valore delle seguenti espressioni:

i.
$$\log_2\left(\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}}\right)$$

ii.
$$\log_6(9) + \log_6(48) + \log_6(3)$$

iii.
$$2\log(5) + 3\log(2) - \log(20)$$

iv.
$$\log\frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

v.
$$\log_{27}(\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3})$$

(251) Risolvere le seguenti equazioni esponenziali:

i.
$$3^{x-7}\cdot 3^x = 3$$

ii.
$$10^{x^2-5} = \frac{1}{10}$$
iii.
$$3^x \cdot \sqrt[3]{9} = \frac{\sqrt{3}}{3^{2x-1}}$$
iv.
$$\frac{9^{2x}}{3\sqrt{3^x}} = 1$$
v.
$$3^{x+1} + 3^{x-1} = 2 \cdot 5^x$$
vi.
$$3 \cdot 2^{x-2} - 2^x + 7^{x-2} = 0$$
vii.
$$\frac{2^{x+3} - 3^{x+1}}{5 \cdot 3^x - 2^x} = 1$$
viii.
$$5^x + 1 = 6 \cdot 5^{-x}$$
ix.
$$3^x - 6 = 3^{3-x}$$
x.
$$\frac{3^{\sqrt{x^2+16}}}{3^{\sqrt{6x+7}}} = \frac{27}{3^x}$$

(252) Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche:

i.
$$\ln(8 - 2^x) + \ln(7) = \ln(12 + 2^{6-x})$$
ii.
$$\ln(3^x - 2) + \ln(3^x - 23) = 2$$
iii.
$$\log(3^x + 1) + x\ln(3) = 2\ln(1 - 3^x)$$
iv.
$$\ln(2^{x+1} + 4^x) + 2\ln(2) = 1 + \ln(32)$$
v.
$$\log_3(\sqrt{5^x - 1}) - \log_3(\sqrt{5^x - 8}) = 4\log_9(2) - 1$$

(253) Risolvi le seguenti disequazioni:

i.
$$\log(x + 2) > 1$$
ii.
$$\log(2x - 5) > \log(4 - x)$$

iii.
$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-3}{x^2-25}\right) > 0$$
iv.
$$\frac{2-\log_3(x+1)}{\log_5(8-x)-1} > 0$$
v.
$$\log_4(x+3) > \log_2(x-5)$$
vi.
$$2^{2x} - 8\cdot 2^x > 0$$
vii.
$$3^{2x+1} - 5\cdot 3^x \leqslant 0$$
viii.
$$\frac{5^x-10}{5^x-5} > 0$$
ix.
$$\frac{2^x-4^x-1}{3^{-x}-25\cdot 3^x} < 0$$
x.
$$5^x + 3^{x+1} < \sqrt{9^{x+2}}$$

Relativi al Capitolo 9

Sulla topologia insiemistica.

(254) Descrivi dal punto di vista topologico i seguenti insiemi [3] :

i.
$$S = (-\infty, 3] \cup (4,5) \cup \{10, 100\}.$$
ii.
$$S = (-1,2) \cup [3,4) \cup \{10\} \cup [20, +\infty).$$
iii.
$$S = \{-100\}) \cup (0,10) \cup [11,12).$$
iv.
$$S = (-\infty, 0) \cup \{1,2,3\} \cup [4,5].$$
v.
$$S = (-\infty, 1] \cup (4,5) \cup \{9\} \cup (10, +\infty).$$
vi.
$$S = \{-10,-5\} \cup [0,3) \cup \left\{3 + \frac{n-1}{n+1} : n = 1,2,\dots\right\} \cup (5,10].$$

[3] Ovvero determina, se possibile, la limitatezza (minorante/maggiorante), inf S, sup S, min S, max S, S', $\mathring{S}$, $\bar{S}$ e ∂S .

vii.

$$S=(-\infty,-1]\cup\{1,2\}\cup\left\{4-\frac{n+1}{n-1}:n=2,3,\dots\right\}\cup[5,10).$$

viii.

$$S=\{1,2\}\cup(3,4]\cup\left\{5-\frac{n-2}{n}:n=1,2,\dots\right\}\cup(10,+\infty).$$

ix.

$$S=(-\infty,1]\cup[2,3]\cup\left\{\frac{n+1}{n+2}+4:n=1,2,\dots\right\}\cup\{50,100\}.$$

x.

$$S=\{-1,-3\}\cup(4,5)\cup\left\{10-\frac{n^2-1}{n^2}:n=1,2,\dots\right\}\cup[20,50).$$

Sui limiti di successione numerica.

(255) Si determini il limite delle seguenti successioni:

i.

$$a_n=\frac{\sqrt{n}-n+n^2}{2n^2-n^{\frac{3}{2}}+1}.$$

ii.

$$b_n=\frac{2n\log(n+1)+4n^3-8^{2n-1}}{2^{3n-4}+3^n+4^n+1000}.$$

iii.

$$c_n=\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)^{n-1}.$$

iv.

$$d_n=\sqrt[n]{2^n+3^n}.$$

v.

$$e_n=\frac{2-\sin(n^{10}+3)-4^{2n+1}}{5n^3+4\cdot 16^n-3\cos(n^3-2n)}.$$

vi.

$$f_n=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n}.$$

vii.

$$g_n=\frac{n^6+\log(n)+3^n}{2^n+n^4+\log^5(n)}.$$

viii.

$$h_n=\frac{4n^3+n\sqrt[4]{n^8-4n^2+2n-1}-3\cos(2n^{19})}{3n^2-n\log(n^2+1)+10-n\sqrt[3]{8n^6-4n^4+2n^2}}.$$

ix.
$$i_n = \left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{2n}.$$
x.
$$l_n = \frac{(n^2+1)^n}{n^{2n}}.$$
xi.
$$m_n = \frac{3^{2n+3} - \sqrt{n^2+n+1} - 5^n}{9^{n+1} - 4\sin(10n) + n^9}.$$
xii.
$$o_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{-2n}.$$
xiii.
$$p_n = \frac{2^n + n^2}{3^n + n^3}.$$
xiv.
$$q_n = \frac{\sqrt[3]{27n^3 + 3n^2 - 50n} - 4\log(n^4+3) - \sin(2n)}{3n + 4\sqrt{4n^2+2n-1} + 1}.$$
xv.
$$r_n = (1+3n)^{\frac{1}{2n}}.$$
xvi.
$$s_n = \frac{1+\log(n)}{\sqrt{n} - \log(n)}.$$
xvii.
$$t_n = \frac{\log(n^3+2n) + \sqrt{n^3-4n} + 3^{4n+2}}{9^{2n-1} + 3n^9 + \cos(n^{10}-1)}.$$
xviii.
$$u_n = \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{2n+4}.$$
xix.
$$v_n = \frac{n^2(3^n - 3^{-n})}{4^n + n^2}.$$
xx.
$$w_n = \frac{2^n + 3^n + 4^n - 1}{\sqrt{n^2-n+1} + 4\sin(n^4) + 2^{2n-1}}.$$
xxi.
$$z_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{-n}.$$

Relativi al Capitolo 10

Sul dominio e segno di una funzione reale di variabile reale.

(256) Si determini il C.d.E. ed il segno della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1+\sqrt{4x^2-9}}{x\cdot(x^2-4x+3)}$$

(257) Si determini il C.d.E. ed il segno della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{(9+x^2)(x^2-1)}{1+\sqrt{x^2-6x+8}}$$

(258) i determini il C.d.E. ed il segno della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{3x-\sqrt{x^2+14}}{(x-1)(x^2-4)}$$

(259) Si determini il C.d.E. ed il segno della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{4x^2-3x}{1+\sqrt{2x^2+5x-3}}$$

(260) Si determini il C.d.E. ed il segno della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{(x^3+1)(x-3)}{4-\sqrt{10-x}}$$

(261) Si determini il C.d.E. ed il segno della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4-2x^2}}{x(x^2+1)}$$

(262) Si determini il C.d.E. ed il segno della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{3x\cdot(x^2-2x+1)}$$

(263) Si determini campo di esistenza e segno della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2+7x+12}$$

(264) Si determini campo di esistenza e segno della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1+\sqrt{9-x^2}}{x^2-1}$$

(265) Si determini campo di esistenza e segno della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}+5}{2x^2+5x+2}$$

(266) Si determini campo di esistenza e segno della seguente funzione:
$$f(x) = \frac{4x^2 - 2x - 2}{3 + \sqrt{16 - x^2}}$$

(267) Si determini campo di esistenza e segno della seguente funzione:
$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{4 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

(268) Si determini campo di esistenza e segno della seguente funzione:
$$f(x) = \frac{5 + \sqrt{x^2 - 1}}{5x^2 + 2x - 7}$$

(269) Si determini campo di esistenza e segno della seguente funzione:
$$f(x) = \frac{4x^2 + 4x + 1}{1 + \sqrt{x^2 - 1}}$$

(270) Studiare il segno della seguente funzione:
$$f(x) = \frac{x(x^2 - 4)}{(x^2 + \sqrt{x^2 + 1})(x - 1)}.$$

(271) Studiare il segno della seguente funzione:
$$f(x) = \frac{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}{x^3(x^2 - 9)}.$$

(272) Studiare il segno della seguente funzione:
$$f(x) = \frac{x(x + 1)(x + 2)}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)\sqrt{x^2 - 1}}.$$

(273) Studiare il segno della seguente funzione:
$$f(x) = \frac{(x^4 + x^2 + 1)\sqrt{9 - x^2}}{x(x - 1)(x - 2)}.$$

(274) Studiare il segno della seguente funzione:
$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)x}{(x - 3)(x - 2)\sqrt{x^2 + 2x + 1}}.$$

(275) Studiare il segno della seguente funzione:
$$f(x) = \frac{(2x + 1)(2x + 2)(2x + 3)}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 2x + 5}}.$$

(276) Determina dominio e segno della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{|x-9| \cdot (x^2-1)(x-2)}{(x^2+1)(x^2-4)\sqrt[4]{25-x^2}}.$$

(277) Determina dominio e segno della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{|x+3| \cdot (x-1) \cdot \sqrt{16-x^2}}{(x-1)(x^2+4)}.$$

(278) Determina dominio e segno della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{(x\,|x|+4)(x^2+1)}{(x^2-1)(x^{-}9)\sqrt{x^3+x^2+x}}.$$

(279) Determina dominio e segno della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{3x^2+2|x|-1}{(x+1)(x-3)\sqrt{x^2+x}}.$$

(280) Determina dominio e segno della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{3x\sqrt{x^2+x+5}}{(2x-1)(x+3) \cdot |x-4|}.$$

(281) Determina dominio e segno della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{(4+x)(2-|x+1|)}{(x-2)(x^2+1)\sqrt{16-x^2}}.$$

(282) Determina dominio e segno della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x\,|x|}{(x^2+3)(x-1)\sqrt{8-x^3}}.$$

(283) Determina dominio e segno della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{|x+3| \cdot \sqrt{x^2-4}}{(x-3)(x+4)^2}.$$

(284) Determina dominio e segno della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{|x+1|-x}{(x^2-1)(4-x^2)\sqrt{9-x^2}}.$$

(285) Determina il C.d.E. ed il segno della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{(1+x)(x-2)(x+3)\sqrt{x^2-1}}{(x^2-4) \cdot x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2-2x}}.$$

(286) Determina il C.d.E. ed il segno della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{(x^2+5x)(x+3)}{x+2} \cdot \sqrt[5]{\frac{9+x^2}{9-x^2}}.$$

Sul calcolo dei limiti per funzioni reali di variabile reale.

(287) Calcolare il valore del limite per $x \to +\infty$ della funzione
$$f(x) = \frac{\cos(3x^2) - 2x + \sqrt[3]{x^3 - x - +1} + 2^{4x} + 3 \cdot 3^{4x}}{\ln(x+1) + e^x - 1 + \sqrt{x + x^2 + x^3} - 4^{2x} + 9^{2x+1}}.$$

(288) Calcolare il valore del limite per $x \to 0$ della funzione
$$f(x) = \frac{x^4 + 3x\,(\sin(2x^3) + x\tan(x^2)) - \sqrt{x^{10} + x^{100}}}{x^2\,e^{x^2} - \cos(2x^2) + \sqrt{x^8 + x^{10} + x^{12}} - \ln(1 + 5x^4)}.$$

(289) Calcolare il valore del limite per $x \to +\infty$ della funzione
$$f(x) = \frac{\ln(x^2 + x + 1) - 3\cos(x) + x^{10} - 4^{2x+1}}{e^x - 1 + \sin(3x) + \sqrt{x^3 + x^2 - 1} - 2^x + 3^x - 4 \cdot 2^{2x}}.$$

(290) Calcolare il valore del limite per $x \to 0$ della funzione
$$f(x) = \frac{3x\sin(2x) + x\sqrt[3]{x^3 + 3x^4 + 4x^5} - xe^x + x}{1 - \cos(2x) + 3\ln(1 + 4x^2) - \sin^2(2x)}.$$

(291) Calcolare il valore del limite per $x \to +\infty$ della funzione
$$f(x) = \frac{x + 2x^2 + 3x^3 + 4\cos(x^5 + x^6 + x^7) - 3^x + 2^{2x-1}}{\ln(x+1)^2 - 3\sqrt{x - 2} + 2^x + 3 \cdot 4^{x-1}}.$$

(292) Calcolare il valore del limite per $x \to 0$ della funzione
$$f(x) = \frac{\sin^2(2x^2) + x\tan(x^3 + x^4) - 3x^2\ln(1 + x^2)}{(\sqrt{4x^4 + 2x^2} - x^3)x^4 + 1 - e^{2x^4} + \tan^2(2x^2)}.$$

(293) Calcolare il valore del limite per $x \to +\infty$ della funzione
$$f(x) = \frac{3^x + \ln(x^2 + 1) + 3x\cos(x^3 + 1) - 2^{2x+1}}{e^x + 1 + 2x^3 + 4^{x-2} + \sin(x)}.$$

(294) Calcolare il valore del limite per $x \to 0$ della funzione
$$f(x) = \frac{x\sqrt{x^4 + x^5} - x\cos(x) + xe^{3x^2}}{4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + \ln(1 + x^3) - x\tan(2x^2) + 2x^2e^x}.$$

(295) Calcolare il valore del limite per $x \to +\infty$ della funzione
$$f(x) = \frac{e^{ln(x)} + x\ln(x+1) + x^2\sqrt{x^2 + x + 1}}{2x + \cos(x^{10} - 1) + 3x(\cos(2x) - x^2 + 1)}.$$

(296) Calcolare il valore del limite per $x \to 0$ della funzione
$$f(x) = \frac{2x\sin(x^2) - x^2\tan(3x) + 3\ln(1 + 2x^3)}{x(\cos(2x) - e^{3x^2}) + x^3 - x^5}.$$

(297) Calcolare il valore del limite per $x \to +\infty$ della funzione
$$f(x) = \frac{2x + \sin(x-1) + 3 \cdot 2^{2x-1} + 3^{x+3} + \sqrt{x}}{x^{10} + \ln(e^x - 1) + 9 \cdot 2^{x-1} + 4 \cdot 4^{x-2}}.$$

(298) Calcolare il valore del limite per $x \to 0$ della funzione
$$f(x) = \frac{3\sqrt{x + x^2} - 2\sin(\sqrt{x}) + 2x^5}{\ln(1 + \sqrt{2x}) + e^{\sqrt{x}} - \cos(\sqrt{x}) + 3x^4}.$$

(299) Calcolare il valore del limite per $x \to +\infty$ della funzione
$$f(x) = \frac{3 + \cos(x^2 + x + 1) - \sqrt{x^4 + 1} - 4^x + 3 \cdot 3^{2x}}{\ln(x^{10} + 2x^5 + 1) - \sin(x^4) + 2^{2x+1} + 2 \cdot 9^{x+1}}.$$

(300) Calcolare il valore del limite per $x \to 0$ della funzione
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x\sin(2x) + x\tan(x^2 + x^3) - 3x\sqrt{x^2 + 3x^3}}{\cos(2x) - e^{3x^2} + x\ln(1 + 3x) + 5x^6}.$$

(301)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(2x) + e^{3x^2} - \cos(2x)}{x\ln(1 + 5x) - x\tan(x + 3x^2)}.$$

(302)
$$\lim_{x\to +\infty} x(\ln(x + 1) - \ln(x)).$$

(303)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^6 + 4x^4 - 8x^3} + \sin(3x) - x^4}{\tan(x - 2x^2) + \ln(1 + 4x) - x\cos(x + x^2)}.$$

(304)
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(2x + 3)^3(3x - 2)^2}{x^5 + 5}.$$

(305)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - \cos(4x) - 3\tan(x) + \sin(x^4 + x^2)}{3x\ln(1 + 3x) - x^5 + \sqrt{x^2 + x^3} - x}.$$

(306)
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}.$$

(307)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\tan(3x) - e^{2x} + \cos(4x) + 2x}{\sin^2(x) + 4x\ln(1 + 3x) - x^4}.$$

(308)
$$\lim_{x\to 3} \frac{-2\,x^3 + 9\,x^2 - 7\,x - 6}{x^3 - 2\,x^2 - 5\,x + 6}$$

(309)
$$\lim_{x\to -1} \frac{2\,x^3+9\,x^2+13\,x+6}{x^3-4\,x^2+x+6}$$
(310)
$$\lim_{x\to 2} \frac{2\,x^4-7\,x^3+8\,x^2-7\,x+6}{x^5-x^4-2\,x^3+x^2-x-2}$$
(311)
$$\lim_{x\to -3} \frac{x^3+6\,x^2+11\,x+6}{x^4+x^3-3\,x^2+3\,x-18}$$
(312)
$$\lim_{x\to 1} \frac{3\,x^3-4\,x^2-9\,x+10}{2\,x^3+3\,x^2-3\,x-2}$$

Sulla determinazione del grafico probabile.

(313) Conduci uno studio di funzione al fine di tracciarne il grafico probabile:
$$f(x)=\frac{x(x-1)}{\sqrt{x^4+x^2}}$$
(314) Conduci uno studio di funzione al fine di tracciarne il grafico probabile:
$$f(x)=\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+6x+8}$$
(315) Conduci uno studio di funzione al fine di tracciarne il grafico probabile:
$$f(x)=\frac{(x-1)(x+2)}{x\sqrt{x^2-4}}$$
(316) Conduci uno studio di funzione al fine di tracciarne il grafico probabile:
$$f(x)=\frac{(x-1)\sqrt{x^2+2}}{x^2-3}$$
(317) Conduci uno studio di funzione al fine di tracciarne il grafico probabile:
$$f(x)=\frac{x\sqrt{9-x^2}}{(x+1)(x+2)}$$
(318) Conduci uno studio di funzione al fine di tracciarne il grafico probabile:
$$f(x)=\frac{\sqrt{(x^4-1}}{x(x+3)}$$

(319) Effettua uno studio della funzione al fine di determinarne il grafico probabile:

$$f(x) = \frac{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}{x(x-1)x^2}.$$

(320) Effettua uno studio della funzione al fine di determinarne il grafico probabile:

$$f(x) = \frac{x(x+1)(x+2)}{(x^2-9)\sqrt{x^2+4}}.$$

(321) Effettua uno studio della funzione al fine di determinarne il grafico probabile:

$$f(x) = \frac{(x^3+1)(x-2)}{x^2(x-1)\sqrt{x^2+2}}.$$

(322) Effettua uno studio della funzione al fine di determinarne il grafico probabile:

$$f(x) = \frac{x\sqrt{9+x^2}}{x^2+4x+4}.$$

(323) Effettua uno studio della funzione al fine di determinarne il grafico probabile:

$$f(x) = \frac{2x(x^2-8x+7)}{(x^2-4)\sqrt{2+x^2}}.$$

(324) Effettua uno studio della funzione al fine di determinarne il grafico probabile:

$$f(x) = \frac{3(x-1)\sqrt{x^4+x^2+1}}{x(2x+1)(x-3)}.$$

(325) Determina il grafico probabile della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{|x^2-1|\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}.$$

(326) Determina il grafico probabile della seguente funzione:

$$\frac{(1+x^2)\sqrt{4-x^2}}{|x^2-1|}.$$

(327) Determina il grafico probabile della seguente funzione:

$$\frac{|4x^2-1|\sqrt{x^2-1}}{x^2-9}.$$

(328) Determina il grafico probabile della seguente funzione:

$$\frac{(x^2+3)\sqrt{9-x^2}}{|4-x^2|}.$$

(329) Determina il grafico probabile della seguente funzione:

$$\frac{x^2\sqrt{x^2+2x+1}}{|4x^2-9|}.$$

Sulla continuità delle funzioni.

(330) Determinare i valori dei parametri α e β acciocché la funzione risulti continua (e se hai già studiato la derivabilità, anche derivabile):

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x - 1 & x \geqslant 2 \\ \alpha(x-1)^2 + \beta(x-1)^2 & x < 2 \end{cases}$$

(331) Idem esercizio precedente per:

$$f(x) = \begin{cases} (x-\beta)^3 + 8 & x \geqslant 0 \\ \alpha \sin(x) & x < 0 \end{cases}$$

(332) Idem esercizio precedente per:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2+1}{x+\beta} & x \leqslant 1 \\ \ln(x) + 2 & x > 1 \end{cases}$$

(333) Idem esercizio precedente per:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta\sqrt{x^2+8} & x \leqslant 1 \\ (\beta-1)x + \alpha\ln(x) & x > 1 \end{cases}$$

(334) Idem esercizio precedente per:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-3} + \alpha & x \leqslant 3 \\ \frac{\beta}{x-4} - 2 & x > 3 \wedge x \neq 4 \end{cases}$$

Sul calcolo differenziale e applicazioni.

(335) Calcola la derivata delle funzioni:

$$f(x) = 2x^3+3x^2-4\cos(x)+1 \qquad \text{e} \qquad g(x) = \ln(x)+2\,e^x+2\sin(x)-3.$$

(336) Determinare la derivata prima della funzione

$$f(x) = 3x^5 - 10^5 + \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}} + \frac{3}{x^3} - 5\sin(x) + 4\ln(x).$$

(337) Determinare la derivata prima della funzione
$$f(x) = 4x^2 - \cos(x) + e^x - \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} + 5^4 - \frac{2}{x^2}.$$

(338) Determinare la derivata prima della funzione
$$f(x) = 5\ln(x) + 2\sin(x) - \frac{5}{x^5} + \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}} + 4^{40} - x.$$

(339) Determinare la derivata prima della funzione
$$f(x) = 2e^x + 10^{1000} + \frac{6}{x^6} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 3x^5 + \sin(x).$$

(340) Determinare la derivata prima della funzione
$$f(x) = 4\cos(x) + 3\ln(x) + 2x^7 - \frac{5}{x^3} + 4^{20} + \frac{1}{\sqrt[7]{x^4}}.$$

(341) Determinare la derivata prima della funzione
$$f(x) = e^x + 3\cos(x) + 5^9 - x^9 + \frac{4}{x^6} + \frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}.$$

(342) Determinare la derivata prima della funzione
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[8]{x^3}} + \frac{9}{x^9} + x^9 - 9^9 + 4\cos(x) - 10x^3.$$

(343) Calcola la derivata delle funzioni:
$$f(x) = x^2\,\sin(x) + \sqrt{x} \qquad \text{e} \qquad g(x) = 2x\ln(x) + 3\,(x+1)\cdot(x-2).$$

(344) Calcola la derivata delle funzioni:
$$f(x) = \frac{2x^2+3}{x^2-1} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{x - \cos(x)}{\sin(x)+1}.$$

(345) Calcola la derivata delle funzioni:
$$f(x) = (\cos(x) - 3x^2)^3 \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sqrt{x^2+3x-5}.$$

(346) Determinare la derivata della funzione:
$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right).$$

(347) Determinare la derivata della funzione:
$$f(x) = \ln\left(\frac{1-3x^2}{x+1}\right).$$

(348) Determinare la derivata della funzione:
$$f(x) = \ln\left(\frac{2x^2+x-1}{3-x}\right).$$

(349) Determinare la derivata della funzione:

$$f(x) = \ln\left(\frac{2+3x+4x^2}{1+5x}\right).$$

(350) Determinare la derivata della funzione:

$$f(x) = \ln\left(\frac{4x^2-3}{2x+1}\right).$$

(351) Determinare la derivata della funzione:

$$f(x) = \ln\left(\frac{4-3x-2x^2}{2+3x}\right).$$

(352) Calcola le derivate delle seguenti funzioni, semplificando le espressioni il più possibile:

i.
$$f(x) = (2x+1)^2 \cdot (3x+1)^3$$

ii.
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

iii.
$$f(x) = (4x^2-3x+1)^2$$

iv.
$$f(x) = \sqrt[4]{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$$

(353) Calcola le derivate delle seguenti funzioni, semplificando le espressioni il più possibile:

i.
$$f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)$$

ii.
$$f(x) = \frac{x^3}{x+2x^2}$$

iii.
$$f(x) = (3x+2x^2+1)^3$$

(354) Calcola le derivate delle seguenti funzioni, semplificando le espressioni il più possibile:

i.
$$f(x) = (2x-x^2)^4$$

ii.
$$f(x) = \sqrt[4]{\ln\left(\frac{x}{2x-1}\right)}$$
iii.
$$f(x) = (3-6x)^2 \cdot (2x+4)^3$$
iv.
$$f(x) = \frac{x}{3x^2-1}$$

(355) Calcola le derivate delle seguenti funzioni, semplificando le espressioni il più possibile:

i.
$$f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2-3}$$
ii.
$$f(x) = (1-3x^2)^3$$
iii.
$$f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{1-x}{x^2+1}}\right)$$
iv.
$$f(x) = (4x+1)^3 \cdot (3-2x)^2$$

(356) Calcola le derivate delle seguenti funzioni, semplificando le espressioni il più possibile:

i.
$$f(x) = (x+3)^2 \cdot (3-5x)^3$$
ii.
$$f(x) = \frac{1+x+x^2}{x^2-4x+1}$$
iii.
$$f(x) = (4x^2+3)^2$$
iv.
$$f(x) = \sqrt[4]{\ln\left(\frac{3-x}{x+4}\right)}$$

(357) Calcola le derivate delle seguenti funzioni, semplificando le espressioni il più possibile:

i.
$$f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{4+2x}{x-3}}\right)$$
ii.
$$f(x) = (5-4x)^3 \cdot (3-2x)^2$$

iii.
$$f(x) = \frac{5+x}{x^2+x+1}$$
iv.
$$f(x) = (5x-3x^3)^3$$

(358) Calcola le derivate delle seguenti funzioni, semplificando le espressioni il più possibile:

i.
$$f(x) = (1+2x+3x^2)^2$$
ii.
$$f(x) = \sqrt[4]{\ln\left(\frac{x}{x-5}\right)}$$
iii.
$$f(x) = (4x+1)^2 \cdot (3x+10)^3$$
iv.
$$f(x) = \frac{6-x}{3x^2+2x+4}$$

(359) Calcola le derivate delle seguenti funzioni, semplificando le espressioni il più possibile:

i.
$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{4x^2+2x}$$
ii.
$$f(x) = (4x+3x^3-1)^2$$
iii.
$$f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{5x}{x^2-1}}\right)$$
iv.
$$f(x) = (1+2x)^3 \cdot (2-3x)^2$$

(360) Calcola le derivate delle seguenti funzioni, semplificando le espressioni il più possibile:

i.
$$f(x) = (4x-2)^2 \cdot (3x-1)^3$$
ii.
$$f(x) = \frac{1+x+x^2}{x^4-2x+1}$$
iii.
$$f(x) = (6x+2x^3)^2$$

iv.

$$f(x) = \sqrt[4]{\ln\left(\frac{x-2}{x+4}\right)}$$

item Calcola le derivate delle seguenti funzioni, semplificando le espressioni il più possibile:

i.

$$f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{x-4}{x^2-2x+1}}\right)$$

ii.

$$f(x) = (x+5)^3 \cdot (4-9x)^2$$

iii.

$$f(x) = \frac{4x-3}{2x^2+6x-1}$$

iv.

$$f(x) = (4x+3x^2-2x^3)^4$$

(361) Determinare la retta tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ nel punto di ascissa 3 e rappresentare il tutto in un piano cartesiano,

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1.$$

(362) Determinare la retta tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ nel punto di ascissa 1 e rappresentare il tutto in un piano cartesiano,

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 18x.$$

(363) Determinare la retta tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ nel punto di ascissa 2 e rappresentare il tutto in un piano cartesiano,

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1.$$

(364) Determinare la retta tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ nel punto di ascissa -3 e rappresentare il tutto in un piano cartesiano,

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 1.$$

(365) Determinare la retta tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ nel punto di ascissa 1 e rappresentare il tutto in un piano cartesiano,

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3.$$

(366) Determinare la retta tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ nel punto di ascissa -2 e rappresentare il tutto in un piano cartesiano,

$$f(x) = x^3 + x^2 - 1.$$

(367) Determinare la retta tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ nel punto di ascissa -3 e rappresentare il tutto in un piano cartesiano,

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2.$$

(368) Trova l'equazione della retta tangente nel punto $P(1, 0)$ alla curva generata dalla funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x^3}.$$

(369) Trova l'equazione della retta tangente nel punto $P(1, 1)$ alla curva generata dalla funzione

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{3}{x^2} + x^2.$$

(370) Trova l'equazione della retta tangente nel punto $P(1, 0)$ alla curva generata dalla funzione

$$f(x) = x^3 - 2\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[3]{x^2}.$$

(371) Trova l'equazione della retta tangente nel punto $P(1, 1)$ alla curva generata dalla funzione

$$f(x) = x^2 + \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x^2}.$$

(372) Trova l'equazione della retta tangente nel punto $P(1, 0)$ alla curva generata dalla funzione

$$f(x) = 2x^4 - \sqrt[5]{x^3} - \sqrt{x}.$$

(373) Trova l'equazione della retta tangente nel punto $P(1, 1)$ alla curva generata dalla funzione

$$f(x) = 3x^2 - \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}.$$

(374) Trova l'equazione della retta tangente nel punto $P(1, 0)$ alla curva generata dalla funzione

$$f(x) = \sqrt[6]{x^5} + \sqrt[5]{x^6} - 2.$$

(375) Trovare il punto ξ di cui parla il teorema di Lagrange per la funzione $f(x) = x^2 + 1$ nell'intervallo $[2, 3]$.

(376) Trovare il punto ξ di cui parla il teorema di Lagrange per la funzione $f(x) = 3x^2 - 2x$ nell'intervallo $[1, 3]$.

(377) Trovare il punto ξ di cui parla il teorema di Lagrange per la funzione $f(x) = -x^2 + 3x$ nell'intervallo $[0, 2]$.

(378) Trovare il punto ξ di cui parla il teorema di Lagrange per la funzione $f(x) = -2x^3 + 1$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

(379) Trovare il punto ξ di cui parla il teorema di Lagrange per la funzione $f(x) = -3x^2 + x - 1$ nell'intervallo $[2, 3]$.

(380) Trovare il punto ξ di cui parla il teorema di Lagrange per la funzione $f(x) = -x^2 + +2x + 5$ nell'intervallo $[1, 2]$.

(381) Determinare, utilizzando le tue conoscenze di calcolo differenziale, la retta tangente alla curva di equazione $y = 3x^5 - 4x^3 + 2x - 5$ nel punto di ascissa 1.

(382) Determinare, utilizzando le tue conoscenze di calcolo differenziale, la retta tangente alla curva di equazione $y = -x^4 + 3x^2 + 1$ nel punto di ascissa 2.

(383) Determinare, utilizzando le tue conoscenze di calcolo differenziale, la retta tangente alla curva di equazione $y = 5x^2 - 4x + 3$ nel punto di ascissa 4.

(384) Determinare, utilizzando le tue conoscenze di calcolo differenziale, la retta tangente alla curva di equazione $y = 4x^3 - x^2 + 2x - 5$ nel punto di ascissa -1.

Sullo studio completo di una funzione reale di variabile reale.

(385) Effettua uno studio completo (anche delle concavità!) e disegna il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{(x^2 + 1)^2}{x^3}.$$

(386) Effettua uno studio completo (anche delle concavità!) e disegna il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)^2}{x(x^2 - 3)}.$$

(387) Effettua uno studio completo (anche delle concavità!) e disegna il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x + 4}{x^2 - 4}.$$

(388) Effettua uno studio completo (anche delle concavità!) e disegna il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{2x^2 + 1}.$$

(389) Effettua uno studio completo (anche delle concavità!) e disegna il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}.$$

item Effettua uno studio completo (anche delle concavità!) e disegna il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{3x^2 - x - 4}{x + 2}.$$

(390) Studia la funzione in modo da poterne tracciare il grafico, in particolare individuando gli intervalli di monotonia e precisando la natura di eventuali punti critici:

$$f(x) = (x^2 - x)\, e^{2x\sqrt{2}}.$$

(391) Studia la funzione in modo da poterne tracciare il grafico, in particolare individuando gli intervalli di monotonia e precisando la natura di eventuali punti critici:

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right).$$

(392) Studia la funzione in modo da poterne tracciare il grafico, in particolare individuando gli intervalli di monotonia e precisando la natura di eventuali punti critici:

$$f(x) = x^2\, \ln(x - 1).$$

(393) Studia la funzione in modo da poterne tracciare il grafico, in particolare individuando gli intervalli di monotonia e precisando la natura di eventuali punti critici:

$$f(x) = \frac{\ln(x + 1)}{x^2}.$$

(394) Studia la funzione in modo da poterne tracciare il grafico, in particolare individuando gli intervalli di monotonia e precisando la natura di eventuali punti critici:

$$f(x) = x\, e^{1 - x^2}.$$

(395) Studia la funzione in modo da poterne tracciare il grafico, in particolare individuando gli intervalli di monotonia e precisando la natura di eventuali punti critici:

$$f(x) = \ln(\ln(x)).$$

(396) Effettuare uno studio completo della funzione (c.d.e., sgn, limiti agli estremi del c.d.e./asintoti, intervalli di crescenza/decrescenza, punti di min/max, concavità e flessi):

$$f(x) = (x - 1)\, e^{\frac{1}{x}}$$

(397) Effettuare uno studio completo della funzione (c.d.e., sgn, limiti agli estremi del c.d.e./asintoti, intervalli di crescenza/decrescenza, punti di min/max, concavità e flessi):

$$f(x) = e^{\frac{2-x}{x}}$$

(398) Effettuare uno studio completo della funzione (c.d.e., sgn, limiti agli estremi del c.d.e./asintoti, intervalli di crescenza/decrescenza, punti di min/max, concavità e flessi):

$$f(x) = (x^2 - 3)\, e^x$$

(399) Effettuare uno studio completo della funzione (c.d.e., sgn, limiti agli estremi del c.d.e./asintoti, intervalli di crescenza/decrescenza, punti di min/max, concavità e flessi):

$$f(x) = e^{-2x} - 2e^{-x}$$

(400) Effettuare uno studio completo della funzione (c.d.e., sgn, limiti agli estremi del c.d.e./asintoti, intervalli di crescenza/decrescenza, punti di min/max, concavità e flessi):

$$f(x) = (x - 1)\, e^{2-x}$$

(401) Effettuare uno studio completo della funzione (c.d.e., sgn, limiti agli estremi del c.d.e./asintoti, intervalli di crescenza/decrescenza, punti di min/max, concavità e flessi):

$$f(x) = (x + 1)\, e^x$$

(402) Effettuare uno studio completo della funzione (c.d.e., sgn, limiti agli estremi del c.d.e./asintoti, intervalli di crescenza/decrescenza, punti di min/max, concavità e flessi):

$$f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$$

(403) Effettuare uno studio completo della funzione al fine di determinarne il grafico, indicando chiaramente gli intervalli di crescenze e le concavità:
$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x-2}}$$

(404) Effettuare uno studio completo della funzione al fine di determinarne il grafico, indicando chiaramente gli intervalli di crescenze e le concavità:
$$f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

(405) Effettuare uno studio completo della funzione al fine di determinarne il grafico, indicando chiaramente gli intervalli di crescenze e le concavità:
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$$

(406) Effettuare uno studio completo della funzione al fine di determinarne il grafico, indicando chiaramente gli intervalli di crescenze e le concavità:
$$f(x) = \frac{6-x}{\sqrt{4+x^2}}$$

(407) Effettuare uno studio completo della funzione al fine di determinarne il grafico, indicando chiaramente gli intervalli di crescenze e le concavità:
$$f(x) = \sqrt[3]{x^3-3x^2}$$

(408) Effettuare uno studio completo della funzione al fine di determinarne il grafico, indicando chiaramente gli intervalli di crescenze e le concavità:
$$f(x) = \sqrt[3]{3x-x^3}$$

item Effettuare uno studio completo della funzione al fine di determinarne il grafico, indicando chiaramente gli intervalli di crescenze e le concavità:
$$f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$$

(409) Effettuare uno studio completo della funzione al fine di determinarne il grafico, indicando chiaramente gli intervalli di crescenze e le concavità:
$$f(x) = e^x\sqrt[3]{x^2}$$

(410) Effettuare uno studio completo della funzione al fine di determinarne il grafico, indicando chiaramente gli intervalli di crescenze e le concavità:

$$f(x) = (x^2 - 2x)e^{-x}$$

(411) Effettuare uno studio completo della funzione al fine di determinarne il grafico, indicando chiaramente gli intervalli di crescenze e le concavità:

$$f(x) = (x^2 + 2x - 3)e^{-x}$$

(412) Effettuare uno studio completo della funzione al fine di determinarne il grafico, indicando chiaramente gli intervalli di crescenze e le concavità:

$$f(x) = \sqrt{x}e^{\frac{1}{x}}$$

(413) Effettuare uno studio completo della funzione al fine di determinarne il grafico, indicando chiaramente gli intervalli di crescenze e le concavità:

$$f(x) = xe^{-|x|}$$

(414) Effettuare uno studio completo della funzione al fine di determinarne il grafico, indicando chiaramente gli intervalli di crescenze e le concavità:

$$f(x) = x^3e^{-x^3}$$

(415) Effettuare uno studio completo della funzione al fine di determinarne il grafico, indicando chiaramente gli intervalli di crescenze e le concavità:

$$f(x) = (x + 1)e^{-x^2+1}$$

Sull'approssimazione polinomiale locale di funzioni reali di variabile reale.

(416) Trova lo sviluppo polinomiale di MacLaurin della funzione

$$f(x) = x\sin(3x^2)$$

a meno di $o(x^9)$.

(417) Trova lo sviluppo polinomiale di MacLaurin della funzione

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

a meno di $o(x^3)$.

(418) Trova lo sviluppo polinomiale di MacLaurin della funzione
$$f(x) = xe^{-x}$$
a meno di $o(x^3)$.

(419) Trova lo sviluppo polinomiale di MacLaurin della funzione
$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$
a meno di $o(x^3)$.

(420) Trova lo sviluppo polinomiale di MacLaurin della funzione
$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$
a meno di $o(x^3)$.

(421) Trova lo sviluppo polinomiale di MacLaurin della funzione
$$f(x) = x\ \cos(3x)$$
a meno di $o(x^3)$.

(422) Trova lo sviluppo polinomiale di MacLaurin della funzione
$$f(x) = e^{-x^2}$$
a meno di $o(x^3)$.

(423) Trova lo sviluppo polinomiale di MacLaurin della funzione
$$f(x) = x\ \sin(2x)$$
a meno di $o(x^3)$.

(424) Trova lo sviluppo polinomiale di MacLaurin della funzione
$$f(x) = \ln(1-2x)$$
a meno di $o(x^3)$.

(425) Trova lo sviluppo polinomiale di MacLaurin della funzione
$$f(x) = e^{-2x}$$
a meno di $o(x^3)$.

(426) Utilizzando l'approssimazione polinomiale di MacLaurin, determina il valore del seguente limite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^3(e^x - \cos(x))}.$$

(427) Utilizzando l'approssimazione polinomiale di MacLaurin, determina il valore del seguente limite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{2x}.$$

(428) Utilizzando l'approssimazione polinomiale di MacLaurin, determina il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+\sin(x)-e^x)^2}{x^2}.$$

(429) Utilizzando l'approssimazione polinomiale di MacLaurin, determina il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-\sin(x)-1}{x\sin(x)}.$$

(430) Utilizzando l'approssimazione polinomiale di MacLaurin, determina il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-\frac{1}{2}\sin(x)-\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

(431) Utilizzando l'approssimazione polinomiale di MacLaurin, determina il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^x+1)}{x+\sin(x)}.$$

(432) Utilizzando gli sviluppi di MacLaurin, arrestati ad un opportuno ordine, determina il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos(x)-\frac{3}{2}x^2}{x^4-x^2(e^{x^2}-1)}$$

(433) Utilizzando gli sviluppi di MacLaurin, arrestati ad un opportuno ordine, determina il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x-\cos(x))-x\sin(x)-\frac{1}{3}x^3}{\sin(x^2)-\ln(1+x^2)}$$

(434) Utilizzando gli sviluppi di MacLaurin, arrestati ad un opportuno ordine, determina il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-\cos(2x)-3x-2x\sin(x)}{3x^3-3x^2\ln(1+x)}$$

(435) Utilizzando gli sviluppi di MacLaurin, arrestati ad un opportuno ordine, determina il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos(3x^2)-\sin(x^3)+\ln(1+x^3)-9x^4}{e^{2x^4}-1-2x^4}.$$

(436) Utilizzando gli sviluppi di MacLaurin, arrestati ad un opportuno ordine, determina il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-\cos(x)-\sin(x)-\frac{1}{2}x^2}{xe^{x^2}-e^{x^3}-x+1}.$$

(437) Utilizzando gli sviluppi di MacLaurin, arrestati ad un opportuno ordine, determina il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(5x) - \cos(3x) + 8x^2}{x^2 - x\sin(x)}.$$

(438) Utilizzando gli sviluppi di MacLaurin, arrestati ad un opportuno ordine, determina il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(3\sin(x) - \sin(3x))^2}{\cos(x) - \cos(3x) - 4x^2}.$$

Sui problemi di ottimizzazione.

(439) Trova il punto della retta $y = 3x + 2$ più vicino al punto $A(2, -1)$.

(440) Tra tutte le parabole del fascio $y = x^2 - 2kx + 1$ determinare quelle il cui vertice ha minima distanza dall'origine. item Data la parabola di equazione $y = -x^2 + 6x - 5$ sia A il suo punto d'intersezione con l'asse delle ordinate e B il punto di ascissa 4. Determinare sull'arco AB un punto P per il quale è massimo il prodotto delle distanze dagli assi coordinati.

(441) Determinare il parametro k in modo che sia minima la distanza tra i vertici delle due parabole

$$y = x^2 - kx + k - 2 \, \text{e} \, y = -x^2 + (k-1)x + 3.$$

(442) Si consideri la circonferenza goniometrica centrata nell'origine del sistema di coordinate cartesiane. Sull'arco AB del primo quadrante determinare un punto P in modo tale che, se indichiamo con Q il punto d'intersezione tra la tangente alla circonferenza in P e l'asse x e con S l'intersezione della retta OP con la retta $y = 2$, l'area del triangolo QPS risulti minima.

(443) Si deve costruire uno spazio per giocare a forma di rettangolo con quattro semicirconferenze poste ciascuna su uno dei lati del rettangolo (verso l'esterno). Se il perimetro dell'area di gioco è 400 metri, come deve essere costruito in modo da avere la parte rettangolare con la massima area possibile?

(444) Su di un piedistallo di altezza 2 metri è posta una statua alta 6 metri. Si chiede a quale distanza x dal piede del piedistallo ci si deve porre, sul piano orizzontale passante per la base del piedistallo, affinché la statua sia vista sotto l'angolo visuale massimo.

(445) Un serbatoio, senza coperchio, a forma di parallelepipedo rettangolo a base quadrata, della capacità C, deve essere rivestito

internamente di piombo. Come devono essere le sue dimensioni affinché la spesa sia minima? (poi determina tali dimensioni nel caso $X = 32\,m^3$).

(446) Un serbatoio, senza coperchio, a forma di cilindro retto, della capacità C, deve essere rivestito con una guaina liquida. Come devono essere le dimensioni del raggio di base e dell'altezza, affinché la spesa sia minima? (fare poi il caso che la capacità misuri $C = 216\pi\,m^3$).

(447) Con una lampada a saliscendi L si deve illuminare un piccolo oggetto, posto sul pavimento (orizzontale) in un punto P, alla distanza a dalla verticale "calata" dalla lampada stessa. Secondo la legge di Lambert, l'illuminamento in P è dato da

$$I = k\,\frac{\cos(\alpha)}{r^2},$$

dove k è una costante (positiva) che dipende dalla sorgente luminosa, r è la distanza tra la sorgente ed il punto ed α è l'ampiezza dell'angolo che il raggio luminoso, che raggiunge il punto P, forma con la normale alla superficie su cui l'oggetto giace. A quale altezza si deve collocare la lampada affinché l'illuminazione dell'oggetto sia la massima possibile? (poi fai i calcoli nel caso specifico di $a = 5\,m$).

(448) Una nave consuma ogni ora $36 + 0.04\,v^2$ tonnellate di combustibile, essendo v la velocità in km/h. Trova la quantità di combustibile consumata in un viaggio di $2000\,km$ effettuato alla velocità ottimale che renda il consumo minimo.

(449) Un punto A ed un punto B sono situati su sponde opposte di una canale largo $15\,km$ e bisogna collegare i due punti con un cavo. Il costo del cavo è di 62.50 euro a km sulla terra e di 95.80 euro al km nell'acqua. Sapendo che la distanza tra il punto A ed il punto B' posto sulla sponda di A alla stessa altezza del punto B posto sull'altra sponda, è di $5.5\,km$, trova come stendere il cavo affinché la spesa risulti minima.

(450) Determina il trapezio isoscele circoscritto ad una semicirconferenza avente area minima.

(451) Conduci una corda parallela ad un lato di un triangolo equilatero in modo che sia massima la superficie laterale del cilindro che si genera se la corda ruotasse attorno al lato del triangolo (a cui è parallela).

(452) Un punto ripartisce un segmento in due parti di cui una è il lato di un quadrato e l'altra è il lato di un triangolo equilatero.

Trova dove fissare tale punto in modo che la somma delle aree del quadrato e del triangolo sia massima.

(453) In un semicerchio condurre una corda parallela al diametro in modo che il trapezio che si forma considerando tale corda ed il dimetro come basi, sia di area massima.

(454) Tra i cilindri inscritti in una sfera, determina quello che ha volume massimo.

(455) Su un arco, quarto di circonferenza, determina un punto in modo che sia massima la somma delle sue distanze dagli estremi dell'arco stesso.

(456) Tra i cilindri inscritti in una sfera, determina quello con la superficie laterale massima.

(457) Tra tutti i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza, determina quello per il quale è massima la somma della base e dell'altezza.

(458) Tra i cilindri inscritti in una sfera, determina quello che ha la superficie totale massima.

(459) Tra tutti i rombi circoscritti ad un cerchio, determina quello di area minima.

(460) Tra i parallelepipedi retti a base quadrata inscritti in una sfera, determina quello di volume massimo.

(461) Tra tutti i triangoli isosceli circoscritti ad una circonferenza, determina quello di perimetro minimo.

(462) Tra i cilindri inscritti in un cono, determina quello di volume massimo. item Tra tutti i triangoli isosceli circoscritti ad un quadrato, determina quello di area minima.

(463) Dire a che distanza dal centro di una sfera occorre prendere una sua sezione piana affiché il cilindro avente per prima base tale sezione e la seconda base tangente alla sfera, abbia volume massimo.

(464) Considera la parabola $y = -x^2 + 3x$ e traccia una retta parallela all'asse delle ascisse, secante il segmento parabolico, in modo che il trapezio inscritto abbia area massima.

(465) Le due parabole $y = -x^2+4x$ e $y = x^2-4x$ staccano sull'asse delle ascisse la stessa corda OA. Determinare una retta parallela all'asse delle ordinate in modo tale che, indicate con C e D le sue intersezioni con le parabole, l'area del quadrilatero $OACD$ abbia area massima.

(466) Si scriva l'equazione della parabola tangente in $B(2, 0)$ all'asse delle ascisse e passante per il punto $A(0, 4)$. Sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ di parabola determinare il punto in cui la tangente alla parabola

forma con gli assi cartesiani il triangolo di area massima.

(467) Date le due parabole $y = x^2 - \frac{8}{3}x$ e $y = -x^2 + \frac{10}{3}x$ e, indicato con A il loro punto comune diverso dall'origine, si consideri ua retta "verticale", che intersechi il contorno della regione piana limitata dalle due parabole nei punti B e C. Determina tale retta in modo che sia massima l'area del triangolo ABC.

(468) In un piano cartesiano si considerino le due parabole $y = \pm 2(x^2 - 9)$. Poi, nella regione di piano da esse delimitata, determinare il massimo rettangolo inscritto con i lati paralleli agli assi coordinati.

(469) Due circonferenze di raggi $\frac{r}{2}$ ed r sono tangenti internamente. Determina una retta secante entrambe le circonferenze e perpendicolare alla retta dei diametri, in modo tale che la somma dei quadrati delle corde staccate sia massima.

(470) Si devono mettere in comunicazione due locali adiacenti, creando un'apertura di forma rettangolare, sormontata da un arco semicircolare. Sapendo che il perimetro del rettangolo è fisso e pari a 11 metri, stabilisci quali devono essere le dimensioni dell'apertura, in modo che, nel complesso, la regione aperta sia la più grande possibile.

(471) Una barra metallica di lunghezza l viene divisa in due parti: una di esse viene ripiegata in modo da formare un quadrato, l'altra in modo da formare un triangolo equilatero. Determinare la lunghezza delle due parti in modo che siaminima la somma delle aree della superfici ottenute.

(472) Un corpo viene lanciato da terra verticalmente verso l'alto, con velocità iniziale v_0; ricordando che la "quota" s all'istante t è $s = -\frac{1}{2}g\,t^2 + v_0\,t$, determina la massima altezza raggiunta dal corpo. Sapresti anche dire di quanto varia l'altezza massima raggiunta se la velocità iniziale v_0 subisse una variazione Δv_0 ?

(473) La spesa oraria di una nave, che procede alla velocità v, è data dalla somma $A + B\,v^3$, dove A rappresenta la spesa oraria del personale (che è -evidentemente- indipendente dalla velocità di crociera) e $B\,v^3$, la spesa oraria del carburante consumato. Determina la spesa complessiva occorrente per un percorso di l miglia e la velocità da tenere affinché detta spesa sia minima.

(474) In una piramide retta avente per base un esagono regolare, le lunghezze dell'altezza e del lato di base sono rispettivamente 1 e l; inscrivi nella piramide il cilindro di volume massimo.

(475) Considera i coni circolari retti in cui la somma del doppio

dell'altezza con diametro della base misura 18 rispetto ad una fissata unità di misura. Determina fra essi il cono di volume massimo e stabilisci se esso ha anche la massima superficie laterale.

(476) Si consideri la parabola di equazione $y = 3x - x^2$. Si scriva l'equazione della curva ad essa simmetrica rispetto alla retta $y = x$ e si determini, nella regione finita di piano delimitata dalla due curve, il segmento di lunghezza massima perpendicolare all'asse di simmetria.

(477) La potenza fornita da una pila è $P = \frac{E^2 R}{(r+R)^2}$, essendo E la forza elettromotrice costante, r la resistenza interna della pila, anch'essa costante, R la resistenza esterna; determina per quale valore di R la potenza è massima e calcolane il suo valore.

(478) Una carta da filtro, a forma circolare, di raggio R, viene ripiegata in modo da formare un cono. Quale sarà l'altezza del cono quando è massimo il suo volume?

(479) Un generatore di corrente, di resistenza interna r e f.e.m. E, immette in un circuito esterno la potenza $P = E\,i - r\,i^2$, essendo i l'intensità della corrente. Per quale valore di i la potenza è massima e quanto vale? (Poi effettua i calcoli per $E = 12.5$ volt ed $r = 25\,\Omega$.) .

(480) Si fonde un cubetto di piombo di spigolo l, per ricavare poi, risolidificando, un cilindro circolare retto. Quali devono essere le dimensioni del cilindro affinché la sua superficie totale sia minima?

(481) Determina l'angolo alla base di un triangolo isoscele di altezza h in modo che sia minimo il raggio della circonferenza circoscritta e massimo quello della circonferenza inscritta.

(482) Sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele determinare un punto in modo che la somma dei quadrati delle sue distanze dai punti medi dei cateti sia massima.

(483) Determina sulla curva di equazioni $y = \frac{1}{1+x^2}$ il punto P nel quale la retta tangente alla curva forma con l'asse x l'angolo di valore assoluto massimo.

(484) Sui lati opposti $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ del rettangolo $\overline{ABCD}$ ed esternamente ad esso si costruiscano i triangoli isosceli $\overline{APB}$ e $\overline{CQD}$, con gli angoli alla base di ampiezza α. Sapendo che il perimetro dell'esagono $\overline{APBCQD}$ è $2p$ si determinino le lunghezze dei lati del rettangolo in modo che sia massima l'area dell'esagono. Per quale valore di α l'esagono è inscrivibile in

una circonferenza?

[Dalla **Maturità Scientifica del 1980**.]

(485) In una circonferenza di centro O e raggio unitario si conduca la corda $\overline{AB}$ tale che, costruito il triangolo equilatero $\overline{ABC}$ da parte opposta ad O, rispetto ad AB, l'area S del quadrilatero $\overline{ACBO}$ risulti massima. Si esprimano i valori che assumono la lunghezza della corda $\overline{AB}$ e l'ampiezza dell'angolo $A\hat{O}B$.

[Dalla **Maturità Scientifica del 1985**.]

(486) Determina l'altezza ed il raggio di base del cono di volume minimo circoscritto ad una sfera di raggio r. Dimostrare che tale cono è quello di superficie totale minima, nell'insieme dei coni circoscritti.

[Dalla **Maturità Scientifica del 1972**.]

(487) Nell'insieme delle parabole di equazione $y = x^2 + p\,x + q$ determinare quelle aventi i vertici sulla parabola $y = -x^2 - 2x + 2$, esprimendo p in funzione di q. Determinare poi l'equazione delle rette passanti per l'origine O del sistema di coordinate e tangenti ad una delle suddette parabole; trovare, in funzione di p la lunghezza l della corda limitata dai punti di contatto. Stabilire per quali parabole tale lunghezza è minima o massima.

[Dalla **Maturità Scientifica del 1951**.]

(488) Data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2\,r$, si considerino i quadrilateri convessi inscritti di vertici A, B, in un punto P della semicirconferenza e nel punto medio Q dell'arco $\widehat{PB}$. Tra tutti i quadrilateri così ottenuti determinare quello di perimetro massimo. Dimostrare, infine, che il quadrilatero di perimetro massimo coincide con quello di area massima.

(489) Tra tutti i prismi a base quadrata di volume fissato V, trovare quello di superficie totale minima.

(490) Tra tutte le piramidi rettangolari rette a base triangolare, con superficie laterale S fissata, determinare quella di volume massimo.

(491) In una semisfera di raggio r inscrivi un tronco di cono avente la base maggiore coincidente con il cerchio massimo della semisfera e che abbia la superficie laterale massima.

(492) Tra tutti i solidi formati da un cilindro al quale è sovrapposto un cono equilatero, di superficie totale S fissata, determinare quello avente volume massimo.

(493) Data una piramide quadrangolare regolare retta di altezza h e spigolo di base l, si conduce un piano secante parallelo alla base e si inscriva nella sezione una circonferenza. A quale distanza dal vertice deve essere tagliata la piramide in modo che la superficie laterale del cilindro che ha come base il cerchio di prima e l'altra base sulla base della piramide, sia massima?

Su altre applicazioni del calcolo differenziale.

(494) Una barca viene tirata verso una banchina da una fune attaccata a prua; tale fune passa attraverso una puleggia fissata sul molo, che si trova 1 mt più in alto rispetto alla prua della barca. Se la corda viene tirata ad una velocità di 1 mt/s, a che velocità si sta avvicinando la barca al molo, nel momento in cui essa si trova a distanza di 8 mt dal molo stesso?

(495) Una scala di 3 metri è appoggiata ad una parete verticale. Se la base della scala scivola, allontanandosi dal muro ad una velocità di 30 cm/s, a che velocità si muove la parte superiore della scala quando i suoi piedi si trovano a 1,5 mt dal muro?

(496) Un serbatoio di acqua ha la forma di cono circolare invertito con raggio di base 2 metri ed altezza 4 mt. Se l'acqua viene pompata nel serbatoio ad una velocità di $2\,\mathrm{mt}^3/\mathrm{min}$, trova a che velocità il livello dell'acqua sta crescendo quando essa è arrivata a tre metri di profondità.

(497) Supponiamo che una petroliera sversi del petrolio diffondendolo in modo circolare. Se il raggio di fuoriuscita del petrolio aumenta alla velocità (costante) di 1 mt/s, quanto è la velocità con cui si accresce l'area dello sversamento, nel momento in cui il raggio della "macchia" è già di 30 mt?

(498) Una palla di neve si sta sciogliendo in modo tale che la sua superficie diminuisce ad una velocità di $1\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{min}$; trova la velocità con cui decresce il suo diametro quando esso è di 10 cm.

(499) Un lampione è montato sulla parte superiore di un palo lungo 8 mt. Un uomo, alto 1,8 mt si allontana dal palo ad una velocità di 1,5 mt/s lungo un percorso rettilineo. A che velocità si muove la punta della sua ombra quando l'uomo si trova a 12 mt dal lampione?

(500) Dai una valutazione della variazione della superficie di un tetraedro regolare se il suo lato aumentasse di un millesimo.

(501) Dai una valutazione della quantità $e^{0.01}$, spiegando il motivo della tua approssimazione.

(502) Dire di quanto varia approssimativamente il volume di un cono se il suo raggio di base diminuisse di un decimo e l'altezza rimanesse la stessa.

(503) Dai una valutazione della quantità $\ln(1.05)$, spiegando il motivo della tua approssimazione.

(504) Dire di quanto varia approssimativamente la forza di attrazione gravitazionale tra due corpi, se la loro distanza diminuisse di un centesimo.

(505) Calcola in modo approssimato il valore di $\sqrt[3]{7.91}$ spiegando come hai fatto.

(506) Due cariche uguali vengono poste ad una certa distanza (e quindi si respingono essendo soggette alla legge di Coulomb): dire di quanto varia la forza che ciascuna di esse esercita sull'altra, se la loro distanza venisse aumentata di un decimo.

(507) Dai una valutazione approssimativa della quantità $(10.12)^2$, motivando la risposta.

(508) In chimica, la velocità di una reazione tra due reagenti, si esprime, di solito, tramite una proporzionalità diretta tra qualche potenza della concentrazione dei reagenti stessi, ovvero $v = k\,[A]^a \cdot [B]^b$. La costante di proporzionalità k è legata alla temperatura alla quale avviene la reazione, secondo la legge $k = \mathcal{A} \cdot e^{-\frac{E_a}{RT}}$, detta "equazione di Arrhenius" (E_a è l'energia di attivazione, R è la costante universale dei gas ed $\mathcal{A}$ è detto fattore pre-esponenziale). Dire di quanto varia approssimativamente la costante di proporzionalità se la temperatura viene aumentata di tre decimi.

(509) Dai una valutazione approssimativa della quantità $\sqrt{4.09}$, motivando la risposta.

Sulla classificazione dei punti singolari di funzione reali di variabile reale.

(510) Si classifichino gli eventuali punti di non derivabilità:

$$f(x) = \sqrt{|1-x|}.$$

(511) Si classifichino gli eventuali punti di non derivabilità:

$$f(x) = \sqrt[3]{|x-4|}.$$

(512) Si classifichino gli eventuali punti di non derivabilità:

$$f(x) = \sqrt[3]{\ln(x)}.$$

(513) Si classifichino gli eventuali punti di non derivabilità:

$$f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x^2}.$$

(514) Si classifichino gli eventuali punti di non derivabilità:

$$f(x) = \sqrt[3]{|2x - 6|}.$$

Relativi al Capitolo 11

Sullo studio delle serie numeriche.

(515) Studia il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n - 2}{2n + 1} \right)^{2-n}.$$

(516) Studia il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{5}{n} \right) 3^{-n}.$$

(517) Studia il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2^n}{3^n + 2} \right).$$

(518) Studia il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!}.$$

(519) Studia il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2(n)}{n}.$$

(520) Studia il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n!}.$$

(521) Studia il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(2n + 1)!}.$$

(522) Studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$A = \sum_{1}^{\infty} \frac{n - \cos(n)}{n^4 + n^2} \quad \text{e} \quad B = \sum_{1}^{\infty} \frac{2n!}{(n + 3)!}$$

(523) Studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$A = \sum_{1}^{\infty} \frac{4n+7}{n^3 \ln(n)} \quad \text{e} \quad B = \sum_{1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n!-1}$$

(524) Studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$A = \sum_{1}^{\infty} \frac{n-2}{7n^3-3n-7} \quad \text{e} \quad B = \sum_{1}^{\infty} \frac{n\, e^n}{n^2+n!}$$

(525) Studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$A = \sum_{1}^{\infty} \frac{5n+9}{7n^2-3\sqrt{n}} \quad \text{e} \quad B = \sum_{1}^{\infty} e^{7n-2n^2}$$

(526) Studia il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$$

(527) Studia il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$$

(528) Studia il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 2^n}$$

(529) Studia il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$$

(530) Studia il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}$$

(531) Studia il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

Sul calcolo degli integrali.

(532) Trova una primitiva della funzione:

$$f(x) = 3x^2 - \sqrt{x} + \sin(x).$$

(533) Idem per la funzione:

$$f(x) = \frac{2x + 3x^2 - 4\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt[4]{x}}{x^2}.$$

(534) Calcola il valore del seguente integrale:

$$\int_1^3 \left(\frac{2}{3} - x + \frac{3}{4}x^2 + 2x^3 \right) d\,x.$$

(535) ì'Calcola il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{x^2 - x\sqrt{x}}{4\sqrt[3]{x^2}}\,d\,x.$$

(536) Calcola il valore del seguente integrale:

$$\int_{-2}^0 \left(1 + \frac{3}{2}x - 2x^2 + \frac{1}{2}x^3 \right) d\,x.$$

(537) Calcola il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{x + x^2\sqrt{x}}{3\sqrt[4]{x}}\,d\,x.$$

(538) Calcola il valore del seguente integrale:

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{5}x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 \right) d\,x.$$

(539) Calcola il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x}}\,d\,x.$$

(540) Calcola il valore del seguente integrale:

$$\int_{-1}^3 \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{3}x + x^2 + \frac{1}{4}x^3 \right) d\,x.$$

(541) Calcola il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{1 - x\sqrt{x}}{2x\sqrt[3]{x^2}}\,d\,x.$$

(542) Calcola i seguenti integrali

- $$\int \frac{x + 2}{x^2 - 1} dx.$$

- $$\int \sqrt{1+4x}dx.$$

(543) Calcola i seguenti integrali:

- $$\int \frac{x}{x^2-4}dx.$$
- $$\int \frac{\sin(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx.$$

(544) Calcola i seguenti integrali:

- $$\int \frac{3-x}{x^2-6x+8}dx.$$
- $$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx.$$

(545) Calcola i seguenti integrali:

- $$\int \frac{3x+1}{x^2-5x+6}dx.$$
- $$\int \sqrt{e^x+1}dx.$$

(546) Calcola i seguenti integrali:

- $$\int \frac{2x}{x^2+3x+4}dx.$$
- $$\int \frac{1}{e^x+1}dx.$$

(547) Calcola i seguenti integrali:

- $$\int \frac{5}{x^2-9}dx.$$
- $$\int \frac{x}{\sqrt{4-x}}dx.$$

(548) Calcolare una primitiva di:

$$\frac{2x+1}{x(x^2-1)}$$

(549) Calcolare l'integrale indefinito, a meno di una costante additiva:
$$\int x^3 \ln(x)\, dx.$$

(550) Calcolare una primitiva di:
$$\frac{x^2-4}{x(x-2)(x+3)}$$

(551) Calcolare l'integrale indefinito, a meno di una costante additiva:
$$\int x^2 e^x\, dx.$$

(552) Calcolare una primitiva di:
$$\frac{2x-5}{(x+3)(x^2-1)}$$

(553) Calcolare l'integrale indefinito, a meno di una costante additiva:
$$\int e^x \sin(x)\, dx.$$

(554) Calcolare una primitiva di:
$$\frac{x}{(x-1)(x^2-4)}$$

(555) Calcolare l'integrale indefinito, a meno di una costante additiva:
$$\int x\, e^{-x}\, dx.$$

(556) Calcolare una primitiva di:
$$\frac{1}{2x^2-x-3}$$

(557) Calcolare l'integrale indefinito, a meno di una costante additiva:
$$\int x \cos(x)\, dx.$$

(558) Calcolare una primitiva di:
$$\frac{1}{x^2-5x+4}$$

(559) Calcolare l'integrale indefinito, a meno di una costante additiva:
$$\int x\, e^{2x}\, dx.$$

(560) Determina l'area compresa tra le curve, il cui grafico è dato dalle funzioni seguenti, nell'intervallo compreso tra i loro due punti d'intersezione,

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3, \quad g(x) = x^2 - 4x + 3.$$

(561) Determina l'area compresa tra le curve, il cui grafico è dato dalle funzioni seguenti, nell'intervallo compreso tra i loro due punti d'intersezione,

$$f(x) = -5 - 4x - x^2, \quad g(x) = x^2 + 4x + 1.$$

(562) Calcola il valore dell'area compresa tra le curve, grafici delle funzioni:

$$f_1(x) = x + 2, \qquad f_2(x) = x^2 - 4.$$

(563) Determina l'insieme delle primitive della funzione:

$$f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 6}}.$$

(564) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{x + 2}{(x^2 + 4x - 5)^2}\, dx$$

(565) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx$$

(566) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{x}{(2x^2 - 1)^3}\, dx$$

(567) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \sqrt{x^2 + 4}\, dx$$

(568) Determina per quale valore di k l'iperbole equilatera $xy = k$ è tangente alla retta $3x + y - 6 = 0$. Trova poi l'area della parte di piano delimitata da questa iperbole, dall'asse delle x e dalle rette $x = 1$ e $x = 4$.

(569) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{\sqrt[3]{2x + 1}}{(2x + 1)^3}\, dx$$

(570) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx$$

(571) Rappresenta graficamente, tramite opportuno studio, la curva di equazione $y = \frac{x^2-4}{x^2+1}$; determina poi l'area della parte finita di piano compresa tra la curva e l'asse delle x.

(572) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{\cos(x)}{(1+\sin(x))^2}\,dx$$

(573) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \sqrt{2x^2-9}\,dx$$

(574) Rappresenta, tramite opportuno studio, il grafico della funzione $y = \frac{\ln(x^2)}{x}$. Determina poi l'area della parte finita di piano compresa tra la curva, l'asse delle x e la retta $x = e$.

(575) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{\tan(x)+1}{\cos^2(x)}\,dx$$

(576) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

(577) Data la funzione $f(x) = \frac{1}{(x-3)^3}$ rappresentala graficamente. Tra le sue infinite primitive determina quella che passa per il punto $P(2,2)$ e rappresentala graficamente.

(578) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan(x)}}\,dx$$

(579) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \sqrt{5-x^2}\,dx$$

(580) Data la funzione $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$, rappresentala, dopo un opportuno studio, sul piano cartesiano. Tra le sue infinite primitive, determina quella che passa per il punto $P(5, 2\ln(2))$ e rappresentala graficamente.

(581) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}\, dx$$

(582) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \sqrt{x^2-2x-3}\, dx$$

(583) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)(1+\tan(x))}\, dx$$

(584) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \sqrt{x^2+2x+3}\, dx$$

(585) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{1}{\cos(x)\,(\sin(x)+\cos(x))}\, dx$$

(586) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \sqrt{4x^2-x-3}\, dx$$

(587) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{\sin(1+\ln(x))}{x}\, dx$$

(588) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \sqrt{2-x-x^2}\, dx$$

(589) Trova una primitiva di:

$$f(x) = 3x\sqrt[3]{5-x^2}.$$

(590) Trova una primitiva di:

$$f(x)y = \frac{x^2-4}{x+1}.$$

(591) Trova una primitiva di:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-27}.$$

(592) Trova una primitiva di:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 4x + 4}.$$

(593) Determinare l'insieme delle primitive della funzione:

$$f(x) = x^2 \sin(x).$$

(594) Calcolare l'integrale indefinito seguente:

$$\int \frac{5x^2 - 6x - 3}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx.$$

(595) Calcolare l'integrale indefinito seguente:

$$\int \frac{3x - 1}{x(x^2 + 3x + 2)}\, dx.$$

(596) Determinare l'insieme delle primitive della funzione:

$$f(x) = x \cos(5x).$$

(597) Calcolare l'integrale indefinito seguente:

$$\int \frac{x^2 - 4x - 4}{x^3 - 4x}\, dx.$$

(598) Determinare l'insieme delle primitive della funzione:

$$f(x) = e^x \sin(x).$$

(599) Calcolare l'integrale indefinito seguente:

$$\int \frac{6x^2 + x - 1}{x(x^2 - 1)}\, dx.$$

(600) Determina una primitiva di

$$\frac{\ln(\sin(x^{\cos(x)}))}{\sin(x)}$$

(601) Mostra che

$$4.5 \leqslant \int_1^3 e^x \leqslant 15.$$

(602) Mostra che

$$0.4 \leqslant \int_0^1 \sin(e^x) dx \leqslant 1.$$

Sull'applicazione del calcolo integrale.

(603) La velocità di un corpo che si muove su una retta varia secondo la legge
$$v(t) = \frac{1}{(t+1)^2}, \quad t \geqslant 0.$$
Lo spazio iniziale è posto a $s_0 = s(0) = 2$ mt. Determinare l'accelerazione, l'equazione oraria e lo spazio percorso in nove unità di tempo.

(604) Trovare il volume della ciambella (in Matematica "del toro") generato dalla rotazione del cerchio $x^2 + (y-b)^2 = r^2$ attorno all'asse delle ascisse.

(605) Calcolare il volume del solido generato, con una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse, dalla regione di piano limitata e avente per frontiera le curve rappresentate dalle equazioni
$$y = 0, \quad y = x, \quad x + 2y - 4 = 0.$$

(606) Dimostra il secondo Teorema di Guldino , ovvero che il volume del solido di rivoluzione è dato dal prodotto $2\pi \cdot d \cdot S$ dove d è la distanza del baricentro dall'asse di rotazione e S indica la misura della superficie piana che ruota.

(607) Calcolare il volume del solido generato, con una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse, dalla regione di piano limitata e avente per frontiera le curve rappresentate dalle equazioni
$$y = 0, \quad x = -2, \quad x = 4, \quad y = \frac{1}{2}x.$$

(608) L'accelerazione di un corpo mobile su una retta, in funzione del tempo, è data dalla legge
$$a(t) = a_0 e^{-kt},$$
con $a_0 = -2\,[m][s^{-2}]$ e $k = 6,12\,[s^{-1}]$. Sapendo che $v_0 = v(0) = 0,5\,[m][s^{-1}]$ e $s_0 = s(0) = 0$, determina la legge con cui varia la velocità in funzione del tempo e l'equazione oraria del moto, determinando lo spazio percorso in $0,3$ secondi.

(609) Calcolare il volume del solido generato, con una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse, dalla regione di piano limitata e avente per frontiera le curve rappresentate dalle equazioni
$$y = 0, \quad y = x, \quad y = 3, \quad x + y = 8.$$

(610) Calcolare il volume del solido generato, con una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse, dalla regione di piano limitata e avente per frontiera le curve rappresentate dalle equazioni

$$y = 0, \quad y = x, \quad y = 3x + 2, \quad x + y = 1.$$

(611) Un conduttore è percorso da un'intensità di corrente elettrica data dalla funzione

$$i(t) = a\,t\,e^{-bt^2},$$

con $a = 4\,[A][s^{-1}]$ e $b = 0,005\,[s^{-2}]$. Calcola la quantità di carica che attraversa la sezione del conduttore tra l'istante $t_1 = 0$ secondi e l'istante $t_2 = 2$ secondi.

(612) La forza

$$F(x) = \frac{a}{x^2}$$

con $a = 27\,[N][m^{-2}]$, agisce lungo l'asse delle ascisse, spostando il suo punto di applicazione dalla posizione $x = 1$ alla posizione $x = 9$ metri. Calcola il lavoro compiuto da tale forza.

(613) Calcola il lavoro compiuto dalla forza elastica di una molla, la cui costante elastica è $k = 200\,[N][m^{-1}]$ per l'allungamento della molla stessa di un metro dalla posizione di riposo.

(614) Calcolare il valore medio della funzione $f(x) = \frac{1-x^4+x}{1+x^2}$ per $x \in [0, 1]$.

(615) Calcolare il valore medio della funzione $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ nell'intervallo di estremi $x = 1$ e $x = e$.

(616) L'intensità di corrente in un circuito, al tempo t è data da $i = \sqrt{t} + t^2$. Determinare la quantità di elettricità che passa attraverso il circuito nell'intervallo di tempo che va dall'istante $t = 1$ all'istante $t = 3$.

(617) Una aeroplano atterra e t secondi dopo aver toccato il suolo la sua velocità (in metri al secondo) è data alla relazione $v = 56 - 8t$. Trovare quanti metri percorre l'areo prima di fermarsi e quanto tempo ci impiega, dal momento in cui ha toccato terra. item Una ciambella è stata costruita facendo ruotare la circonferenza di equazione $x^2 + (y - 3)^2 = 9$ attorno all'asse delle ascisse. Quanto vale il suo volume?

(618) Tagliando la parabola di equazione $y = -x^2 + 4$ con la retta di equazione $y = 2$ si forma una area che, fatta ruotare attorno all'asse delle ascisse, forma un volume di cui si richiede la misura.

(619) Il salsicciotto la cui sezione verticale è descritta dalle curve $y = \cos(x - \frac{\pi}{2}) + 2$ e $y = \sin(x - \pi) + 2$, con le x comprese tra 0 e 2π, viene fatto ruotare attorno all'asse delle ascisse, formando un volume di cui si richiede la misura.

(620) Un forza $\mathbf{F}$ di direzione e verso costanti ha intensità F (espressa in newton) direttamente proporzionale, secondo una costante unitaria k, allo spostamento s (espresso in metri) del punto di applicazione da un punto fisso O. Calcola il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ nello spostare il punto di applicazione da O ad A, con $\mu(OA) = 4\,mt$.

(621) Ricordiamo che si definisce *energia potenziale* V_P di una massa m posta in un punto P di un campo gravitazionale creato da una massa M, il lavoro che si deve fare per portare m da P fuori dal campo, cioè all'infinito. Determina l'espressione di V_P ricordando che la forza che agisce su m è -come insegna Newton- $F = -k\frac{Mm}{r^2}$ dove k è una costante ed r è la distanza, variabile, tra i centri delle due masse.

(622) Sia data una molla a riposo, adagiata in posizione orizzontale; un estremo della molla sia fisso, l'altro sia libero di muoversi e, ad esso, sia vincolato un corpo punti forme appoggiato su di un piano liscio. La molla venga allungata di 0,4 mt e poi rilasciata. Sapendo che la costante k della molla vale 4.2 newton/mt, determina il lavoro compiuto dalla forza elastica di richiamo per portare la molla nella posizione di equilibrio (si ricorda che $F = -kx$, dove x esprime l'elongazione della molla).

(623) Il volume e la pressione di un gas sono inizialmente 4 lt e 1.5 atm. Quale lavoro occorre compiere sul gas per dimezzare il suo volume, facendogli compiere una trasformazione isotermica (si ricorda che in tal caso il prodotto pressione per volume è costante!).

(624) Un filo elettrico è attraversato da una corrente alternata sinusoidale di frequenza $f = 50\,Hz$ e di intensità $I = I_0 \sin(\omega t)$ (con $I_0 = 2$ ampère). Determina la quantità di carica che fluisce attraverso una sezione del conduttore dall'istante 0 all'istante $\frac{T}{4}$ (si ricorda che $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ è il periodo della corrente alternata) ed il valore medio della corrente relativa a detto intervallo.

(625) Una sbarra cilindrica AB di lunghezza l=2 mt e sezione trasversale S=1 dm^2 non è omogenea: la sua densità in un generico punto P è direttamente proporzionale alla distanza di P

dall'estremo A (quindi $\delta = kx$, essendo $x = d(AP)$ e k una costante di valore 0,2 in kg/dm^4). Determina la massa della sbarra.

(626) Un serbatoio cilindrico di altezza $h = 4$ mt e raggio $r = 0.5$ mt è pieno d'acqua e lo si vuole vuotare facendo fluire l'acqua da un foro di 2 cm^2 praticato nella sua base. Ricordando il teorema di Torricelli, secondo cui la velocità di fuoriuscita del liquido dipende dalla quota y di quest'ultimo secondo la legge $v = \sqrt{2gy}$ ($g \approx 9,8$ mt/sec^2) e che quindi la portata del foro è $Q = S \cdot v$, (S essendo la superficie del foro), determina il tempo che impiega il serbatoio per svuotarsi.

(627) Determinare il valore medio della lunghezza delle corde parallele alla diagonale del quadrato di lato unitario, facendo variare uno degli estremi su un lato.

[Hint: Il *valore medio* di una funzione $f(x)$, continua, definita su un intervallo $[a, b]$ è dato da $\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx...$]

item Determinare il valore medio della lunghezza delle corde, parallele all'asse delle ascisse, della parabola di equazione $y = x^2$, quando x varia da 0 a 2.

(628) Determinare il valore medio della lunghezza dei segmenti che sono perpendicolari all'asse delle ascisse, hanno un estremo su di esso e l'altro sulla curva di equazione $y = \frac{1}{x^2}$ nell'intervallo $[1, 2]$.

(629) Determinare il valore medio della lunghezza delle corde parallele alla base di un triangolo equilatero di lato unitario.

(630) Determinare il valore medio delle aree dei triangoli (rettangoli) inscritti in una semicirconferenza goniometrica. item Determinare il valore medio delle altezze dei punti appartenenti alla curva di equazione $y = \frac{2x}{x+1}$ nell'intervallo delle ascisse comprese tra 0 e 1.

(631) Determinare il valore medio delle lunghezze delle ipotenuse dei triangoli rettangoli, i cui cateti variano da $3, 4$ a $6, 8$, mantenendosi (i triangoli) tutti simili tra di loro (ovvero, aumentano contemporaneamente le lunghezze dei cateti, in modo che rimangano invariati i rapporti dei lati omologhi).

(632) Per lo studio delle proprietà dinamiche di un'automobile si ricorre alla costruzione di un diagramma speciale: sull'asse delle ascisse di riportano le velocità e su quello delle ordinate i reciproci delle accelerazioni. Dimostra che l'area delimitata da un arco del grafico di funzione e dagli assi $x = v_1$ e $x = v_2$ rappresenta il tempo necessario per passare dall'una all'altra

velocità (ovvero rappresenta il *tempo si ripresa*).

[Osservazione: Questo esercizio è l'equivalente del n.1778 del Demidovic]

(633) Calcola la pressione dell'acqua su un rettangolo immerso verticalmente sapendo che la sua base è di 8 metri, l'altezza di 12 e la base superiore è parallela alla superficie dell'acqua e si trova a 5 metri di distanza da essa.

(634) Un galleggiante di legno sta a pelo d'acqua. La sua superficie di base è 4000 cm^2, l'altezza di 50 cm. Qual è il lavoro necessario per farlo uscire dall'acqua?

[Hint: il peso specifico del legno è 0,8 ...]

(635) Tramite rivoluzione attorno all'asse delle ascisse della retta $y = mx$, passante per il punto (h, R), determina la formula nota del volume del cono.

(636) Stesso esercizio precedente, per ricavare la formula del volume del tronco di cono tramite la retta passante da $(0, r)$ e (h, R).

(637) Determina la lunghezza dell'arco di curva definita tramite grafico della funzione $f(x) = \frac{2}{3}\, x, \sqrt{x}$ con $x \in [0, 3]$.

(638) Idem esercizio di prima per la funzione $f(x) = \ln(x)$ e $x \in [2\sqrt{2}, 2\sqrt{6}]$.

(639) Calcola la lunghezza dell'arco di curva definita parametricamente da: $x = 2t - 1$, e $y = t\sqrt{t}$ per $t \in [0, 1]$.

(640) In un circuito elettrico, alimentato da un generatore da 100 V, è presente una resistenza che viene fatta variare nel tempo con una legge lineare, partendo da 100 Ω con incremento di $0,1\,\Omega/\text{s}$. Calcola la carica che attraversa una sezione del circuito nei primi cinque minuti di passaggio della corrente.

(641) Una densità lineare di una sbarra lunga 4 mt è espressa dalla funzione $\rho = 5 + 6\sqrt{s}$, essendo s la distanza in metri da uno degli estremi della sbarra. Trova la massa totale della sbarra, sapendo che la densità è misurata in Kg per metro.

[Hint: Si ricorda che la densità è definita come la "quantità di massa" per unità di lunghezza [4], per cui $\mathrm{d}M = \rho\,\mathrm{d}\,s...$]

(642) La densità lineare (misurata in Kg per metro) di una barra lunga tre metri è espressa dalla funzione $\rho = \frac{12}{(s+1)^2}$, dove s è la distanza del punto sulla barra dall'estremo che si considera come origine delle ascisse. Determina il peso della barra.

[4] Oppure "massa per superficie" o anche "massa per volume", dipendentemente se si parla di densità lineare, superficiale o volumetrica

(643) Un serbatoio per l'acqua viene riempita alla velocità di $1+t^2$ litri/ora. Dopo quattro ore, quanta acqua contiene il serbatoio? e quanta acqua è stata versata in esso nell'intervallo di tempo tra la seconda e la quarta ora?

(644) In seguito alla somministrazione di un farmaco, la concentrazione del principio attivo raggiunge un picco C_{max}, misurato in "grammi al centimetro cubo". Da quel momento in poi la concentrazione inizia -chiaramente- a decrescere e, solitamente, lo fa secondo una legge esponenziale del tipo: $C(t) = -C_{max} \cdot e^{-k\,t}$, essendo k una costante additiva che dipende sia dal tipo di farmaco, sia dal metabolismo del paziente. Se un paziente elimina metà del farmaco in quattro ore, quanto tempo ci vorrà affinché egli elimini dal proprio corpo il 90% del farmaco?

(645) Una bottiglia d'acqua viene messa in frigorifero alle 15 del pomeriggio, essendo prima stata in un ambiente a temperatura di 24 gradi centigradi. La temperatura dell'acqua, dal momento in cui la bottiglia viene messa in frigo, decresce con una velocità (definita in "gradi Celsius ad ora") di $v(t) = -6 \cdot e^{-0{,}6\,t}$. Di quanto decresce la temperatura in tre ore di riposo della bottiglia in frigo? a che temperatura sarà l'acqua se prendo la bottiglia per la cena delle ore 20?

Ricordiamo che le coordinate del **baricentro** di un sistema di punti materiali di peso m_i, piazzati, rispettivamente, negli n punti (distinti) del piano $P_i(x_i, y_i)$, con $i = 1, 2, \ldots, n$, è dato dalla *media aritmetica ponderata* delle coordinate dei punti dati, ovvero:

$$G = \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \right).$$

Evidentemente, per distribuzioni di masse su insiemi continui, questa definizione non può essere operativa: si può però pensare di discretizzare lo spazio continuo in elementi finiti e sommare questi ultimi, facendo tendere a zero la grandezza di ciascun elemento e quindi facendo tendere all'infinito il numero degli addendi della sommatoria. Questa idea funziona alla grande e porta al seguente passaggio, che si utilizza frequentemente in diverse occasioni:

CASO DISCRETO	CASO CONTINUO
Sommatoria: $<< \sum_{i=1}^n >>$	Integrale: $<< \int_a^b >>$

Quindi, le coordinate di G si possono trovare a seconda dei casi ,in questo modo:

1°) **-Caso di distribuzione della massa su una curva piana parametrizzata da** $s \in [a, b]$ **-** Se ρ indica la densità in funzione del parametro s allora:

$$x_G = \frac{\int_a^b x\,\rho(s)\,\mathrm{d}s}{\int_a^b \rho(s)\,\mathrm{d}\,s}$$

ed analogamente:

$$y_G = \frac{\int_a^b y\,\rho(s)\,\mathrm{d}s}{\int_a^b \rho(s)\,\mathrm{d}\,s}.$$

Ricordiamo che se la curva è definita da una funzione $y = f(x)$ allora $\mathrm{d}\,s = \sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}\,x$.

2°) **-Caso di distribuzione omogenea della massa su un'area delimitata dall'asse delle ascisse e dal grafico di** $y = f(x)$ **-** Se ρ indica la densità, essendo costante, si può trascurare nel calcolo, allora [5] :

$$x_G = \frac{\int_a^b x\,y\,\mathrm{d}x}{\int_a^b y\,\mathrm{d}\,x}$$

e

$$y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,\mathrm{d}x}{\int_a^b y\,\mathrm{d}\,x}.$$

(646) Calcolare il centro di gravità (centro di massa ovvero, anche, il baricentro) della semicirconferenza "positiva" definita da

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

(647) Trova il baricentro del quarto dell'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(648) Determinare le coordinate del baricentro della figura limitata dalla cicloide nel suo primo intervallo di periodicità.

[Hint: si ricordi che la cicloide ha parametrizzazione $(a \cdot (t - \sin(t)), a \cdot (1 - \cos(t)))$.]

---

[5]Si osservi che $\int_a^b y\,\mathrm{d}\,x$ non rappresenta altro che l'area sottesa dalla curva di equazione $y = f(x)$ e, essendo la densità costante, si può portare fuori dal simbolo di integrale sia al numeratore che al denominatore, il ché significa che tale quantità si semplifica e scompare.

(649) Calcola le coordinate del baricentro di una lamina omogenea di densità ρ, avente la forma ottenuta considerando il pezzo di piano compreso tra il grafico della funzione $f(x) = -x^3 + 3x+2$ e l'asse delle ascisse nell'intervallo $[-1, 2]$. Possibilmente disegna la lamina e segnane il suo baricentro.

(650) Calcola le coordinate del baricentro di una lamina omogenea di densità ρ, avente la forma ottenuta considerando il pezzo di piano compreso tra il grafico della funzione $f(x) = -x^4+3x^2+4$ e l'asse delle ascisse nell'intervallo $[-2, 2]$. Possibilmente disegna la lamina e segnane il suo baricentro.

(651) Calcola le coordinate del baricentro di una lamina omogenea di densità ρ, avente la forma ottenuta considerando il pezzo di piano compreso tra il grafico della funzione $f(x) = 2x^2 - x^3$ e l'asse delle ascisse nell'intervallo $[0, 2]$. Possibilmente disegna la lamina e segnane il suo baricentro.

(652) Trovare il baricentro di un filo metallico omogeneo avente la forma della curva di equazione $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ con $x \in [0, 3]$.

Relativi al Capitolo 12

Sulle curve piane.

(653) Sia γ la circonferenza di raggio r centrata nell'origine O del sistema di riferimento ed $M \in \gamma$ un suo punto. Si considerino i punti R ed S rispettivamente le proiezioni sull'asse delle ascisse e su quello delle ordinate del punto M. Considera il punto P proiezione di M sul segmento $\overline{RS}$. Determina una parametrizzazione e l'equazione analitica della curva descritta da P al variare di M sulla circonferenza γ. Si consideri come parametro l'angolo $A\hat{O}M$ misurato in radianti. Determinare la sua lunghezza.

[La curva che si origina si chiama **Asteroide** e fu studiata per prima da Leibniz, Bernoulli e D'Alembert come ipocicloide: sarebbe generata da un punto di un cerchio di raggio un quarto che ruota internamente su una circonferenza di raggio unitario.]

(654) Considera una circonferenza di centro $C(r, 0)$ e raggio r. Determina una parametrizzazione per il luogo dei piedi delle perpendicolari condotte dall'origine degli assi cartesiani alle tangenti alla circonferenza. Si consideri come parametro l'angolo che il raggio $\overline{CA}$ forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse, dove A è il punto preso sulla circonferenza.

[La curva che si origina si chiama **Lumaca di Pascal** e fu studiata per prima dal padre di Blaise Pascal, il signor Etienne. La curva era già nota ai greci con il nome di **concoide del cerchio** .]

(655) Sia $\overline{AB}$ un segmento unitario i cui estremi stanno rispettivamente A sull'asse delle ascisse e B su quello delle ordinate. Sia P il punto ottenuto come proiezione ortogonale dell'origine O del sistema di coordinate su tale segmento. Determina una parametrizzazione per la curva che descrive P al variare dell'estremo A sull'asse delle ascisse (e conseguentemente di B sull'asse delle ordinate) . Come parametro si consideri l'angolo $A\hat{O}P$.

[La curva che si origina si chiama **Rosa a quattro petali** .]

(656) Sia γ la circonferenza di centro $(0,1)$ e raggio unitario e sia t la retta tangente ad essa nel punto $A(0,2)$. Considera un punto $P \in \gamma$ e sia Q il punto d'intersezione tra la retta parallela a t passante per P e la retta parallela all'asse delle ordinate e passate per il punto d'intersezione di t con la retta OP. Determina una parametrizzazione per il luogo descritto da Q al variare di P su γ, poscia l'equazione cartesiana. Si consideri come parametro l'angolo che la retta OP forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse.

[La curva che si origina si chiama **Versiera di Agnesi** e fu studiata dalla matematica italiana Gaetana Agnesi.]

(657) Sia γ la circonferenza di centro $\left(\frac{1}{2},0\right)$ e raggio $\frac{1}{2}$ e considera la retta tangente nel suo punto A di coordinate $(1,0)$. Una retta variabile r, passante dall'origine del sistema di coordinate, intersechi γ nel punto M e òa retta tangente, di cui prima, nel punto N. Trova una parametrizzazione per il luogo dei punti $P \in r$ tale che $\overline{OP} = \overline{MN}$. Si suggerisce di considerare come parametro la pendenza della retta r.

[La curva che si origina si chiama **Cissoide** e fu studiata anticamente da Diocle (II sec. a.C.) e, in epoca più recente, da Fermat, Huygens e Newton.]

(658) Nel piano cartesiano di consideri la circonferenza γ di centro $C(1,0)$ e raggio unitario. Si fissi la retta $r : x = 1$. Le rette del fascio di centro O, origine del sistema di coordinate, incontrano γ nel punto A e la retta r nel punto B. Determinare una parametrizzazione per il luogo descritto dal punto

P tale per cui $\overline{OP} = \overline{AB}$. Si consiglia di scegliere, come parametro, il coefficiente angolare della retta del fascio che si va a selezionare.

[La curva che si origina si chiama **Strofoide** e fu studiata da Torricelli. Per curiosità, in greco il termine *strophos* indica l'anello che si metteva alla cintura per portare la spada.]

(659) Si consideri la retta $r:\ x = 1$. Considera ora un'altra retta s, che passa dall'origine ed incontri r nel punto $A:$ su tale retta fissa poi il punto P dal per cui $|\overline{AP}| = 2$ in modo tale che $A \in \overline{OP}$. Trova una parametrizzazione per la curva descritta da P al variare della retta s. Si suggerisce di considera la pendenza della retta s come parametro per descrivere il luogo richiesto.

[La curva che si origina si chiama **Concoide di Nicomede** e fu studiata, nel II sec. a.C., da Nicomede. Essa è la curva che il matematico utilizzò per risolvere il problema della trisezione dell'angolo.]

(660) Considera la circonferenza di centro $(2,0)$, passante dall'origine del sistema di coordinate; inoltre sia r la retta $x = 1$. Una retta s passante dall'origine del sistema di coordinate intersecherà la circonferenza e la retta rispettivamente nei punti A e B. Trova una parametrizzazione della curva descritta dal punto P della retta s, tale per cui $\overline{OP} = \overline{AB}$. Anche in questo caso si consiglia di utilizzare come parametro la pendenza della retta s.

[La curva che si origina si chiama **Trisettrice di MacLaurin** e fu utilizzata dal matematico scozzese per risolvere il problema della trisezione dell'angolo.]

(661) Considera la circonferenza goniometrica centrata nell'origine del sistema di coordinate ed il suo punto $P(1,0)$. Fissa un altro punto qualsiasi A della circonferenza e trova i punti B e C in modo tale che: $P\hat{O}B = 2\,P\hat{O}A$ e C sia simmetrico di A rispetto all'asse delle ascisse. Trova una parametrizzazione per la curva descritta dal baricentro G del triangolo $\overline{ABC}$. Trova poi una equazione cartesiana che rappresenti la stessa curva. Si suggerisce di porre, come parametro, il valore dell'angolo $P\hat{O}A$

[La curva che si origina si chiama **folium di Cartesio** e fu studiata dalla matematica italiana Gaetana Agnesi.]

(662) Si consideri il luogo geometrico dei punti P del piano per i quali è *costante* il prodotto delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2. Determinare una parametrizzazione per la curva che si genera.

[La curva che si origina si chiama **Curva di Cassini** ; Tra le tante curve di Cassini, che variano, in forma, a seconda della grandezza della costante, si annovera anche la **Lemniscata** , studiata da Bernoulli: quella curva a forma di otto "coricato" a cui ci si è ispirati per indicare l'infinito.]

(663) La **trattrice** della retta è la curva per la quale è costante il segmento di tangenza compreso tra il punto di contatto e una retta prefissata detta *retta base.* Trovare una parametrizzazione per la trattrice, considerando come parametro l'angolo che la retta tangente forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse.

[*Hint:* Si consiglia di scegliere come retta base proprio l'asse delle ascisse. La trattrice fu studiata da Huygens, che le diede anche il nome. Facendo ruotare attorno alla retta base la curva, si ottiene una superficie che viene chiamata ***pseudosfera***.]

(664) Determinare raggio e centro di curvatura della trattrice. Dimostrare che l'evoluta della trattrice è la catenaria (di equazione: $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$).

(665) Determinare la curvatura della parabola $y = x^2 - 2x$ nell'origine del sistema di riferimento e, poi, anche nel suo vertice.

(666) Determinare la curvatura dell'iperbole $xy = 1$ nei suoi vertici.

(667) Trova il valore della curvatura della curva, parametrizzata da $(t^2 - 2, t + t^3)$ per $t = 0$ e $t = 1$.

(668) Trova il valore della curvatura dell'asteroide parametrizzato da $(\cos^3(t), \sin^3(t))$ nel punto corrispondente a $t = \frac{\pi}{4}$.

(669) Si calcoli la lunghezza della curva determinata dalla parametrizzazione $x(t) = 2\cos^3(t)$, $y(t) = 2\sin^3(t)$ per $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Si consideri la parametrizzazione di una curva:

$$\gamma : \, t \mapsto (x(t), y(t)) \qquad t \in [a, b].$$

Allora la derivata di questa funzione esprime la "velocità" con cui il punto si muove sulla curva γ e, dato che $v \cdot t = s$ possiamo dire che l'elemento infinitesimo di curva "è lungo" $\mathrm{d}\, s = |\vec{v}| \cdot \mathrm{d}\, t$, essendo $|\vec{v}| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$. Pertanto, volendo calcolare il valore dell'integrale di una funzione definita sulla curva parametrizzata da γ nell'intervallo $[a, b]$, ovvero:

$$\int_\gamma F = \int_\gamma F(x, y) \cdot \mathrm{d}\, s$$

possiamo dire che esso è uguale -per definizione- a:

$$\boxed{\int_\gamma F(x, y) \cdot \mathrm{d}\, s = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| \mathrm{d}\, t} =$$

$$= \int_a^b F(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, \mathrm{d}\, t.$$

Questo integrale è molto importante nella applicazioni e prende il nome di **integrale curvilineo** (di prima specie) .

(670) Si calcoli l'integrale:

$$\int_\gamma x, \qquad \gamma(t) = (t, t^2), \qquad t \in [0, a], \quad a > 1.$$

(671) Si calcoli l'integrale:

$$\int_\gamma \sqrt{1 - y^2}, \qquad \gamma(t) = (\sin(t), \cos(t)), \qquad t \in [0, \pi].$$

(672) Si calcoli l'integrale:

$$\int_\gamma \frac{x}{1 + y^2}, \qquad \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

(673) Si calcoli l'integrale:

$$\int_\gamma \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \gamma(t) = (2\,(\cos(t) + t\, \sin(t)), 2(\sin(t) - t\cos(t))), \qquad t \in [0, 2\,\pi].$$

(674) Si calcoli l'integrale:

$$\int_\gamma \frac{1}{x}, \qquad \gamma(t) = (t, t\ln(t)), \qquad t \in [1, 2].$$

(675) Determinare il valore dell'integrale curvilineo $\int_\gamma f$ dove:

$$\gamma : \, t \mapsto (t^2, \ln(t)),\ t \in [1, 2] \quad \text{e} \quad f = \frac{y}{\sqrt{1 + 4x^2}}.$$

(676) Determinare il valore dell'integrale curvilineo $\int_\gamma f$ dove:

$$\gamma : \, t \mapsto (t\, \cos(t), t\, \sin(t)),\ t \in [0, 4\pi] \quad \text{e} \quad f = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

(677) Determinare il valore dell'integrale curvilineo $\int_\gamma f$ dove:

$$\gamma : t \mapsto (t^2, t^3+1),\ t \in [0,2] \quad \text{e} \quad f = \frac{2x-y}{\sqrt{4+9x}}.$$

(678) Determinare il valore dell'integrale curvilineo $\int_\gamma f$ dove:

$$\gamma : t \mapsto (t\cos(t), t\sin(t)),\ t \in [0,4\pi] \quad \text{e} \quad f = \frac{1}{1+x^2+y^2}.$$

(679) Determinare il valore dell'integrale curvilineo $\int_\gamma f$ dove:

$$\gamma : t \mapsto (t, \frac{1}{2}t^2),\ t \in [0,\sqrt{\pi}] \quad \text{e} \quad f = \frac{xy\sin(y)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(680) Determinare il valore dell'integrale curvilineo $\int_\gamma f$ dove:

$$\gamma : t \mapsto (\cos(t), \sin(t)),\ t \in [0,2\pi] \quad \text{e} \quad f = x^2+x-2y^2+3y.$$

(681) Determinare il valore dell'integrale curvilineo $\int_\gamma f$ dove:

$$\gamma : t \mapsto (\cos(t), \sin(t)),\ t \in [0,2\pi] \quad \text{e} \quad f = x^2+x-2y^2+3y.$$

(682) Determinare il valore dell'integrale curvilineo $\int_\gamma f$ dove:

$$\gamma : t \mapsto (3\cos(t), 3\sin(t)),\ t \in [0,\frac{3}{2}\pi] \quad \text{e} \quad f = xye^{x^2}.$$

Sulla geometria nello spazio tridimensionale.

(683) Trova la retta passante per i punti $A(3,1,-1)$ e $B(8,-2,5)$.

(684) Trova la retta perpendicolare a quella dell'esercizio precedente e passante per il punto $C(1,1,0)$.

(685) Trova il piano perpendicolare, scrivendone la rappresentazione vettoriale e quella cartesiana, al piano di equazione $3x-y-z+2=0$ e passante per i punti $A(1,-4,3)$ e $B(2,-1,2)$.

(686) Trova il piano parallelo alle rette di equazione $r : \begin{cases} x = 2+3t \\ y = -3+4t \\ z = 2 \end{cases}$

e $s : \begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3z=0 \end{cases}$ e passamte dal punto $P(2,-3,1)$.

(687) Trova la distanza tra il piano di equazione $6x-5y+3=0$ ed il punto $P(7,-1,-4)$.

(688) Trova la distanza tra il piano $x-5y+7z-1=0$ e la retta

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2+3t \\ z = 1+2t \end{cases} .$$

(689) Trova la distanza del punto $P(4,2,-1)$ dalla retta di equazione (vettoriale) $r: \begin{cases} x = -2\,t \\ y = 2+t \\ z = 3\,t \end{cases}$.

(690) Determinare l'equazione vettoriale e quella cartesiana del piano passante per i punti $A(1,1,2)$, $B(-1,3,0)$ e $C(0,0,1)$. Dal punto C condurre la retta perpendicolare (di cui si chiede l'equazione vettoriale) e dire quanto dista tale retta dall'origine del sistema cartesiano.

(691) Sia dato il vettore direzione $\vec{v} = {}^t(-1,1,2)$ e la retta r, avente la sua direzione e passante per $P(2,2,0)$. Dopo averne scritta l'equazione vettoriale, determinare un piano perpendicolare a tale retta e passante dal punto $Q(-1,-1,-1)$. Quanto è lunga la proiezione del vettore $\vec{PQ}$ sulla retta r?

(692) Siano dati i punti $A(0,0,3)$ e $B(1,0,1)$. Determinare la retta r passante per A e B ed il piano π passante per A, B e O, essendo O l'origine del sistema di coordinate. È $r \perp \pi$? Quanto dista il punto $P(3,2,1)$ dalla retta r?.

(693) Considera la retta $r : P + \lambda\vec{v}$, dove $P = (3,0,1)$ e $\vec{v} = {}^t(1,1,1)$. Trovare il piano passante da $A(0,0,-1)$ e perpendicolare alla retta r e dire quanto dista il punto A da r.

(694) Siano dati i tre punti $A(0,0,1)\,B(0,1,0)$ e $C(2,0,0)$. Determinare il piano passante dai tre punti e la distanza dell'origine del sistema di coordinate da tale piano. Può aiutare la conoscenza della retta perpendicolare al piano e passante per l'origine? anche se non lo ritieni utile, comunque scrivine l'equazione vettoriale.

(695) Dati i due vettori $\vec{v} = {}^t(3,1,5)$ e $\vec{w} = {}^t(-1,2,0)$, trova il piano da essi generato e passante dal punto $P(0,0,1)$. Dopo aver scritto l'equazione vettoriale e cartesiana di tale piano, determina la retta ortogonale ad esso e passante da P e dire quanto dista l'origine del sistema di riferimento da tale retta.

(696) Una retta passa dall'origine del sistema di riferimento e dal punto $P(3,1,3)$. Un'altra passa da P e dal punto Q di coordinate $(2,2,5)$. Qual è l'equazione del piano che contiene entrambe le rette? Quanto dista l'origine del sistema di riferimento da tale piano?

(697) Trova il punto di tangenza e l'equazione della sfera di centro $C(-2,1,0)$, il cui piano tangente è dato da $3x-2y+4z-1=0$.

[*Hint:* L'equazione della sfera, ricavata dal Teorema di Pitagora, è data -analogamente a quella della circonferenza- dall'equazione

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = r^2$, essendo $C(x_C, y_C, z_C)$ il centro ed r il raggio. Si ricorda che il piano tangente è perpendicolare al raggio della sfera nel punto di tangenza, per cui si potrebbe pensare di trovare l'intersezione della retta passante per il centro della sfera e diretta secondo la normale al piano, con il piano stesso...]

(698) Una sfera, il cui centro è il punto $C(-2, -1, 2)$, è tangente al piano avente equazione $2x - 2y + z - 9 = 0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

(699) Determinare l'equazione del piano passante dal punto $P(1, 0, -2)$ e parallelo alle due rette di equazione:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases} .$$

(700) Dati i punti $P(2, 4, -8)$ e $Q(-2, 4, -4)$ determina l'equazione della sfera che ha come diametro il segmento $\overline{AB}$; poscia l'equazione del piano tangente alla sfera nel punto P.

Relativi al Capitolo 13

Sulle o.d.e. del primo ordine.

(701) Determina l'integrale generale della seguente O.D.E. del primo ordine:

$$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3.$$

(702) Determina la soluzione generale di

$$xy' - y = y^3.$$

(703) Determina l'integrale generale della seguente O.D.E. del primo ordine:

$$xy' = y + x^2 \cos(x).$$

(704) Determina la soluzione generale di

$$y - xy' = 3(1 + x^2 y').$$

(705) Determina l'integrale generale della seguente O.D.E. del primo ordine:

$$xy' + y - e^x = 0.$$

(706) Determina la soluzione generale di

$$xyy' = 1 - x^2.$$

(707) Determina l'integrale generale della seguente O.D.E. del primo ordine:
$$xy' - \frac{y}{x+1} = x.$$
(708) Determina la soluzione generale di
$$yy' = \frac{1-2x}{y}.$$
(709) Determina l'integrale generale della seguente O.D.E. del primo ordine:
$$y' - y\tan(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$
(710) Determina la soluzione generale di
$$xy' + y = y^2.$$
(711) Determinare la curva, passante per $(1,1)$, la cui tangente in ogni punto ha coefficiente angolare uguale al reciproco dell'ordinata nel punto stesso.

(712) Un recipiente di forma cubica è pieno d'acqua. Essa scola da un piccolo foro situato alla base (orizzontale) del recipiente e, ad ogni istante t (espresso in minuti), la velocità con cui varia l'altezza h (espressa in centimetri) dell'acqua nel recipiente è direttamente proporzionale alla radice quadrata dell'altezza dell'acqua rimanente. Sapendo che nell'istante in cui l'altezza dell'acqua è 100 cm, la velocità con cui varia (questa altezza) è di $-\frac{10}{3}$ cm/min, dopo aver determinato la costante di proporzionalità, dire in quanto tempo (istanti t) si svuota il recipiente.

(713) Determinare la curva, passante per il punto $(1,e)$ il cui prodotto tra le coordinate dei punti uguaglia la metà del coefficiente angolare della retta tangente nel punto stesso.

(714) Le rette tangenti ad una curva di equazione $\gamma : y = f(x)$ variano la propria "pendenza" in modo continuo, da punto a punto, secondo la legge $m(x) = \frac{x}{x^4-3x^2+6}$. Sapendo che la curva passa dal punto $P\left(2, \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right)$, si chiede l'equazione di γ. item Risolvi il seguente P.C. :
$$(1+x^2)y' + y = 0, \quad y(1) = 1.$$
(715) Risolvi la seguente o.d.e. lineare del primo ordine:
$$y' = \frac{x+y}{\sqrt{x}}$$

(716) Risolvi il seguente P.C. :

$$\frac{yy'}{x} + e^y = 0, \quad y(1) = 0.$$

(717) Risolvi la seguente o.d.e. lineare del primo ordine:

$$(1 + x^2)y' = -2xy + \frac{1}{x}$$

(718) Risolvi il seguente P.C. :

$$(1 + e^x)yy' = e^x, \quad y(0) = 1.$$

(719) Risolvi la seguente o.d.e. lineare del primo ordine:

$$y' + \frac{1}{x}y = e^x$$

(720) Risolvi il seguente P.C. :

$$(xy^2 + x) + (x^2y - y)y' = 0, \quad y(0) = 1.$$

(721) Risolvi la seguente o.d.e. lineare del primo ordine:

$$y' = \frac{1}{2}\sin(2x) - y\cos(x)$$

(722) Risolvi il seguente P.C. :

$$y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}, \quad y(0) = 1.$$

(723) Risolvi la seguente o.d.e. lineare del primo ordine:

$$y' = y\tan(x) + \cos(x)$$

(724) Risolvi il seguente P.C. :

$$y'\sin(x) = y\ln(y), \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e.$$

(725) Risolvi la seguente o.d.e. lineare del primo ordine:

$$y' + \frac{1 - 2x}{x^2}y - 1 = 0$$

(726) Risolvi il seguente P.C. :

$$y - xy' = 2(1 + x^2y'), \quad y\,(1) = 1.$$

(727) Risolvi la seguente o.d.e. lineare del primo ordine:

$$y' - \frac{4}{x}y = e^x x^4$$

(728) Il fisiologo tedesco Gustav Fechner studiando che relazione potessere esistere tra stimolo e percezione, ipotizzò che la variazione di uno stimolo è percepita in misura minore quando l'intensità di partenza di tale stimolo è elevata (ovvero se S è lo stimolo e P è la percezione dello stimolo, allora queste sono grandezze inversamente proporzionali: $\frac{dP}{dS} \propto \frac{1}{S}$). Determina la legge a cui obbedisce la percezione di uno stimolo per una costante di proporzionalità pari a $k = 0.1$.

(729) Un reazione chimica bimolecolare è quella in cui le molecole di una sostanza A reagiscono con le molecole di una sostanza B per creare una sostanza X. La *velocità di reazione* è direttamente proporzionale al prodotto della diminuizione delle due sostanze, mano a mano che il tempo passa, rispetto alla quantità x(t) di sostanza X presente al tempo t (ovvero $x'(t) \propto (\alpha - x)(\beta - x)$ essendo α e β le quantità iniziali delle sostanze, rispettivamente A e B). Determina la quantità di sostanza ottenuta X, dopo 10 unità di tempo, nel caso $\alpha = 250$, $\beta = 40$ e la costante di proporzionalità sia $k = 6 \cdot 10^{-4}$.

(730) Dimostra che l'unica curva per la quale le rette normali, in ogni punto, passano tutte da uno stesso punto C prefissato, è la circonferenza centrata in C.

(731) La velocità di raffreddamento di un corpo è direttamente proporzionale alla differenza tra la temperatura dell'ambiente e la temperatura del corpo stesso: questo semplice enunciato è conosciuto come ***legge di raffreddamento di Newton*** . La costante di proporzionalità si chiama *costante di raffreddamento* e dipende dall'oggetto che dovrà raffreddarsi. Ora, supponi che la temperatura ambiente sia di 20 gradi centigradi e che la costante di raffreddamento sia $k = 0,5$. Supponendo che l'oggetto da raffreddare sia inizialmente a 220 gradi centigradi, qual è la temperatura che raggiungerà dopo mezz'ora? Dire dopo quanto tempo la temperatura raggiunta sarà la metà di quella iniziale.

(732) In una cisterna sono stati messi 800 litri di acqua e sale, con una concentrazione del sale di 0,1 Kg/lt. Si immette nella stessa cisterna, alla velocità di 30 lt/min, una seconda miscela di acqua e sale con concentrazione del sale di 0,2 Kg/lt. Supponi ora -anche se non è realistico- che i due liquidi diventino istantaneamente un unico liquido a concentrazione omogenea in tutta la cisterna e che esso venga fatto fuoriuscire da uno rubinetto posto sul fondo alla velocità di 15 lt/min. Con

quale legge varia la quantità di sale contenuta nella cisterna, al variare del tempo t? insomma, trova la "legge oraria" $q = q(t)$.

(733) Si prevede di fare una campagna pubblicitaria per raggiungere un milione di potenziali consumatori. Si supponga che la velocità con cui il numero dei potenziali consumatori viene a conoscenza del nuovo prodotto è direttamente proporzionale al numero delle persone che ancora non sono state raggiunte dal messaggio pubblicitario e che all'inzio della campagna pubblicitaria nessuno conosca il nuovo prodotto. Se dopo sei mesi solo un quarto dei potenziali consumatori è stato raggiunto dalla pubblicità del nuovo prodotto, stima quante persone saranno venute a conoscenza del prodotto dopo due anni. Quanto tempo ci vorrà acciocché il 90% dei potenziali consumatori venga a conoscenza del nuovo prodotto?

Sulle o.d.e. del secondo ordine.

(734) Determinare l'integrale generale della seguente o.d.e. del secondo ordine:
$$y'' - 9y = 0.$$

(735) Determinare l'integrale generale della seguente o.d.e. del secondo ordine:
$$y'' - 2y' + y = 0.$$

(736) Risolvi il seguente P.C. :
$$y'' - 2y' + 10y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 10.$$

(737) Determinare l'integrale generale della seguente o.d.e. del secondo ordine:
$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

(738) Determinare l'integrale generale della seguente o.d.e. del secondo ordine:
$$y'' + 4y' = 0.$$

(739) Determinare l'integrale generale della seguente o.d.e. del secondo ordine:
$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

(740) Risolvi il seguente P.C. :
$$y'' - 16y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 20.$$

(741) Risolvi il seguente P.C. :
$$y'' + 6y' + 9y = 0, \qquad y(0) = -4, \qquad y'(0) = 14.$$

(742) Risolvi il seguente P.C. :

$$4y'' - 4y' - 3y = 0, \qquad y(-2) = e, \qquad y'(-2) = -\frac{1}{2}\, e.$$

(743) Determinare l'integrale generale della seguente o.d.e. del secondo ordine:

$$y'' + 25y = 0.$$

(744) Determinare l'integrale generale della seguente o.d.e. del secondo ordine:

$$y'' - 8y' + 16y = 0.$$

(745) Determinare l'integrale generale della seguente o.d.e. del secondo ordine:

$$y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0.$$

(746) Determinare l'integrale generale della seguente o.d.e. del secondo ordine:

$$8y'' - 2y' - y = 0.$$

(747) Determinare l'integrale generale della seguente o.d.e. del secondo ordine:

$$2y'' + 10y' + 25y = 0.$$

(748) Risolvi il seguente P.C. :

$$y'' + 2y' + 2y = 0. \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

(749) Risolvi il seguente P.C. :

$$2y'' + y' - y = 0, \qquad y(4) = e^2 - e^{-4}, \qquad y'(4) = \frac{1}{2}e^2 + e^{-4}.$$

(750) Trova la distanza percorsa da una particella la cui accelerazione sia inversamente proporzionale al quadrato della distanza da un punto fisso.

(751) Un liquido di densità uniforme μ si trova in un tubo a "U" di sezione costante S. Se poniamo il livello zero essere quando il liquido è in equilibrio ad altezza $x = 0$, indicata con l la lunghezza del liquido stesso dentro il tubo, determina la legge del moto quando il liquido viene sollevato, in uno dei due rami del tubo, ad una altezza x_0 rispetto alla posizione di equilibrio e poi viene rilasciato.

[*Hint:* Quando il liquido non è in posizione di equilibrio, dalla parte del tubo dove è stato sollevato, esso pesa di più e questo peso aggiuntivo può essere quantificato, in un modello dinamico differenziale, da un forza, che tende a riportare il liquido in posizione di equilibrio, data da $F = -2xS\mu g$, mentre la massa del liquido in movimento è $lS\mu$, tramite la seconda legge della dinamica si ricava l'o.d.e. che modellizza la situazione...]

(752) Un corpo di massa m è sospeso ad una molla avente costante elastica k. Il corpo viene tenuto fermo nella posizione a riposo della molla: all'istante iniziale $t = 0$, esso viene lasciato libero di muoversi. Determina la legge oraria del moto del corpo.

[*Hint:* Per via della seconda legge della dinamica, ricordando che la forza elastica è: $F_e = -k\,\Delta x$ e la forza peso: $P = m\,g$...]

Sul campo dei numeri Complessi.

(753) Sia $z_1 = 2+3\,i$ e $z_2 = -3+2\,i$. Effettua le seguenti operazioni:

$$z_1 + z_2; \qquad z_1 \cdot z_2; \qquad z_1 - z_2$$

(754) Semplifica l'espressione:

$$(3 + 2\,i) \cdot (3 - 2\,i) + (2 - 4\,i) \cdot 3\,i - (6 + 2\,i)^2.$$

(755) Semplifica l'espressione:

$$(1 + i)^5 + 4i$$

(756) Scrivere $z = 2 + 2i$ sotto forma esponenziale.

(757) Scrivere $z = -\sqrt{3} - i$ sotto forma esponenziale.

(758) Effettuare la divisione tra i numeri complessi:

$$z_1 = -2 + 3\,i, \quad z_2 = 1 + 3\,i.$$

(759) Effettuare la divisione tra i numeri complessi:

$$z_1 = 1 + 3\,i, \quad z_2 = -2 - \,i.$$

(760) Effettuare la divisione tra i numeri complessi:

$$z_1 = 3 - 1\,i, \quad z_2 = 2 + \,i.$$

(761) Effettuare la divisione tra i numeri complessi:

$$z_1 = \,-i, \quad z_2 = 4 - \,i.$$

(762) Effettuare la divisione tra i numeri complessi:

$$z_1 = 3 + 2\,i, \quad z_2 = 1 - 4\,i.$$

(763) Effettuare la divisione tra i numeri complessi:

$$z_1 = 5 - \,i, \quad z_2 = 2 - 3\,i.$$

(764) Effettuare la divisione tra i numeri complessi:

$$z_1 = 2\,i, \quad z_2 = 3 + 2\,i.$$

(765) Effettuare la divisione tra i numeri complessi:

$$z_1 = -1 + \,i, \quad z_2 = -1 + 2\,i.$$

(766) Determina le radici quinte dell'unità.

(767) Risolvi l'equazione:

$$z^3 = 4\,(1 + \sqrt{3}\,i)$$

[*Hint:* Si utilizzi la formula di de Moivre...]

(768) Risolve la seguente equazione:

$$(|z|^2 + |z| - 6) \cdot (z^3 - i) = 0$$

essendo $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ e disegnare le soluzione nel piano di Gauss-Angard.

(769) Risolve la seguente equazione:

$$(|z|^2 + 2\,|z| - 15) \cdot (z^3 + 1) = 0$$

essendo $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ e disegnare le soluzione nel piano di Gauss-Angard.

(770) Una ***trasformazione di Möbius*** è una funzione del tipo: $f(z) = \frac{a\,z+b}{c\,z+d}$ con a, b, c, d e z elementi di $\mathbb{C}$, e $ad - bc \neq 0$; esse sono fondamentali nello studio della geometria proiettiva, oltre che per l'analisi complessa. Data la trasformazione di Möbius

$$f(z) = \frac{-1 + i\,z}{i\,z + i}, \qquad z \neq -1$$

scrivere, in forma algebrica, le controimmagini di $w = 3 + i$, ovvero i numeri complessi z per i quali $f(z) = w$.

(771) Fondamentale nello studio di tutta la Matematica è la definizione di ***punti fissi*** : data una funzione $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$, essendo $\mathbb{S}$ un insieme numerico generico, un punto $s \in \mathbb{S}$ è detto fisso se $f(s) = s$, ovvero se la trasformazione conseguente all'applicazione della funzione f lascia "immutato" il punto s. Trovare i punti fissi della trasformazione di Möbius dell'esercizio precedente.

(772) Sia $z^* = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Determinare $(z^*)^{28}$ (in forma algebrica).

[*Hint:* Si utilizzi la formula di de Moivre e poi si trasformi la forma trigonometrica in forma algebrica...]

(773) Si trovino, se ci sono, i punti fissi della funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da $f(z) = e^{i\,\frac{\pi}{2}} \cdot z + i + 1$.

Relativi al Capitolo 14

Sugli indici di posizione e di dispersione.

(774) Per pianificare i trasporti di un centro cittadino, si effettuano delle rilevazioni in corrispondenza di un punto nevralgico, in due diverse fasce orarie. Vengono rilevati il numero dei veicoli ed il relativo numero di occupanti. I dati sono riportati nella seguente tabella:

Ora di punta		Altro orario	
Nr. Occupanti	Nr. Veicoli	Nr. Occupanti	Nr. Veicoli
1	250	1	77
2	135	2	75
3	42	3	28
4	47	4	0
5	0	5	34

Si chiede di dare un descrizione, mediante indici statistici (**Valore atteso**, **Moda** [6] , **Varianza**), della situazione nelle due fasce orarie.

[*Tratto dalla "Maturità scientifica" a.s. 1993/94- sessione suppletiva -.*]

(775) Calcola media e varianza del numero degli spettatori presenti in una sala cinematografica, per come sono riportati dalla seguente rilevazione:

	Lunedì	Martedì	Mercoledì	Giovedì
Nr. Spettatori	215	200	270	280

	Venerdì	Sabato	Domenica
Nr. Spettatori	350	400	420

(776) Nella seguente tabella sono riportate le distribuzioni delle durante, in anni (n=numero di anni) delle pene per i condannati nel 1990 ad almeno un anno di detenzione, con esclusione dell'ergastolo, suddivisi per sesso, secondo una indagine campionaria:

	$1 \leqslant n < 2$	$2 \leqslant n < 5$	$5 \leqslant n < 10$	$10 \leqslant n < 15$	$15 \leqslant n < 30$
Maschi	200	329	168	91	154
Femmine	13	17	11	5	6

Si stimi la durata media delle pene per i maschi e per le femmine e le rispettive deviazioni standard, assumendo come valore rappresentativo di ogni classe, il valore medio.

[*Tratto dalla "Maturità scientifica" PNI 1995- sessione suppletiva -.*]

[6] La *Moda* è definita come "il valore più frequente".

(777) Siano date le due *v.a.* X e Y distribuite secondo le tabelle seguenti:

X	1	2	3
$Pr(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Y	2	4	6
$Pr(Y = y_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

Dopo aver trovato i valori attesi di ciascuna *v.a.*, dire quale delle due presenta maggiore variabilità.

(778) Data la *v.a.* X distribuita secondo la seguente tabella:

X	12	x_2	10	24	3	2
$Pr(X = x_1)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	p_4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

determinare i valori mancanti x_2 e p_4 sapendo che $\mathbb{E} = \frac{79}{6}$.

(779) Si misura per 10 volte la lunghezza di un ago e si compila la seguente tabella:

cm									
3.01	3.10	2.99	3.02	3.00	2.98	3.03	3.01	3.00	2.92

Determinare la media aritmetica e lo scarto quadratico medio.

(780) Il quantitativo di zucchero presente nel mosto prima della fermentazione consente di prevedere il grado alcolico post-fermentazione e per determinare il quantitativo di zucchero, in genere, si va a considerare il peso specifico del mosto. Si sono rilevati i seguenti valori di peso specifico del mosto in gr/ml per 10 aziende agricole che forniscono uva ad un grande produttore locale:

Peso specifico gr/ml									
1.68	1.72	1.83	1.70	1.70	1.69	1.70	1.72	1.73	1.62

Determinare la media aritmetica, la mediana [7], la moda e la varianza. Se si elimina il valore maggiore e quello minore, come cambiano i valori trovati?

(781) Si osserva una *v.a.* che presenta i seguenti dieci valori in tabella:

X	10.1	10.3	9.7	9.9	10	10.5	8.5	11	9.75	10.25

Determinare il valore medio e lo scarto quadratico medio della *v.a.* X.

(782) Su 1000 pezzi prodotti da un'industria, si sono rilevati al massimo 8 pezzi difettosi. Si conosce la distribuzione di probabilità della *v.a.* X = "numero di pezzi difettosi su 1000 prodotti", che è riportata nella seguente tabella:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$Pr(X)$	0.04	0.06	0.1	0.2	0.3	0.20	0.05	0.03	0.02

[7] La **mediana** , per definizione, è il valore che divide la distribuzione in due parti uguali: prima e dopo di esso c'è lo stesso numero di valori

Calcola il valore atteso di pezzi difettosi, la varianza, lo scarto quadratico medio e, dato che ci sei, anche la probabilità di non trovare più di cinque pezzi difettosi.

(783) Un commerciante può scegliere di vendere due merci dello stesso tipo, ma prodotti da aziende differenti. I guadagni (in euro), che le aziende gli prospettano, sono *v.a.* le cui distribuzioni di probabilità sono compensante nelle seguenti due tabelle:

X(prima merce)	10000	20000	30000	40000
$Pr(X)$	0.20	0.30	0.40	0.10

Y(seconda merce)	20000	30000	40000	50000	60000
$Pr(Y)$	0.40	0.20	0.10	0.20	0.10

Dopo aver determinato il valore atteso e lo scarto quadratico medio, dire quale merce conviene commercializzare.

Sulla distribuzione binomiale.

(784) Da un mazzo di carte napoletane si estrae sei volte una carta (rimettendola ogni volta nel mazzo e rimischiando). Studiare e rappresentare graficamente la variabile aleatoria $X =$ "numero di volte che si presenta una carta di spade". Quanto vale la probabilità che si ottengano almeno tre successi?

(785) In una popolazione la probabilità di nascite maschili è 0.46. Scelta a caso una famiglia di cinque figli, studiare e rappresentare graficamente la variabile aleatoria $X =$ "numero figli maschi". Quanto vale la probabilità che i figli maschi non siano più di tre? Infine determina il valore atteso e la deviazione standard di numero di figli maschi in un campione di 250 famiglie.

(786) In una popolazione la probabilità di essere affetti da una certa malattia è del 20%. Scelti a caso dieci persone, studiare e rappresentare graficamente la variabile aleatoria $X =$ "numero persone affette dalla malattia". Quanto vale la probabilità di riscontare non più di due persone affetta dalla malattia? Infine determina il valore atteso e la deviazione standard di persone che presentano la malattia in un gruppo di 300 individui.

(787) Da un mazzo di carte napoletane si estrae per otto volte una carta, rimettendola ogni volta nel mazzo e rimischiando. Studiare e rappresentare graficamente la variabile aleatoria $X =$ "numero di volte che si presenta una figura". Quanto vale la probabilità che si ottengano non più di cinque successi?

(788) Si lanciano dieci volte due dadi. Studiare e rappresentare graficamente la variabile aleatoria $X =$ "numero di volte che si

presenta una somma minore di 6". Quanto vale la probabilità che si ottengano almeno tre successi?

(789) Un dado viene lanciato sette volte. Studiare e rappresentare graficamente la variabile aleatoria $X =$ "numero di volte che si presenta un numero primo". Quanto vale la probabilità che si ottengano non più di 4 successi?

(790) Ad un esame la si è avuta una media di bocciati del 60%. Su otto candidati, quanto vale la probabilità che almeno due siano stati respinti? e su 300 candidati, qual è il valore atteso di individui respinti e quanto vale la deviazione standard?

(791) In una popolazione una data caratteristica genetica è presente nel 15% degli individui. Se si selezionano 5 individui a caso, determinare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria $X =$ numero di individui in cui è presente la data caratteristica. In una popolazione di un milione e mezzo di individui, quante persone ci si aspetta che abbiano quella data caratteristica genetica? e con quale deviazione standard?

(792) Una apparecchiatura produce mediamente 4 pezzi difettosi ogni 10. Calcolare la probabilità che su 6 pezzi prodotti, il numero dei pezzi difettosi sia dispari. Mediamente, su 100 pezzi controllati, quanti se ne dovrebbero trovare di difettosi?

(793) È statisticamente dimostrato, anche se non è stata ancora trovata una spiegazione esauriente, che in tutte le popolazioni umane nascono più maschi che femmine, con un rapporto di 105-106 maschi ogni cento femmine. Determinare la probabilità, in una famiglia di 4 figli, di avere esattamente due maschi. In una popolazione tipo quella calabrese, che conta circa 1800000 persone, qual è il numero medio di maschi che ci si aspetta di trovare?

Sulla distribuzione di Poisson.

(794) Una malattia colpisce il 5% della popolazione. Si estragga un campione di 20 persone e si calcoli la probabilità che nessuno si colpito dalla malattia; quanto vale la probabilità che esattamente 5 persone siano state colpite dalla malattia?

(795) Un macchinario produce un pezzo difettoso su 100. In un campione di 30 pezzi, quanto vale la probabilità che vi siano esattamente 5 pezzi difettosi? e che non ve ne siano affatto?

(796) Il numero di chiamate telefoniche ricevute in un'ora da una centralina è mediamente 5. Determinare la probabilità che in un'ora non si abbiano chiamate. Quanto vale la probabilità che ne arrivino esattamente 2?

(797) Ad un casello autostradale arrivano in media 30 auto all'ora. Quanto vale la probabilità che in 5 minuti arrivi un veicolo? e che ne arrivino 2?

(798) Un programma televisivo è gradito dal 2% dei telespettatori. Se si chiamano 30 persone, quanto vale la probabilità che a nessuno sia piaciuto quel programma? e che sia gradito a 5 persone?

(799) Il 2% dei pezzi prodotti da una fabbrica sono difettosi. Calcola la probabilità che in un lotto di 100 pezzi ve ne siano 3 difettosi. E nessuno?

(800) La probabilità che una macchina si guasti in un giorno è $0,02$. Calcola la probabilità che in un anno si abbiano almeno 10 guasti.

(801) Un tale afferma che riesce a scrivere velocemente al PC compiendo mediamente un errore di battitura a pagina. Quanto vale la probabilità che estratta a caso una pagina da un libro trascritto da questo tizio, si trovino esattamente 4 errori? e che una sua pagina contenga più di tre errori?

(802) In responsabile di controllo della qualità di una data azienda ha riscontrato 10 difetti di produzione negli ultimi 100 gg. Qual è la probabilità che nei prossimi 3 gg trovi almeno due altri difetti?

(803) Una compagnia assicurativa riceve in media cinque richieste di rimborso al giorno. Con quale probabilità in un giorno arrivano tre richieste? e quattro richieste?

(804) Si sa che la probabilità di errore in ricezione di una sequenza di 150 segnali trasmessi, con modalità statisticamente indipendente, è $p = 0.02$. Determinare la probabilità che due dei segnali ricevuti siano errati.

(805) In una regione si verifica un terremoto di magnitudo 3,5 ogni 50 anni. Qual è la probabilità che se ne verifichi almeno uno nei prossimi 50 anni?

(806) Si supponga che il numero delle chiamate che arrivano ogni secondo ad un centralino telefonico sia una *v.a.* di Poisson di media 5. Determinare la probabilità che in un determinato secondo non arrivi nessuna chiamata. Supponendo che il centralino sia in grado di soddisfare non più di 10 chiamate al secondo, calcolare la probabilità di trovarlo occupato.

(807) Noleggio un'auto. Due volte su centro questa non parte! se in una vacanza la avvio per 200 volte, in media quanti mancate partenza mi aspetto di avere? quanto vale la probabilità che non mi lasci mai a piedi?

(808) Una macchina produce in media due pezzi difettosi ogni 400 prodotti. L'incaricato al controllo della qualità estrae un campione di 80 pezzi. Qual è la probabilità che nessuno di questi sia difettoso?

(809) Tassi elevati di inquinamento atmosferico possono determinare reazioni allergiche gravi. Durante un mese (30 giorni), nel pronto soccorso di un ospedale si sono avuti 27 ricoveri urgenti. Può essere ragionevole ipotizzare che gli eventi abbiano una distribuzione giornaliera costante, in accordo con la legge di Poisson. Se X rappresenta la *v.a.* che "conta" il numero di casi di allergia che si presentano al pronto soccorso in un dato giorno, calcola la probabilità $P_n = Pr(X = n)$ di avere n casi di allergia al giorno, per $n = 0, 1, \dots 8$.

(810) Da una rilevazione risulta che il numero di incidenti sul lavoro, avvenuti in una azienda in un mese, è una *v.a.* distribuita secondo una Poisson con valor medio 1.5. Trova la probabilità che in un mese non ci siano incidenti. Qual è la probabilità che nel mese ci siano più di due incidenti?

(811) Un negoziante ha constatato che un articolo viene venduto mediamente una volta al giorno. Quanti di questi articoli deve tenere in magazzino, per essere sicuro che riesca a soddisfare la richiesta della clientela, per un periodo di una settimana lavorativa, con probabilità del 95%?

(812) In una particolare contea statunitense, il numero medio di suicidi registrati ogni mese è 2.75. Assumendo che il numero di suicidi segua una distribuzione di Poisson, qual è la probabilità che non si registri alcun suicidio durante un determinato mese? e che si registrino al massimo 4 suicidi?

Sulla distribuzione geometrica.

(814) Ladislaus von Bortkiewicz (1868 – 1931), prendendo i dati dell'armata prussiana del XIX secolo, per 20 anni ha contato -in 10 corpi d'armata- il numero di soldati che ogni anno morivano a causa di un calcio di mulo; ha quindi classificato i decessi nei 200 eventi (20 corpi d'armata per 10 anni), ottenendo questa tabella:

Numero decessi	0	1	2	3	4
Eventi osservati	109	65	22	3	1

Determinare la probabilità che ogni anno, per corpo d'armata, ci sia un morto per colpa di un calcio di mulo. Qual è la probabilità che prima di osservare un morto per calcio di un mulo, si debbano osservare tre morti per diversi motivi?

(815) In una produzione di chiodi con macchina automatica, in media un 5% della produzione viene scartata perché inferiore al minimo permesso di 3 cm. Uno schema di controllo consiste nel prendere chiodi a caso dalla produzione e nel contare quanti ne vengono presi prima di prenderne uno imperfetto. Si X la *v.a.* che "conta" il numero di pezzi buoni prima di incontrarne uno difettoso e rappresenta, in una tabella di distribuzione, la *v.a.* X fino al valore 4.

(816) In un'analisi di laboratorio, un esperimento ha il 30% di probabilità di dare una risposta positiva. Quante prove occorre fare per avere una probabilità del 90% di avere una risposta positiva?

(817) Di un certo processo di produzione si conosce che, in media, 1 prodotto su 100 è difettoso. Qual è la probabilità che il terzo prodotto controllato sia il primo identificato come difettoso?

(818) Ad un centralino telefonico tutte le linee sono occupate. Sapendo che p = 0.05 è la probabilità di ottenere una linea libera in un momento di massima affluenza di telefonate, calcolare la probabilità che siano necessari 5 tentativi prima di trovare la linea libera.

(819) Si lancia ripetutamente una moneta truccata, e si indica con T il numero di lanci necessario per ottenere testa per la prima volta. Si sa che $Pr(T > 3) = \frac{8}{27}$. Dopo aver calcolato la probabilità che esca testa, calcola la probabilità che in 4 lanci della moneta esca tre volte testa.

(820) Si lancia un dado e sia S il numero di lanci necessario per ottenere 4 per la prima volta. Trova la distribuzione di S e calcolane media e varianza.

(821) Dimostra che la distribuzione geometrica è **priva di memoria,** ovvero che:

$$Pr(X = m + n|X > m) = Pr(X = n).$$

[*Hint:* Utilizza la definizione di probabilità condizionale...]

(822) In una località turistica la probabilità che piova in un giorno del mese di agosto è $p = 0.05$. Assumendo l'indipendenza delle condizioni meteo da un giorno all'altro, qual è la probabilità che la prima pioggia del mese avvenga a ferragosto? e prima del 15?

(823) Uno sciatore ha probabilità di completare un percorso di slalom, senza incidenti, di 0.75. Qual è la probabilità che la prima volta che il percorso viene effettuato senza errori è nel

terzo tentativo? Mediamente, quanti tentativi deve fare per concludere un percorso senza errori?

Sulla distribuzione normale.

(824) La lunghezza di una vite costruita da un macchinario di una certa azienda è una $V.A. \sim \mathcal{N}\left(10, \sqrt{\frac{1}{200}}\right)$. Trovare la probabilità di rifiuto se le dimensioni accettabili devono essere di 10 ± 0.05.

(825) La produzione di una segheria automatica genera una V.A. normalmente distribuita con legge $\mathcal{N}(20, 0.2)$. Determina la probabilità a ché il pezzo tagliato differisca dal valore dato (20 cm) di meno di 0.3 cm.

(826) Il valore medio e lo scarto quadratico medio dei voti di un compito in Classe sono $\mu = 7.4$ e $\sigma = 1.2$. Supponendo una distribuzione normale dei voti, determinare la probabilità che i voti siano compresi tra il 7 ed il 9.

(827) Si lancia una moneta "regolare" 1000 volte. Qual è la probabilità di ottenere testa tra i 520 e le 550 volte? (considera il valore medio e lo scarto quadratico medio, come dato dalla distribuzione binomiale, ovvero $\mu = np$ e $\sigma = \sqrt{npq}$ ed utilizza la distribuzione normale...)

(828) Si fanno 800 partite a carte, che consistono nell'estrarre la carta più alta. Qual è la probabilità che il "re" si presenti più di 120 volte? (considera il valore medio e lo scarto quadratico medio, come dato dalla distribuzione binomiale, ovvero $\mu = np$ e $\sigma = \sqrt{npq}$ ed utilizza la distribuzione normale...)

(829) Si lancia una moneta "regolare" per ben 2500 volte. Determina la probabilità che il numero delle volte che si presenta "testa" sia compreso tra 1250 e 1260. (considera il valore medio e lo scarto quadratico medio, come dato dalla distribuzione binomiale, ovvero $\mu = np$ e $\sigma = \sqrt{npq}$ ed utilizza la distribuzione normale...)

(830) La probabilità di rifiuto nella fabbricazione di un certo tipo di pezzo è $p = 0.02$; Qual è la probabilità che in 1000 pezzi scelti a caso, il numero dei pezzi difettosi non superi 25? considera il valore medio e lo scarto quadratico medio, come dato dalla distribuzione binomiale, ovvero $\mu = np$ e $\sigma = \sqrt{npq}$ ed utilizza la distribuzione normale...)

(831) Si spara su un bersaglio che ha la forma di una striscia larga 20 mt. Il cannone viene puntato verso la linea mediana della

striscia, che è ortogonale al piano della traiettoria del proiettile. Lo scarto quadratico medio della traiettoria del proiettile è $\sigma = 8$ mt. L'errore sistematico di "colpo corto" è di 3 mt. Trova la probabilità che la striscia sia centrata dal colpo.

(832) Le altezze di 800 giovani studenti sono normalmente distribuite con valore medio 168 cm e scarto quadratico medio 12 cm. Trova il numero degli studenti con altezze comprese tra 165 e 177 cm. Quanti sono quelli con altezza superiore ai 182 cm?

[*Hint:* Utilizza la distribuzione normale per determinare le probabilità e poi pensa alla binomiale per stimare il numero richiesto...]

(833) Nel mese di giugno la temperatura T è normalmente distribuita con valore medio 23 gradi celsius e scarto quadratico medio 5 gradi. Si trovi la probabilità che, in un dato giorno, la temperatura sia compresa tra i 24 gradi ed i 27 gradi.

Esercizi di riepilogo: di tutto un po'

(Gli esercizi che seguono sono stati pensati per divertire il lettore più preparato, ovvero colui che ha già completato la lettura del libro e, quindi, ha tutte "le carte in regola" per poter risolvere problemi di vario tipo, non essendo indicati i capitoli di riferimento, per gli argomenti utili all'impostazione della soluzione.)

(834) La scala Richter definisce la magnitudo M di un sisma in funzione dell'energia sviluppata E tramite la formula:

$$M = \frac{2}{3}\ln\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

a) Calcolare E_0 sapendo che una $M = 5,5$ corrisponde ad un'energia $E = 10^{13}$ *Joule*
b) L'impatto nello Yucatan dell'asteroide che causò l'estinzione dei dinosauri è stato stimato come un evento di magnitudo $M = 13$. Quanti *Joule* vennero rilasciati in quel cataclisma?
c) Quale fu la magnitudo della bomba Tsar da 50 $Megaton = 21 \cdot 10^{16}$ *Joule*?

(835) La giuria di un incontro di pugilato è composta da 3 esperti il cui voto decreta, a maggioranza, la vittoria "ai punti" di uno dei contendenti. Posto che la probabilità di valutare correttamente l'incontro da parte di ciascun giudice è pari a $p > 50\%$ dimostrare che una siffatta giuria è più valida di un singolo giudice.

(836) Dati tre numeri positivi a, b, c sapendo che, per x infinitesimo (molto più piccolo di 1):

$$e^{rx} \approx 1 + rx \quad ovvero \quad (1 + rx)^{\frac{1}{x}} \approx e^r$$

Provare che, per x infinitesimo:

$$\left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} \approx \sqrt[3]{abc}$$

[*Hint:* Si ricordi che $a^x = e^{\ln(a)x}$]

(837) Noto che, per x molto più piccolo di n :

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \approx e^{-x} \qquad ovvero \qquad 1 - \frac{x}{n} \approx e^{-\frac{x}{n}}$$

provare che, per k molto minore di n si ha:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{n^k} \approx e^{-\frac{k(k-1)}{2n}}$$

ed utilizzare tale risultato per calcolare la probabilità che tra 20 persone ve ne siano almeno 2 nate lo stesso giorno.

(838) La *magnitudine* (apparente) di una stella è definita dalla formula:

$$M = 6 - 2,5 \cdot \ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Ove I è l'intensità luminosa percepita ed I_0 è quella di una stella appena visibile. Sapendo che l'intensità luminosa di una stella varia con l'inverso del quadrato della distanza r, ovvero $I = kr^{-2}$ e sapendo che il Sole ha una magnitudine apparente $M = -26,74$ e si trova ad $r = 15 \cdot 10^7\ Km$, calcolare la magnitudine che avrebbe se si trovasse ad $r_0 = 3 \cdot 10^{14}\ Km$

(839) Una particella rimbalza tra due pareti opposte con probabilità p di essere riflessa e $1 - p$ di essere assorbita a ciascun urto. La particella si muove inizialmente verso la parete di sinistra. Calcolare la probabilità $P_n(S)$ che la particella venga assorbita dalla parete di sinistra e $P_n(D)$ dalla parete di destra, all'n-esimo urto sulla stessa. Calcolare infine le probabilità totali $Pr(S)$ e $Pr(D)$ verificando che $Pr(S) + Pr(D) = 1$

[*Hint:* Si ricordi che: $1 + p^2 + p^4 + p^6 \ldots = \frac{1}{(1-p^2)}$]

(840) Tracciare un grafico qualitativo della funzione:

$$f(x) = e^{-x}\cos(x), \qquad x \geqslant 0$$

In particolare provando che il suo grafico è tangente a quello di e^{-x} in tutti i punti in cui essi si toccano (ovvero e^{-x} è l'*inviluppo* di $f(x)$).

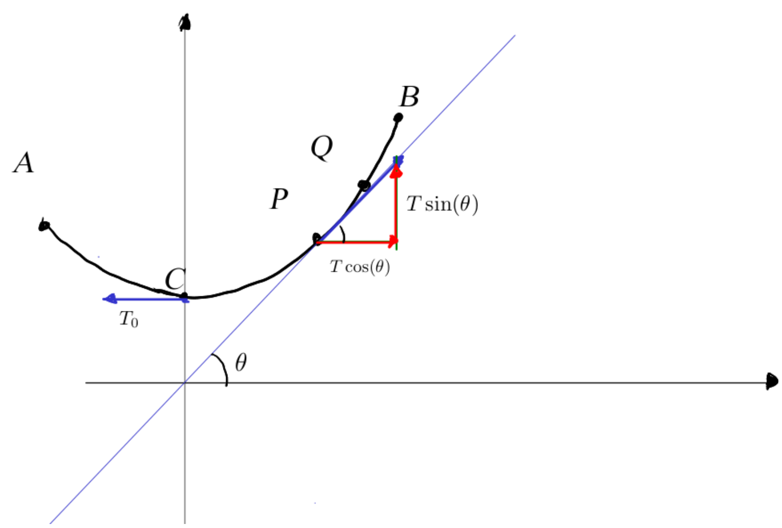
(841) Assegnate le matrici

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \qquad e \qquad R = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

i. Dimostrare che l'equazione $\det(S - xI) = 0$ ha sempre due soluzioni distinte, oppure $S = aI$

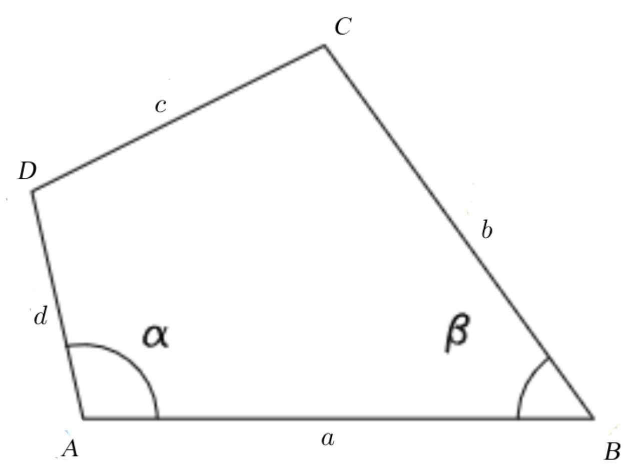
ii. Dimostrare che $\det(R - xI) = 0$ non ha soluzioni, oppure $R = aI$

(842) *[Problema del cavo appeso]:* Determinare la forma del cavo che unisce due punti A e B soggetto unicamente alla forza del suo peso.



[*Hint:* Questo problema fu risolto per la prima volta da John Bernoulli attorno al 1700 che dimostrò, ipotizzando il cavo di peso omogeneo ed inestensibile, assumere la forma di una ***catenaria.*** Puoi arrivare all'equazione della curva in modo diverso da come fece Bernoulli, considerando la figura di cui sopra. Sia ρ la densità del cavo (kg/mt) e fissa un punto P, spostandoti successivamente nel punto Q. Da C inizia a misurare l'ascissa curvilinea s. La tensione, che si esercita in direzione tangente su ciascun punto del cavo, sia T e sia θ l'angolo la la retta tangente in P forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse. A questo punto puoi considerare che la componente orizzontale $T_x = T\cos(\theta)$ non viene modificata se si passa da un punto P ad un altro qualsiasi Q, dato che l'unica cosa che viene modificata nel passaggio da un punto all'altro è la componente verticale della forza peso, dovuta al fatto che si "aggiunge" massa a quella che si considerava precedentemente. Se T_0 è la tensione nel punto C, allora $T_x = T_0$. D'altra parte, la componente verticale T_y della tensione, passando dal punto P al punto Q, aumenta di $\rho \cdot \Delta s$, essendo Δs la distanza, in ascissa curvilinea, $d(P,Q)$. Quindi $\Delta T_y = \rho\,\Delta s$ e passando ad incrementi infinitesimi: $\frac{\mathrm{d}\,T_y}{\mathrm{d}s} = \rho$. Integrando ed imponendo che $T_y = 0$ nel punto C, si ottiene: $T_y = \rho \cdot s$. Mettendo a rapporto con T_x si perviene alla scrittura: $\frac{T_y}{T_x} = \frac{\rho\, s}{T_0}$ e sostituendo le scritture equivalenti $T_y = T\sin(\theta)$ e $T_x = T\cos(\theta)$, si ottiene: $\frac{\cancel{T}\sin(\theta)}{\cancel{T}\cos(\theta)} = \frac{\rho\, s}{T_0}$ e, in ultimo, considerando che $\tan(\theta)$ non è altro che il coefficiente angolare della retta tangente: $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\rho\, s}{T_0}$. Basta ora considerare che $\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,x} = \sqrt{1+(y')^2}$, sostituire la derivata con quanto precedentemente trovato, invertire il rapporto e determinare x come integrale in $\mathrm{d}\,s$ di... per ricavare l'equazione cartesiana, si può invertire $x = x(s)$ per determinare $s = s(x)$ e, sostituendo in $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\rho\, s}{T_0}$ integrare quest'ultima equazione...]

(843) Dimostra la ***formula di camminamento*** per i quadrilateri, ovvero, facendo riferimento alla seguente figura:



$$S = \frac{1}{2} \cdot \left(d \cdot a\, sin(\alpha) + a \cdot b\, \sin(\beta) - d \cdot b\, \sin(\alpha+\beta)\right).$$

(844) Quando un raggio di luce incide su una lastra a facce piane parallele e trasparenti, posta in un mezzo omogeneo (per esempio nell'aria) e la attraversa, riemerge sulla seconda faccia parallelamente alla direzione con cui ha inciso sulla prima. Il raggio, però, risulta spostato rispetto al raggio incidente di una distanza d. Dimostra che:

$$d = \frac{s \cdot \sin(i-r)}{\cos(r)},$$

essendo s lo spessore della lastra, i e r gli angoli, rispettivamente, di incidenza e di rifrazione relativamente alla prima faccia.

(845) Uno speciale filtro è in grado di ridurre del 30% un particolare tipo di impurità presente nell'acqua. Sapendo che con l'utilizzo di tre filtraggi successivi l'impurità risulta ridotta a 35mg per ogni litro d'acqua, determinare:
a) la quantità di impurità per litro d'acqua presente prima del filtraggio;
b) il numero minimo di filtraggi necessari complessivamente per ridurre l'impurità a meno di 15mg/l.

(846) Trova la famiglia di curve con la proprietà che in ogni punto il triplo dell'ascissa, sommata al doppio dell'ordinata, uguaglia la metà del coefficiente angolare della retta tangente nel punto stesso.

(847) Un lampione L illumina un'arena a forma circolare, essendo posto su un punto della circonferenza perimetrale. Un ragazzo, partendo dal punto P, in direzione ortogonale al lampione L e sempre posto sul perimetro dell'arena, corre ad una velocità costante v_0 verso il centro dell'arena stessa. Dimostra che la velocità dell'ombra lungo la circonferenza, perimetro dell'arena, nell'istante in cui il ragazzo si trova a metà tra P ed il centro, dipende linearmente da v_0 ed è indipendente dal raggio dell'arena stessa.

(848) Trova tre numeri reali a, b e c in modo tale che si abbia:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} + a + b\,x^2 + c\,x\,\sin(x)}{x^4} = \frac{1}{3}.$$

(849) Dimostra questo caso speciale della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (-Bunjakovskij) :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

[*Hint:* Considera la sommatoria $\sum_{i=1}^{n}(x_i\,u + y_i)^2$ che sviluppa come polinomio, non negativo, nell'incognita ausiliaria u e guarda al suo discriminante... analoga disuguaglianza vale anche nel caso continuo, sostituendo alle sommatorie, gli integrali definiti.]

(850) Si chiama ***equazione di Clairaut*** una *o.d.e.* del primo ordine che si scrive nella forma: $y = xy' + f(y')$. Essa si risolve

differenziando dapprima l'o.d.e. stessa rispetto ad x, ricavando un prodotto uguagliato a zero e, successivamente, risolvendo le equazioni ottenute uguagliando a zero ciascun fattore. Risulta che la soluzione generale è costituita da una famiglia di rette e quella singolare da una curva che è l'inviluppo delle rette trovate tramite la soluzione generale! Risolvi la seguente equazione di Clairaut:

$$y = x\,y' + (y')^2,$$

verificando che la soluzione generale è un fascio di rette e quello singolare la parabola, inviluppo [8] delle rette del fascio trovato.

(851) Data una famiglia di curve dipendenti da un parametro t,

$$\gamma_t : \; F(x, y; t) = 0,$$

dalla definizione di "inviluppo" dimostra che essa si può trovare eliminando il parametro t tra le equazioni:

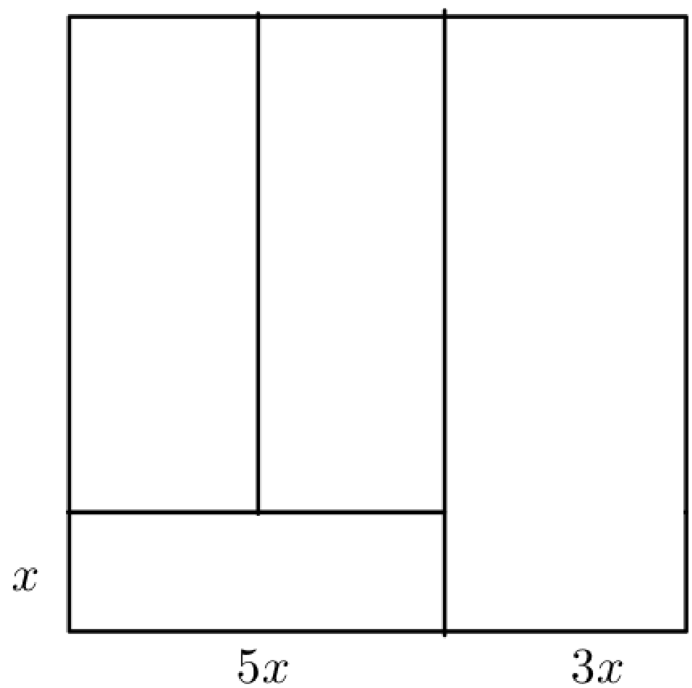
$$\begin{cases} F(x, y, t) = 0 \\ \frac{\mathrm{d}\,F(x,y,t)}{\mathrm{d}\,t} = 0 \end{cases} .$$

[*Hint:* Per la curva inviluppo, il generico punto $P(\bar{x}, \bar{y})$ deve essere anche un punto di γ_t per qualche valore di t e, inoltre, in P la retta tangente è condivisa tra γ_t e la curva inviluppo...]

(852) Provare che il prodotto delle distanze di un punto dell'iperbole dai suoi asintoti è costante ed uguale a: $\frac{a^2 b^2}{c^2}$, essendo c la distanza di un fuoco dal centro di simmetria della curva.

(853) La lunghezza totale delle pareti di un appartamento è 90 metri. L'appartamento ha forma quadrata con un corridoio di larghezza x che conduce alle due stanze, uguali, che complessivamente "predono" una lunghezza di $5x$ sul corridoio ed una stanza, in fondo, di larghezza $3x$, come da figura seguente.

[8] Per ***inviluppo*** si intende una curva che è tangente, in ogni suo punto, ad un'unica curva della famiglia delle curve di cui è inviluppo!



Quanto deve essere largo il corridoio affinché le tre stanze siano di dimensione più grande possibile?

(854) Dimostra la ***Formula di Simpson*** [9] che fornisce un'approssimazione dell'integrale: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x$ partendo dalla considerazione che, stabilita una partizione $x_0 = a,\ x_1, \ldots,\ x_n = b$ dell'intervallo d'integrazione $[a, b]$, in n sottointervalli di uguale ampiezza $h = \Delta x$, allora tra l'asse delle ascisse, le due rette di equazione $x = x_i$, $x = x_{i+1}$ ed il segmento che unisce i punti $P_i\,(x_i, f(x_i))$ e $P_{i+1}\,(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ si forma un trapezio (rettangolo). Devi dimostrare che, detti $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ e $h = \Delta x = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x \approx h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

(855) Si chiama ***equazione di Bernoulli*** una *o.d.e.* del primo ordine del tipo: $y' + p(x)\,y = q(x)y^n$. Essa si riconduce alla risoluzione di una *o.d.e.* lineare del primo ordine tramite la sostituzione: $z = y^{1-n}$. Forti di questa informazione, trova la

[9] Detta anche "regola dei trapezi".

soluzione generale dell'equazione di Bernoulli:

$$x^2 + y^2 - 2xy\, y' = 0.$$

(856) L'altezza media (in cm) di un bambino di 7 mesi è normalmente distribuita con media $\mu = 71$ e varianza $\sigma^2 = 6.25$. Qual è la percentuale di bambini di 7 mesi che superano i 74 cm di altezza?

(857) Dimostra che per $k > -1$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1},$$

ovvero, detto in altro modo, che:

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k \sim \frac{1}{k+1}\, n^{k+1}.$$

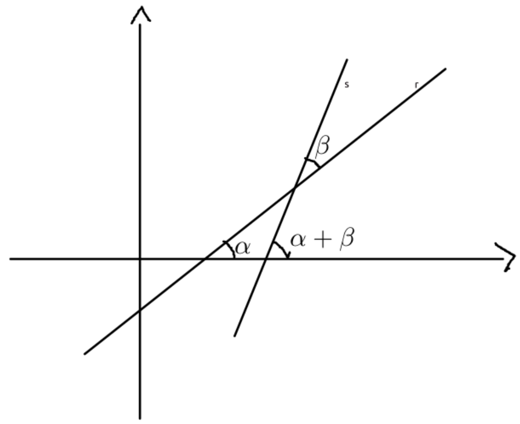
[*Hint:* Considera la definizione di integrale, come valore dell'area sottesa, partendo dalla somma di infiniti rettangolini infinitesimi, per la funzione $f(x) = x^k$ nell'intervallo $[0, b]$, avendo suddiviso tale intervallo in n parti uguali di ampiezza $h = \frac{b}{n}$. Poi imponi che il limite che definisce tale integrale è proprio uguale all'aria che trovi direttamente calcolando $\int_0^b x^k \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{k+1}\, b^{k+1}$ ...]

(858) Un cerchio di raggio r viene appoggiato all'interno di un profilo parabolico di equazione cartesiana $y = x^2$ e risultano tangenti in $(-x_0, y_0)$ e (x_0, y_0). Determinare le coordinate del centro della circonferenza (o meglio, la seconda, dato che la prima, per ragioni di simmetria, deve essere zero!) e y_0 in funzione di r e discutere il caso particolare $r = \frac{1}{2}$. Che succede se $r < \frac{1}{2}$?

(859) Dimostra la formula di somma di archi per la tangente:

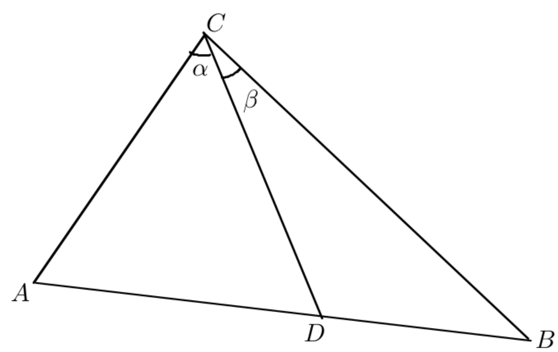
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}.$$

Poi ricorda il significato di coefficiente angolare di una retta e riscrivi la stessa uguaglianza in termini di pendenze tra due rette, che tra loro formano l'angolo β ed una di esse forma l'angolo α con la direzione positiva dell'asse delle ascisse, come indicato nella figura seguente:



Supponendo $m_r = \tan(\alpha) = \frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ e l'angolo $\beta = 45^o$, dimostra che $m_s = \frac{q+p}{q-p}$.

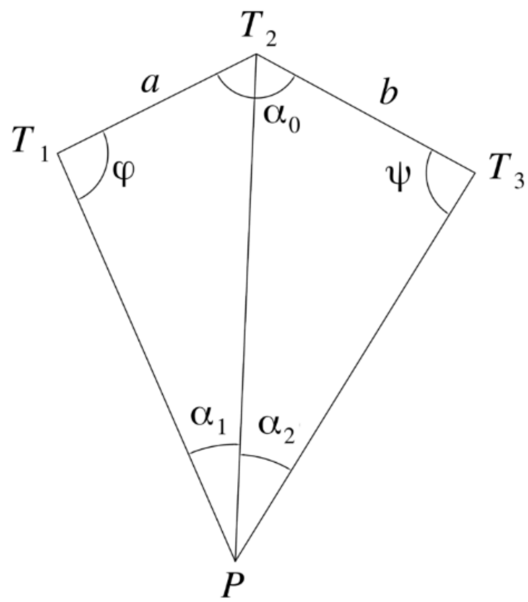
(860) Con riferimento al triangolo di figura, provare che:



$$\boxed{\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}}.$$

[*Hint:* Si consideri il teorema dei seni applicato ad $\overline{ADC}$ e $\overline{CDB}$.]

(861) Con riferimento alla figura seguente, prova il ***Teorema di Snellius-Pothenot*:**



$$\boxed{\frac{\sin(\Psi)}{\sin(\phi)} = \frac{a \cdot \sin(\alpha_2)}{b \cdot \sin(\alpha_1)}}.$$

[*Hint:* Si applichi il teorema dei seni ai triangoli $\overline{T_1 T_2 P}$ e $\overline{T_2 T_3 P}$.]

(862) Un istituto di credito fornisce ai suoi clienti una polizza della durata di n anni ad interesse composto con un tasso variabile r_n; esiste un tasso di interesse semplice per il quale l’interesse composto risulta esattamente pari a quanto verrebbe riconosciuto tramite tale interesse semplice. Partendo dalla relazione che lega il tasso annuo semplice r a quello composto riconosciuto dopo n anni [10] :

$$(1 + r_1)(1 + r_2) \cdots (1 + r_n) = 1 + n \cdot r,$$

si determini il tasso r_n in funzione del tasso semplice r.

(863) Si consideri una corda di “massa trascurabile” su cui non agiscano forze tangenziali. Ad essa siano appese due masse M ed m e sia la corda scorrevole in una carrucola “ideale” [11] in presenza di una forza F applicata su una delle due masse, ad esempio sulla massa m. Si determinino le equazioni del moto e si discuta, in particolare, il caso $m = 0$, poscia il caso $F = 0$ e dire quando questi due casi risultano equivalenti

[10] Verifica che sia proprio la relazione scritta qui di seguito.

[11] Quindi non soggetta ad attriti e che non contribuisca in alcun modo con “forze proprie” sul modello in esame.

dal punto di vista dinamico [12] : si dimostri che ciò avviene se $F = m_a\, g$, essendo m_a la *media armonica* tra le due masse, definita come:

$$m_a = \frac{2\, M\, m}{M + m}.$$

(864) Sia data una corda distesa su una superficie liscia orizzontale, con un capo di lunghezza s penzolante, indicando con l la lunghezza totale della corda e con λ la sua densità lineare, supponendo che essa "scivoli" verso giù a causa del peso della parte penzolante e che la velocità iniziale sia nulla, si determini l'equazione del moto.

(865) Data una matrice quadrata A, il determinante della matrice $A - \lambda \cdot Id$ [13] si chiama ***polinomio caratteristico*** [14] di A. Si definisce la ***traccia*** di una matrice A essere la somma dei suoi elementi in diagonale principale. Le soluzioni dell'equazione caratteristica, ottenuta uguagliando a zero il polinomio caratteristico, si chiamano ***autovalori*** associati alla matrice A. Si consideri una matrice 2×2 e si dimostri che, se esistono due autovalori reali, allora il loro prodotto uguaglia il *determinante* della matrice e, inoltre, la loro somma uguaglia la *traccia* della matrice.

[*Hint:* Si scriva il polinomio caratteristico e si osservino i suoi coefficienti...]

(866) Vincenzo e Gianmarco vanno a prendere un caffè al bar. Entrambi ordinano un caffé lungo, che viene servito ad una temperatura di 60 gradi centigradi. Vincenzo allunga subito il caffé con una uguale quantità di latte, ed attende dieci minuti prima di sorseggiarlo. Gianmarco, invece, aspetta cinque minuti prima di allungare il caffé e quindi altri 5 minuti prima di consumarlo. Se la temperatura del latte è di 16 gradi e quella dell'ambiente è di 24 gradi, dire chi tra Vincenzo e Gianmarco beve il caffé più freddo.

[*Hint:* Si ricordi la *Legge di raffreddamento di Newton,* secondo la quale la velocità di raffreddamento di un corpo è direttamente proporzionale alla differenza di temperatura tra l'ambiente in cui il corpo è posto e la temperatura del corpo stesso...]

---

[12] Ovvero quando si generano le stesse accelerazioni.

[13] Essendo Id la matrice identità dello stesso numero di righe e colonne di A, ovvero quella matrice che ha 1 sulla diagonale principale e ovunque, altrove, zero.

[14] Evidentemente è un polinomio nell'incognita λ.

(867) Dimostra che se α β e γ sono gli angoli interni di un triangolo, allora:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) = 4\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

[*Hint:* prova a porre $\alpha = 2u$ e $\beta = 2v$ ... esercizio tratto dal "The Stanford Mathematics Problem Book" di Polya-Kilpatrick]

(868) Osserva la somma dei termini della successione $a_n = \frac{n}{(n+1)!}$, ovvero:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}.$$

Essa è, almeno per i primi valori di n, uguale a:

$$\sum_{n=1}^{1} a_n = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{2} a_n = \frac{5}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{3} a_n = \frac{23}{24} \ldots$$

Trova una formula per la somma di un numero generico di termini e dimostrala per induzione.

[*Hint:* osserva il numero che viene scritto al numeratore e quello che è presente al denominatore... esercizio tratto dal "The Stanford Mathematics Problem Book" di Polya-Kilpatrick]

(869) Considera due vettori nel piano cartesiano ed una matrice di rotazione di un angolo θ. Dimostra che il prodotto scalare dei due vettori è invariante per rotazione, ovvero che il prodotto scalare dei vettori ottenuti ruotando quelli di partenza esce uguale al prodotto scalare dei vettori iniziali.

[*Osservazione:* è, evidentemente, una proprietà generale, infatti il prodotto scalare è legato ai moduli dei vettori ed al coseno dell'angolo che essi formano, ma in una rotazione di uguale angolo dei due vettori, non variano né le lunghezze dei vettori, né l'angolo da essi formato.]

(870) Quali sono le curve aventi sottotangente [15] (di lunghezza) costante?

(871) Dimostra che, se un corpo viene lasciato cadere in un fluido che oppone una resistenza direttamente proporzionale alla velocità, allora quest'ultima tende a diventare "asintoticamente stabile", ovvero la velocità tenderà ad un valore limite che non verrà mai superato (né mai, effettivamente, raggiunto). Trova il valore di tale velocità "limite".

[*Hint:* utilizza la seconda legge della dinamica...]

[15] Per sottotangente si intende il segmento i cui estremi sono il punto d'intersezione della retta tangente in un punto alla curva con l'asse delle ascisse e la proiezione del punto stesso sullo stesso asse delle ascisse

(872) Un corpo di massa m è soggetto ad una forza elastica di costante k, essendo agganciato all'estremità di una molla, la cui altra estremità è fissata ad un muro, perpendicolare alla direzione del moto. Inoltre il corpo si muove in un mezzo, per il quale le forze di attrito, che intervengono, sono direttamente proporzionali, secondo la costante h, alla velocità posseduta dal corpo. Scrivi l'equazione differenziale che descrive il moto del corpo, risolvila e discuti sulle caratteristiche dei moti ottenibili.

[*Hint:* intuitivamente, se le "resistenze passive" sono abbastanza forti, si ottiene un moto smorzato (esponenzialmente) e quindi il corpo tende "velocemente" a fermarsi. Se invece esse sono sufficientemente deboli, il moto risulta oscillatorio smorzato, ovvero tende a diminuire le ampiezze delle oscillazioni rispetto al punto di equilibrio della molla, ma oscilla per un po' prima di fermarsi. C'è un terzo caso, detto di "smorzamento critico" che è una via di mezzo tra le due situazioni descritte precedentemente: dalla seconda legge della dinamica puoi ricavare l'o.d.e che, risolta, ti indica cosa significhi esattamente "resistenze passive" forti, deboli o critiche.]

(873) Sapendo che il tempo di dimezzamento di una certa sostanza radioattiva è 1400 anni, trova la percentuale di sostanza decaduta in 700 anni.

(874) Quanto tempo ci vuole acciocché si incontrino due masse uguali, che si muovono in un mezzo viscoso [16] lungo una stessa direzione verticale, ma in verso opposto, essendo una di esse lasciata cadere da una altezza h e l'altra lanciata da terra verso l'alto con velocità iniziale v_0?

(875) Un corpo, posto in un ambiente a 20 gradi centigradi, passa in 10 minuti da 100 a 60 gradi. Quanti minuti ci vogliono affinché esso raggiunga la temperatura di 15 gradi celsius?

(876) Dire per quale valore del parametro k la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, k) \cup (k, +\infty) \\ k^2 - x^2 & x \in [-k, k] \end{cases}$$

rappresenta una densità di probabilità.

(877) Un centralino riceve in media 12 telefonate e 6 email in un'ora. Determina la probabilità che in 10 minuti non riceva né telefonate, né email. Quanto vale la probabilità che in mezz'ora riceva esattamente una telefonata ed una email?

[16] Il ché significa che subiscono una forza di attrito direttamente proporzionale alla velocità con la quale si muovono.

(878) Se la probabilità che un individuo si infetti con una certa malattia è dello 0,001%, qual è il numero n di individui che si deve considerare affinché la probabilità di riscontrare, tra di essi, almeno un caso di quella malattia, sia almeno del 10%? e che sia almeno del 50%?

(879) Supponi di dover affrontare un test "vero o falso" composto da 20 domane. Per passare il test, devi rispondere ad almeno 15 domande in modo esatto: se metti crocette a caso, qual è la probabilità di superare il test? Quanto vale la probabilità che solo la metà delle risposte sia esatta?

(880) Un semaforo è posto su una strada a due corsia. Su una di essa sta ferma un'automobile A, mentre l'altra corsia è libera e sta sopraggiungendo un'altra automobile B. Quando "scatta" il verde, proprio in quel momento l'automobile B transita dalla linea di stop del semaforo ad una velocità di 72 km/h, mentre l'automobile A parte accelerando uniformemente con $a = 6$ m$/s^2$. Dopo cinque secondi, quale delle due automobili è più veloce? e quale, tra le due, ha percorso più strada dalla linea di stop del semaforo?

(881) Il 26 agosto del 20023 si legge, su tutte le agenzie di stampa, la seguente notizia: "Bambina cade da balcone a Torino, presa al volo da passante: è salva", in particolare si legge: "Una bambina di 5 anni è caduta da un balcone al quinto piano ed è stata salvata da un passante [...]". Ipotizzando l'altezza di caduta di 15 mt, trova quanto tempo ha impiegato, la bambina, a raggiungere l'uomo che l'ha presa al volo e con quale velocità ha raggiunto le braccia del suo salvatore.

(882) Considera il punto P, diverso dal vertice, di una parabola e le rette tangente e normale in tale punto. Se A e B sono i punti d'intersezione delle due rette testé menzionate con l'asse della parabola, dimostra che il circocentro del triangolo $\overline{PAB}$ è proprio il fuoco della parabola!

(883) Un serbatoio cilindrico è alto 4 metri ed ha un raggio di base di mezzo metro. Esso è pieno di acqua e lo si vuole svuotare facendo uscire il contenuto da un foro di 2 centimetri quadrati aperto sul fondo del serbatoio. Determina il tempo impiegato per svuotare il serbatoio.

[*Hint:* Ricorda che la velocità di uscita di un liquido da un serbatoio dipende dalla "quota" che esso raggiunge dentro il serbatoio stesso e, utilizzando la conservazione dell'energia, si può ricavare che è pari a:

$v = \sqrt{2\,g\,h}$ [17] . Inoltre, la *portata* è pari alla quantità di fluido che si sposta nell'unità di tempo, ergo può essere rappresentata, se v è la velocità con cui il fluido si muove all'interno di un tubo e S la superficie della sezione trasversale del tubo stesso, come: $Q = S \cdot v$...

(884) Un recipiente a forma di cono circolare retto, di altezza 80 cm e raggio di base 20 cm, viene riempito versando 5 cm^3 di acqua al secondo. Trova la velocità di crescita del livello dell'acqua dopo 10 secondi dall'inizio del processo.

(885) In una circonferenza di raggio r traccia la corda $\overline{AB}$ che è la base comune di due triangoli isosceli inscritti del cerchio. Determina la lunghezza di $\overline{AB}$ tale per cui risulti massima la differenza tra le aree dei due triangoli isosceli suddetti.

(886) C'è un cono equilatero di vertice V inscritto in una sfera di raggio r. A quale distanza da V si deve tagliare la figura, con un piano parallelo alla base del cono, affinché l'area della corona circolare limitata dalle circonferenze che il piano di taglio genera con i solidi anzidetti, sia massima?

(887) In un esame universitario, il voto medio è 27 con una deviazione standard di 2 punti. Potendo supporre che i voti siano distribuiti normalmente attorno alla media, trova la probabilità che un allievo riporti un voto superiore a 27. Quanto vale la probabilità, invece, che il voto sia inferiore a 20?

(888) Ti sfido a trovare una funzione che abbia un asintoto verticale in $x = -1$ e due asintoti orizzontali nelle rette $y = -1$ e $y = 1$ rispettivamente a sinistra ed a destra. Dopo aver trovato una funzione che rispetta le richieste, effettuane uno studio completo.

(889) Data la funzione $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, determinare a, b e c in modo che il punto $(-1, 2)$ sia un minimo od un massimo e che nel punto di ascissa 2 vi sia un flesso. Dopodiché disegnare la funzione.

(890) Un foglio di carta ha le dimensioni una doppia dell'altra. Supponi di effettuare una piega del lato più lungo, portando uno spigolo del foglio sul lato opposto. A che distanza, dal vertice che viene piegato, deve passare la linea di piegatura in modo che la piega stessa sia la più corta possibile?

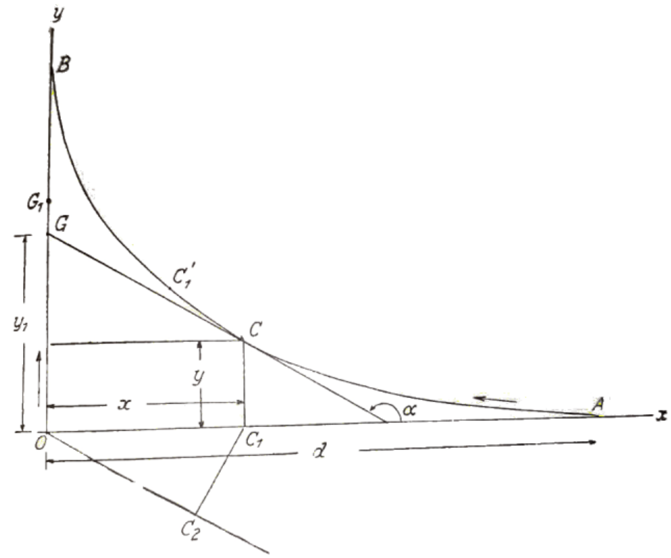
(891) Una successione si dice ***successione di Cauchy*** se:

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \bar{n} : \text{ se}\, n, m > \bar{n} \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon,$$

[17] Formula conosciuta anche col nome di ***Teorema di Torricelli*** .

ovvero se definitivamente la successione ha i termini la cui differenza si può rendere arbitrariamente piccola.
Dimostra che: *"Se una successione è convergente, deve essere necessariamente di Cauchy"* [18] .

(892) Un gatto parte dal punto O con velocità costante v lungo l'asse Oy. Contemporaneamente parte, dal punto A situato sull'asse ortogonale Ox, un cane che lo insegue a velocità costante v'. Quale sarà la traiettoria del cane?



Verifica che, ponendo la velocità del cane doppia di quella del gatto, una distanza iniziale $d = 100$ metri e la velocità del gatto di $2\,m/s$, allora il punto B in cui il cane raggiunge il gatto sta a circa 66.66 metri da O ed il tempo impiegato per arrivare ad "acchiappare" il gatto è di circa 33 secondi.

[*Hint:* Supponi che il gatto si trovi, all'istante di tempo t nel punto $G(0, y_1)$ e che il cane si trovi nel punto $C(x, y)$; nell'inseguimento il

[18] In $\mathbb{R}$ la condizione è anche sufficiente, ovvero vale il seguente notevole teorema: ***"In $\mathbb{R}$ una successione è convergente se e solo se è di Cauchy"***. Per dimostrare questo teorema occorre il **Teorema di Bolzano-Weierstrass** , che afferma: *"Da una successione limitata di numeri reali, è sempre possibile estrarne una convergente".* La nozione di *successione di Cauchy* è così importante che si è arrivati a definire lo *spazio metrico*, ovvero un insieme di elementi su cui è possibile definire la nozione di *distanza* -in $\mathbb{R}$ la cosa viene del tutto naturale, considerando come distanza, ad esempio, la differenza, in modulo, tra due numeri- essere completo se le sue successioni di Cauchy risultano tutte convergenti e, queste ultime, appellarle con il nominativo di ***successioni fondamentali***; quindi la sufficienza dell'implicazione non è altro che affermare: "$\mathbb{R}$ **è uno spazio metrico completo".**

cane rivolge il suo sguardo e quindi tutto se stesso in direzione del gatto, quindi puoi immaginare che la tangente alla curva che descriverà la traiettoria, sia passante dal punto G... ad un istante di tempo successivo $\mathrm{d}t$, il gatto si troverà in G_1, avendo percorso il tratto $\mathrm{d}y_1 = v \cdot \mathrm{d}t$, mentre il cane avrà percorso il tratto di curva CC_1' di lunghezza $\mathrm{d}s = v' \cdot \mathrm{d}t$... considera che il rapporto delle velocità è una costante, che puoi chiamare $k = \frac{v}{v'}$ e scrivi, dopo questi suggerimenti, l'o.d.e. che ti permetterà di determinare la traiettoria richiesta. Ricorda anche che $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} = \tan(\alpha)$ rappresenta la pendenza della retta tangente alla traiettoria di equazione $y = f(x)$...

(893) Due quarti di circonferenza, di uguale raggio, sono tangenti nel punto B. Dai punti estremi di questi due archi, A e C si traccia l'altra tangente comune AC. Facendo ruotare la parte di piano compresa tra i due quarti di circonferenza e la retta AC attorno a quest'ultima, si genera un volume di grandezza V. Determinare il raggio della sfera di volume uguale a V.

(894) La parabola $y^2 = 4\,a\,x$ rotola su una linea retta. Determina la curva descritta dal fuoco.

(895) Siano $p(t)$, $o(t)$ e $d(t)$ le funzioni nel tempo che esprimono rispettivamente il "prezzo", l' "offerta" e la "domanda" di un certo bene sul mercato. Il ***modello speculativo di Allen*** in economia assume che domanda ed offerta siano funzioni lineari del prezzo e della velocità con cui esso cresce, ergo:

$$\begin{cases} o(t) = a_1\,p(t) + a_2\,p'(t) + a_3 \\ d(t) = b_1\,p(t) + b_2\,p'(t) + b_3 \end{cases}$$

essendo gli a_i e le b_i delle costanti. Il ***principio economico di domanda e offerta*** garantisce uno stato "dinamico" di equilibrio per il quale:

$$d(t) = o(t).$$

Utilizzando queste informazioni trova:

I. una o.d.e. lineare che coinvolga solo il prezzo $p(t)$;
II. ammesso che $a_i \neq b_i$, la soluzione del conseguente P.C. posto $p(0) = p_0$.
III. Meditare e dare una interpretazione alla soluzione trovata se $p_0 = \frac{a_3 - b_3}{b_1 - a_1}$.
IV. Supponendo $\frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2} > 0$, cosa succede al prezzo per un tempo sufficientemente lungo;
V. nel caso la frazione di prima fosse negativa, come si comporta il prezzo?

VI. Risolvi il modello nel caso concreto in cui:

$$\begin{cases} o(t) = p(t) + 4p'(t) + 30 \\ d(t) = -2p(t) + 3p'(t) + 48 \\ p(0) = 10\,u \end{cases}$$

essendo "u" l'unità monetaria e $o(t)$, $d(t)$ misurate in *centinaia* di unità. Cosa succede al prezzo per t sufficientemente lungo?

Si definisce la ***Trasformata di Laplace*** della funzione $f(x)$, come:

$$\boxed{\mathcal{L}[f(x)] = \int_0^{\infty} f(x)\, e^{-s\,x}\, \mathrm{d}\,x}$$

quando questo integrale "improprio" esiste. Si osserva che la funzione esponenziale ha la finalità di *schiacciare a zero* le funzioni che non possono competere con lei all'infinito, quindi è facile che l'integrale che definisce la trasformata rappresenti un'area finita o, come si dice "in gergo", converga. La trasformata di Laplace trova largo impiego in Matematica, specie nel campo del calcolo della probabilità e nel calcolo differenziale per la risoluzione dell o.d.e.. Chiediamo di risolvere i seguente esercizi che culmineranno con la richiesta di risoluzione di una o.d.e. lineare del secondo ordine non omogenea [19] .

(896) Dimostra che se $f(x) = k$ allora la trasformata di Laplace, che possiamo anche indicare come $F(s)$ è:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(x)] = \frac{k}{s}.$$

[*Hint:* Qui, come per gli altri esercizi, utilizza il metodo di integrazione per parti, una volta scritta la trasformata come da definizione e, a posto dell'estremo ∞ utilizza il parametro b, calcolando, infine, il

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\, e^{-sx}\, \mathrm{d}\,x$$

...]

(897) Dimostra che:

$$\mathcal{L}[x] = \frac{1}{x^2}, \quad \mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^2}, \quad \cdots \quad \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

[19] Caso che noi non abbiamo nemmeno trattato nella parte teorica del testo e che rimanderemo in un terzo volume di questa opera, in cui aggiungeremo un certo numero di argomenti per approfondimenti ed integrazione di quelli già trattati.

(898) Considera la funzione esponenziale $f(x) = e^{ax}$ e calcolane la trasformata di Laplace, dimostrando che:

$$\mathcal{L}[e^{a\,x}] = \frac{1}{s-a}, \quad \text{ammesso che} \quad s > a.$$

(899) Dimostra che:

$$\mathcal{L}[\sin(ax)] = \frac{a}{s^2+a^2} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}[cos(ax)] = \frac{s}{s^2+a^2}.$$

(900) Dimostra che:

$$\mathcal{L}[f'(x)] = s \cdot \mathcal{L}[f(x)] - f(0)$$
$$\mathcal{L}[f''(x)] = s^2 \cdot \mathcal{L}[f(x)] - s \cdot f(0) - f'(0)$$

e, in generale, per ricorsione:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(x)] = s^n \cdot \mathcal{L}[f(x)] - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i}\, f^{(i-1)}(0).$$

Considera ora che la trasformata di Laplace, essendo, in fondo, un integrale, gode delle stesse proprietà di quest'ultimo, ovvero è un *operatore lineare*. Inoltre, conoscendo la trasformata di Laplace, possiamo risalire alla funzione da cui essa è stata trovata, applicando il procedimento inverso: si definisce ***antitraformata di Laplace*** la funzione f tale per cui $\mathcal{L}[f(x)] = F$ e si scrive:

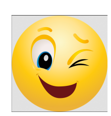
$$\mathcal{L}^{-1}[F] = f \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}[f(x)] = F.$$

Anche essa è, evidentemente, un operatore lineare.

Come ultimo esercizio proponiamo di risolvere il seguente *P.C.:*

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 12\, e^{2x}; \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = -1 \end{cases}.$$

All'uopo applica la trasformata di Laplace all'o.d.e., ottenendo una frazione algebrica in s. Utilizzando il metodo dei fratti semplici, scrivi tale trasformata come somma di tre frazioni con denominatore lineare; dato che la trasformata di e^{ax} è $\frac{1}{s-a}$ allora: $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s-a}] = e^{ax}$... *buon divertimento!*



APPENDICE A

Articoli distribuiti, ai propri studenti, durante il primo lockdown per convid-19

Breve esposizione su alcuni modelli di crescita da applicare in casi di epidemia

Prof. Emanuele Castagna
Docente di Matematica presso I.T.S.T. "E.Scalfaro" Catanzaro
email: castagnaprofemanuele@gmail.com

16 marzo 2020

Sommario

Nel seguito vengono presentati i modelli di crescita di Malthus, di Verhulst ed un modello epidemiologico di tipo SIR. Inoltre si presenta il metodo di Eulero per la risoluzione numerica (approssimazione) di un problema di Cauchy del primo ordine.

1 Richiami sul modello di crescita esponenziale

Uno dei modelli più semplici per rappresentare la crescita di una popolazione è supporre che il numero degli indivisui $N(t)$ al tempo t cresca proporzionalmente alla numerosità della popolazione stessa, ovvero che la *velocità* di crescita di una popolazione, indicata [1] con $N'(t)$, soddisfi ad una relazione del tipo

$$N'(t) \propto N(t).$$

Detto altrimenti, esiste una costante k tale per cui

$$N'(t) = k \cdot N(t). \tag{1}$$

Aggiungendo la condizione iniziale, ad esempio il numero di individui N_0 della popolazione al tempo iniziale $N(0) = N_0$, il poblema di Cauchy risulta determinato una volta stabilito quanto vale k per quella particolare popolazione oggetto di studio. L'o.d.e. (1) si chiama anche equazione di Malthus.

Ora, l'o.d.e. (1) si può integrare abbastanza agevolmente tramite separazione di variabile come segue:

$$\frac{d\,N(t)}{d\,t} = k \cdot N(t) \quad \to \quad \frac{d\,N}{N} = k\,d\,t \quad \to \quad \ln|N(t)| = k \cdot t + C$$

da cui, ponendo $e^C = A$,

$$N(t) = A\,e^{kt}.$$

[1] Le velocità sono variazioni istantanee nel tempo, per cui sostanzialmente delle derivate

Per determinare A sfruttiamo la condizione iniziale ottenendo $A = N_0$ ed infine la soluzione sarà

$$\boxed{N(t) = N_0 e^{kt}.}$$

Il parametro k, caratteristico del fenomeno oggetto di studio, può essere ricavato "sperimentalemente" operando, ad esempio, tramite il tempo di raddoppio.

Però tale modello è applicabile solo per le fasi iniziali di una epidemia, dato che solo all'inizio del contagio si può supporre che tutte le persone siano contagiabili ed entrino in contatto liberamente con una persona contagiata: dopo un po' di tempo, evidentemente subentrano altri fattori che modificano sostanziamente questo tipo di crescita esponenziale. Ad esempio l'immunizzazione dovuta alla morte, oppure a fattori genetici non ancora ben comprensi. Pertanto cerchiamo di migliorare il nostro modello matematico ammettendo che ci sia un *fattore di riduzione* del contagio (di tipo lineare [2]) e successivamente introducendo altri tipi di interazione tra parte sana e parte contagiata di una popolazione.

2 Il modello "logistico"

Supponiamo che nel modello di crescita esponenziale, la velocità di crescita della popolazione (contagiata) sia ancora proporzionale al numero delle persone contagiate al tempo t, ma che la "costante" di proporzionalità decresca, nel contempo, linearmente in base al numero di contagiati stessi, ovvero che

$$k = a - b \cdot N(t)$$

essendo a e b i due parametri da determinare per il caso specifico oggetto di studio. In tal caso l'o.d.e. che descrive il fenomeno diventa

$$N'(t) = (a - b \cdot N(t)) \cdot N(t)$$

ovvero

$$\boxed{N'(t) = a\,N(t) - b\,N^2(t)}. \tag{2}$$

Se indichiamo con $c = \frac{a}{b}$ possiamo riscrivere l'equazione come

$$N'(t) = a\,N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{c}\right),$$

conosciuta come *equazione logistica di* ***Verhulst***. Con la terminologia tipica, in questa equazione, ci si riferirà ad a come *parametro di crescita malthusiano,* mentre a il parametro c si chiamerà *capacità di carico oppure livello di saturazione* [3].

Anche questa equazione si può risolvere per separazione di variabili:

$$\frac{d\,N}{N\left(1 - \frac{N}{c}\right)} = a\,d\,t \quad \to \quad \int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{c - N}\right) d\,N = \int a\,d\,t$$

[2] perché il più semplice

[3] Indica la popolazione sostenibile dal sistema.

avendo utilizzato la scomposizione in fratti semplici della prima frazione, e quindi

$$\ln |N| - \ln |c-N| = a\,t + \text{cost.} \quad \to \quad \ln \left| \frac{N}{c-N} \right| = a\,t + \text{cost.} \quad \to \quad \frac{N}{c-N} = A\,e^{at}.$$

Ancora pochi passaggi:

$$N = A \cdot e^{at} \cdot (c - N) \quad \to \quad (1 + Ae^{at})N = A \cdot c \cdot e^{at}$$

ponendo $N(0) = N_0$ si ottiene ora

$$N_0 = \frac{A\,c}{1+A} \quad \to \quad \frac{1}{N_0} = \frac{1+A}{Ac} \quad \to \quad \frac{1}{N_0} = \frac{1}{Ac} + \frac{1}{c}$$

da cui

$$A = \frac{N_0}{c - N_0}.$$

Ergo la soluzione sarà

$$N(t) = \frac{\frac{N_0}{c-N_0} \cdot c \cdot e^{at}}{1 + \frac{N_0}{c-N_0} \cdot e^{at}}$$

o, riscritta meglio,

$$\boxed{N(t) = \frac{c}{1 + \left(\frac{c}{N_0} - 1\right) \cdot e^{-at}}}.$$

Questo modello è importante soprattutto perchè riesce ad introdurre una ragionevole limitazione alla crescita esponenziale, cosa che avviene normalmente nel momento in cui alla popolazione crescente iniziano a mancare i mezzi per sopravvivere. Ma, a parte questa limitazione logica, non prevede la suddivisione della popolazione in individui infetti che possono contagiare ed individui sani non ancora contagiati. È comunque istruttivo capire come siamo arrivati al modello: abbiamo solo fatto una considerazione sulla velocità di crescita in base al numero degli individui della popolazione, nel caso di una epidemia, sulla velocità di propagazione di un contagio in base al numero di persone infettate al tempo t. Con i prossimi due modelli, entriamo nello specifico della questione, suddividendo la popolazione in almeno due classi: quelli che sono sani, quelli che si sono ammalati e possono trasmettere l'infezione. L'ultimo modello, un po' più raffinato, prevede anche di considerare una terza classe di individui: quelli che si sono immunizzati, o perché morti, o perchè hanno sviluppato gli anticorpi. Infine, si può migliorare ulteriormente il modello matematico introducendo una quarta classe: quelli che si isolano dalla possibilità di contagio, ovvero quelli *rimossi* perché messi in quarantena.

Anticipiano che il secondo modello che vedremo non è risolvibile in forma esplicita, per questo, come ultima sezione del presente lavoretto, presentiamo anche un metodo per dare una approssimazione numerica della soluzione delle o.d.e., traendo spunto da una idea di Eulero [4].

[4] È un metodo che, però, dopo un po' tende ad introdurre errori rilevanti, ma per avere una idea di come potrebbe prospettarsi il futuro, l'andamento tracciato è più che accettabile. Chi fosse interessato, potrebbe approfondire il discorso utilizzando approssimazioni numeriche di ordine superiore (al primo).

3 Modello SIS

Per scrivere un modello "epidemiologico" più affidabile, procediamo a ripartire la popolazione in due gruppi: uno degli infettati, ed uno degli infettabili [5]. Il modello più semplice consiste nella persona infetta che contagia una sana, la quale, a sua volta contagia altre persone inizialmente sane. Ammesso che un contagiato possa guarire, come primo passo supponiamo che però esso possa riammalarsi: per questo motivo il modello della presente sezione di chiama S.I.S ovvero *Suscettibile-Infetto-Suscettibile.*

Iniziamo con una popolazione che ammonta ad un numero N_{tot} di individui. Se gli infettati al tempo t sono in numero di $i(t)$, allora gli infettabili (ovvero quelli ancora sani) sono in numero $s(t) = N_{tot} - i(t)$. Allora possiamo immaginare che la velocità con cui si propaga l'infezione sia direttamente proporzionale sia al numero dei contagiati che al numero delle persone sane, diminuito di un fattore pari al numero delle persone già contagiate. Scritto sotto forma simbolica:

$$\begin{aligned} i(t) &= a \cdot i(t) \cdot s(t) - b \cdot i(t) \\ &= a \cdot i(t)\,(N_{tot} - i(t)) - b \cdot i(t) \\ &= a\,N_{tot}\,i(t) - ai^2(t) - b\,i(t). \end{aligned}$$

da cui l'equazione "tipo Verhulst"

$$\boxed{i'(t) = (a\,N_{tot} - b)\ i(t) - a\,i^2(t)}.$$

Il parametro a della sezione precedente è ora $(a\,N_{tot} - b)$, mentre il parametro b è ora indicato con a. L'interpretazione dei parametri del modello S.I.S. dà anche i nomi agli stessi: a indica il *tasso d'infezione* e quindi si chiamerà **fattore di contagiosità.** Il parametro b è invece il *tasso di guarigione. "Mutatis mutandis"* nella soluzione trovata nella sezione precedente, indicando con i_0 il numero delle persone contagiate al tempo iniziale, ora la soluzione della o.d.e. prenderà la forma

$$\boxed{i(t) = \frac{i_0\,(a\,N_{tot} - b)}{i_0\,a + a\,(N_{tot} - i_0) \cdot e^{-(a\,N_{tot} - b)t}}}.$$

4 Modello SIR

Presentiamo ora due modelli più verosimili, in cui consideriamo che gli individui si possano *immunizzare* [6]. Indichiamo come prima con $i(t)$ il numero degli infettati al tempo t e con $s(t)$ il numero delle persone sane e suscettibili di infezione. Possiamo pensare che il tasso di crescita degli infettati [7] sia direttamente proporzionale al numero delle persone già ammalate ed anche al numero delle persone infettabili, tolta una parte di persone che si sono infettate ma non trasmettono la malattia. Inoltre potremmo pensare che il tasso relativo di crescita degli infettati decresce

[5] Nella letteratura questi ultimi diconsi *suscettibili.*

[6] Ammesso anche la morte come caso estremo! è pur sempre una forma di immunizzazione.

[7] Ovvero la velocità con cui si propaga il morbo

in modo direttamente proporzionale al nuemero di individui che si sono infettati. Da queste due ipotesi si può scrivere direttamente il seguente sistema di o.d.e. del primo ordine:

$$\begin{cases} i'(t) = a\, i(t) \cdot s(t) - b\, i(t) \\ \frac{s'(t)}{s(t)} = -a\, i(t) \end{cases}$$

ovvero anche

$$\begin{cases} i'(t) = a\, i(t) \cdot s(t) - b\, i(t) \\ s'(t) = -a\, i(t) \cdot s(t) \end{cases}$$

I parametri da inserire sono chiaramente a che è la *contagiosità* e b che rappresenta il *tasso di immunizzazione* (ovvero il tasso di guarigione unitamente a quello di mortalità). Come anticipato nella sezione precedente questo sistema non ammette una rappresentazione esplicita della soluzione: permette però di effettuare uno studio qualitativo e di operare numericamente con un metodo da implemetare con un elaboratore elettronico. Soprassediamo sullo studio qualitativo della soluzione [8] e, prima di presentare il metodo di Eulero per dare una prima approssimazione della soluzione del sistema, unitamente alle condizioni iniziali [9], vogliamo ora migliorare il modello introducendo anche un numero di individui che viene *rimosso* dalla popolazione che si sta contagiando.

Sia, pertanto, $r(t)$ il numero degli individui *rimossi* [10] al tempo t, abbiamo allora

$$r(t) = N_{tot} - i(t) - s(t).$$

Introducendo come terza o.d.e. la velocità con cui cresce il numero dei rimossi, che possimo pensare direttamente proporzionale al numero degli infettati al tempo t, otteniamo il sistema seguente:

$$\begin{cases} i'(t) = a\, i(t) \cdot s(t) - b\, i(t) \\ s'(t) = -a\, i(t) \cdot s(t) \\ r'(t) = c \cdot i(t) \end{cases} \tag{3}$$

In questo modello il parametro c prende il nomer di *tasso di decadimento della malattia.* Da uno studio qualitativo, a cui solo accenniamo, si può verificare che se $s_0 < \frac{c}{a}$ allora l'epidemia si estingue poco dopo essere iniziata, ma se $s_0 > \frac{c}{a}$ allora il numero dei contagiati avrà un picco e solo dopo aver ragiunto questo tetto massimo, avendo ridimensionato il numero delle persone suscettibili, tenderà a diminuire fino ad estinguere l'epidemia stessa.

5 Approssimazione numerica: metodo di Eulero

Il metodo di approssimazione numerica della soluzione di un problema di Cauchy lineare si basa tutto sull'approssimazione degli incrementi di

[8] Per ora non siamo interessati ad entrare nello specifico

[9] Che sono sempre date, anche se noi abbiamo allegramente dimenticato di menzionarle ogni volta!

[10] Pertanto si sottraggono dalla possibilità di contagio, per questo il modello si chiama S.I.R., ovvero Suscettibili-Infettati-Rimossi

una funzione tramite il differenziale nel punto di partenza, in altri termini dalla considerazione che

$$\Delta f(x) \approx d\, f(x_0).$$

Se noi abbiamo una o.d.e. del primo ordine del tipo $y'(t) = f(t; x(t), y(t))$ dove t denota il tempo, allora possiamo anche scrivere

$$\Delta\, y = y(t+h) - y(t) \approx y'(t) \cdot h = h \cdot f(t; x, y).$$

A questo punto, consideranto due tempi distinti consecutivi [11] possiamo porre $t = t(k)$ al passo generico k e conseguentemente

$$y(t+h) = y(k+1) \quad \text{e} \quad y(t) = y(k)$$

otteniamo i punti approssimanti la soluzione della o.d.e. come

$$y(k+1) - y(k) = h \cdot f(t(k); x(k), y(k))$$

ovvero

$$y(k+1) = y(k) + h \cdot f(t(k); x(k), y(k)).$$

In un sistema questa approssimazione vale per ogni o.d.e. che viene introdotta.

6 Applicazione per il modello SIR

Nel caso specifico possiamo impostare l'andamento della soluzione secondo il seguente schema: innanzitutto si devono conoscere i valori iniziali N_{tot}, a, b, e c rispettivamente del numero degli individui della popolazione, il tasso di contagiosità della malattia, il tasso di immunizzazione ed il tasso di decadimento della malattia. Una volta trovati questi quattro parametri [12] richiamiamo il sistema (3) con

$$f_1(t; i, s) = a\, i(t) \cdot s(t) - b\, i(t)$$

$$f_2(t; i, s) = -a\, i(t) \cdot s(t)$$

e

$$f_3(t; i, s) = r'(t) = c \cdot i(t).$$

A questo punto le soluzioni delle equazioni possono essere ottenute numericamente da [13]

$$i(k+1) = i(k) + h f_1(t(k); i(k), s(k)), \quad i(0) = i_0.$$

Ed analogamente

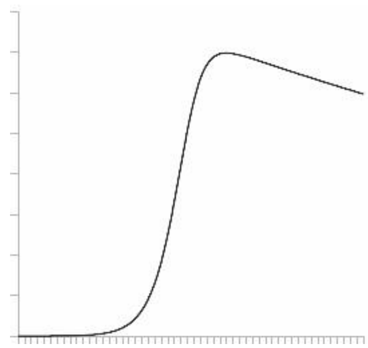
$$s(k+1) = s(k) + h f_2(t(k); i(k), s(k)), \quad s(0) = s_0.$$

[11] Si dice anche **discretizzando** l'o.d.e.

[12] Dati ottenuti statisticamente dopo un'osservazione opportuna del fenomeno.

[13] Avendo scelto un incremento h opportunamente piccolo.

Qui di seguito l'andamento tipico del numero degli infetti $i(t)$ ottenuto con l'approssimazione di Eulero nel caso di una popolazione di 1.5×10^6 individui (poco meno della popolazione calabrese) con ragionevoli parametri ipotizzati per l'epidemia di coronavirus, ammesso che circa due terzi della popolazione sia non raggiungibile dal contagio [14].



[14]Ecco perché è importante una quarantena effettuata con serietà

L'infinito: un'idea straordinaria messa in versi e definata con precisione in Matematica

Prof. Emanuele Castagna

27 aprile 2020

Premessa In questo breve lavoretto, consideriamo lo splendido capolavoro di Giacomo Leopardi, giustamente conosciuto da tutti e studiato nelle scuole, dal titolo "L'infinito". A parte la poesia squisita, che suscita emozioni "infinite" e la perfezione stilistica dei versi, noi vogliamo concentrarci sull'idea raggiunta dal poeta ed espressa nei suoi versi, di infinità ed infinito. Spesso siamo drastici nelle affermazioni, almeno noi che scriviamo, dicendo che l'uomo chiede alla figura sbagliata di parlargli d'infinito: il poeta è colui che lo percepisce a livello intuitivo, ma se vogliamo avere idee chiare su cosa sia l'infinito e sentirne parlare con cognizione di causa, bisognerebbe chiedere al Matematico. Il Leopardi, comunque, esprime bene nei suoi versi l'idea essenziale che descrive l'infinito o, per essere più precisi, descrive uno degli aspetti più intuitivi ed eccezionali dell'infinità. Vogliamo ora procedere in questo modo: prima ci leggiamo tutto il sonetto (ed è ammesso ed auspicabile che lo possiate gustare viaggiando con la nostra fantasia negli spazi illimitati... magari rileggendolo più volte), poi introdurremo il concetto di successione (numerica) e daremo la definizione di limite finito (successione convergente) o infinito (successione divergente), per come la si intende in Matematica. In ultimo compareremo l'idea del Leopardi con quella della Matematica, osservando d'un tratto che esse meravigliosamente coincidono. Buona lettura.

L'infinito di G.Leopardi

Sempre caro mi fu quest'ermo colle,
e questa siepe, che da tanta parte
dell'ultimo orizzonte il guardo esclude.
Ma sedendo e mirando, interminati
spazi di là da quella, e sovrumani
silenzi, e profondissima quete
io nel pensier mi fingo, ove per poco
il cor non si spaura. E come il vento
odo stormir tra queste piante, io quello
infinito silenzio a questa voce
vo comparando: e mi sovvien l'eterno,
e le morte stagioni, e la presente
e viva, e il suon di lei. Così tra questa
immensità s'annega il pensier mio:
e il naufragar m'è dolce in questo mare.

Sono 15 versi densi di significato: si oscilla dai sentimenti di affetto legato alla consuetudine di un luogo (verso 1), cosa che possiamo comprendere bene, ogni volta che ci allontaniamo dalla terra natia e ne sentiamo la nostalgia (e qui sarebbe facile fare un bel collegamento con il Foscolo!); all'idea di *limitazione* che è rappresentata dalla siepe (verso 2). Una limitazione dello sguardo, per il Leopardi, che però può essere anche letta come una limitazione della condizione umana, nella finitezza del proprio corpo, pensando che l'uomo aspira sempre a qualcosa di metafisico (e qui, altro bel riferimento a Dante!). Si fa riferimento alla potenza evocativa dell'immaginazione, della fantasia e del pensiero (versi 4, 5 e 6): ci sono questi interminati spazi oltre la siepe, che si conoscono per via della propria rappresentazione mentale e silenzi e "profondissima quiete" (una quiete che si estende al livello cosmico -tutti noi immaginiamo il silezio assoluto come se fosse la mancanza di suono tra le stelle nel cielo o, ancora, più mestamente, il silenzio assoluto della morte, quando tutto finisce). C'è il senso di paura dovuto al perdersi in questa immagine di "tutto immenso" e quindi senza un termine di paragone, un appiglio per la propria ragione... e vedete? in questo momento passa nella mente di colui che vive queste emozioni tutta la vita in un attimo: (da verso 11 in poi) apparte sullo sfondo l'idea di eternità, il passare delle stagioni, che è un evento periodico e quindi "senza fine" ed il presente, che è l'unica cosa che si vive con certezza (e qui ci sarebbe anche un bel pensiero al "carpe diem" di Catullo, oppure al pensiero sul tempo di Sant'Agostino ed ancora alla "Canzona di Bacco di Lorenzo il Magnifico) [1]. La chiusa poi è di una intensità eccezionale: in tutto questo senso di immensità non solo ci si perde, ma addirittura ci si *annega.* Come si può facilmente immaginare, si annega quando si viene sopraffatti dalle acque, quando le stesse ci portano via e non abbiamo più forza per resistere... mentre le acque ci sommergono, noi non abbiamo più possibilità di salvezza: ed è proprio qui che si legge la grandezza di Leopardi! non è la paura che lo aggredisce, d'altra parte, quando uno annega è probabile che venga anche sopraffatto dal terrore, specie se si accorge o, per lo meno, intuisce cosa sta per accadere! invece no, egli afferma "il naufragar m'è dolce in questo mare".
Bellissimo.

Successioni e limiti Introduciamo ora il concetto di successione e successione numerica, che sarà utile per uniformare il linguaggio e capire di cosa stiamo parlando nel prosieguo. Iniziamo con un esempio: sia dato l'insieme di elementi $A = \{a, b, c\}$. Come insieme, elencare i suoi elenti nell'ordine scritto prima, oppure scambiare qualche elemento all'interno delle parentesi (graffe) non fa alcun effetto: avendo sempre gli stessi elementi che lo costitutiscono, l'insieme rimane sempre lo stesso. Ben altra cosa è se noi *elenchiamo con ordine* gli elementi stessi: dare la sequenza a, b, c non è la stessa cosa della sequenza b, c, a. In effetti, se queste lettere fossero quelle che identificano dei corridori che partecipano ad una gara e la sequenza dovesse essere l'ordine di arrivo al traguardo, nel primo caso a vincerebbe la medaglia d'oro, mentre nel secondo solo il bronzo. Quindi, quando noi ci riferiremo ad una sequenza ordinata di elementi, ovvero a quella che in matematica si chiama anche *successione,* dovremo fare in modo di *conservare l'informazione* sulla posizione degli elementi nell'elenco che vien fatto.

[1] Ma quanta ricchezza ha espresso la poesia italiana!

C'è un metodo molto semplice per fare questo: basta utilizzare il concetto di *funzione.* Per proseguire senza difficoltà, dato che questo lavoretto vuole essere "autocontenuto", ricordiamo la definizione di funzione.

Definizione 1 *Dato un insieme A di elementi ed un insieme B, non necessariamente distinto da A, chiamiamo **funzione** una legge associativa univoca che per ogni elemento dell'insieme A associa un unico elemento di B.*

Ricordiamo altresí che gli insiemi A e B sono parte essenziale della definizione di funzione e non basta definire la legge associativa per conoscere la funzione (anche perché a seconda di quali siano gli insiemi A e B, la funzione può assumere caratteristiche diverse, pur mantenendo la stessa legge associativa). Importantissimo è il fatto, e lo enfatizziamo opportunamente, che la legge associativa sia *univoca.*

A questo punto vediamo che succede se si considera una funzione dall'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$ all'insieme degli elementi di un dato insieme A, ad esempio quello prima. In modo molto intuitivo stabiliamo la seguente scrittura:

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \longrightarrow & A \\ n & \mapsto & f(n) = x_n \end{array}$$

che sta a significa che al numero n naturale corrisponde l'unico elemento x_n che sta in A. Per esempio, il primo "elenco ordinato" di elementi di A, dato prima, ovvero la sequenza a, b, c può essere vista come la funzione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & A \\ 1 & \mapsto & a \\ 2 & \mapsto & b \\ 3 & \mapsto & c \end{array}$$

con l'ovvio significato che il primo posto è occupato dall'elemento a che corrisponde al numero 1, ecc... in pratica abbiamo conservato l'informazione sull'ordine dei posti di assegnazione degli elementi di A sfruttando l'ordinamento naturale dell'insieme $\mathbb{N}$. A questo punto si capisce appieno la seguente definizione

Definizione 2 *Si chiama **successione** una qualsiasi funzione dall'insieme dei numeri naturali ad un insieme di elementi A. Se l'insieme A è costituito da numeri, allora la successione si dirà* numerica.

In genere, invece di mantenere la scrittura $f : \mathbb{N} \to A$, $x_n = f(n)$ si preferisce scrivere direttamente ogni elemento della successione con a_n, da intendersi che stiamo lavorando con gli elementi dell'insieme A e che l'elemento a_n occupa la postizione $n-$esima nell'ordine di successione. Per esempio, se $A = \mathbb{N}$ e scriviamo $a_4 = 23$ è da intendersi che il quarto posto di una successione, i cui elementi sono numeri naturali, è occupato dal numero 23.

Limiti di una successione Va da sé che essendo l'insieme $\mathbb{N}$ illimitato superiormente, dato che si può superare ogni numero pensato comunque grande, aggiungendo semplicemente uno, le successioni avranno, in linea di principio, anche esse un numero illimitato di elementi da elencare! Però è anche evidente che se l'insieme A è costituito da un numero finito di elementi, allora l'eleco di suoi elementi dati in successione deve necessariamente ripertere gli stessi elementi di A. Ad esempio, se l'insieme A fosse costitutito solo dal un elemento, ad esempio $A = \{1\}$ allora ogni successione che consideri A come *insieme sostegno* deve essere del tipo $1, 1, 1, \dots$ in modo indefinito. Una successione di questo tipo la chiameremo *costante.* D'altra parte se A avesse solo due elementi, ad esempio $A = \{1, 2\}$ allora le successioni possibili già potrebbero presentare casi interessanti. Immaginiamo la successione $1, 2, 1, 2 \dots$ e così via: in pratica i posti dispari pari a 1 e quelli pari a 2, iniziando come primo elemento con a_1. Questa successione è ben diversa da quest'altra $1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, \dots$ proseguendo adesso solo con tanti 1. Non sono diversi per gli elementi utilizzati nello scrivere la successione, ma proprio per come sono stati disposti! della seconda successione possiamo dire che *da un certo punto in poi* è diventata costante, mentre della prima questa cosa non la si può dire. Ebbene, è fondamentale isolare questo concetto di "cosa che capita -per sempre- da un certo punto in poi", tanto importante che siamo indotti a dare la seguente definizione.

Definizione 3 *Data una successione a_n, se esiste un indice $\bar{n}$ a partire dal quale tutti gli elementi della successione godono di una determinata proprietà, allora diremo che tale proprietà è* ***definitivamente verificata.***

In simbolismo matematico possiamo tradurre questa frase in questo modo [2] sia $\mathcal{P}$ una proprietà, se $\exists \bar{n} : \forall n > \bar{n}$ vale $\mathcal{P}$ sugli elementi di a_n, allora $\mathcal{P}$ è definitivamente verificata.

Consideriamo ora la successione dei reciproci dei numeri naturali, a partire da 1, ovvero

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

questa è chiaramente una successione di numeri che stanno diventando vieppiù piccoli: per convincersene non occorre far altro di pensa al numeratore ad una torta ed ai denominatori al numero di persone tra le quali si divide questa torta! in questo modo la frazione stessa identifica immeditamente la "grandezza" della fetta che viene data ad ogni partecipante della suddivisione: se la torta viene divisa tra 5 persone, chiaramente ciascuna di esse riceverà una fetta più grande di quanto ne riceverebbe se la torta dovessere essere divisa (in parti uguali) tra 10 partecipanti [3]. Cosa possiamo dire di altro su questa successione? sicuramente che essa non avrà mai elementi con numeri negativi e che *non arriverà mai a zero.* Vediamo di giustificare queste due affermazioni: in primis, dato che i numeri naturali non sono numeri con segno, sono quindi da intendersi tutti "positivi" (se allarghiamo gli insiemi dei numeri, ad esempio, dapprima considerando i *numeri segnati* ovvero l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$, per poi arrivare all'*insieme delle frazioni,* ovvero l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ dove "vivono" gli elementi della successione dei reciproci) e quindi anche i loro reciproci devono essere intesi come numeri positivi. Inoltre, una frazione

[2] Ricordiamo i due simboli $\exists$ che si legge **esiste** e $\forall$ che si legge **per ogni**.
[3] Nel caso precipuo sarebbe grande il doppio!

é nulla se e solo se il suo numeratore è zero: nel nostro caso, invece, tutti i numeratori sono uguali ad 1. Ci troviamo quindi di fronte ad una situazione "strana": questa successione numerica produce numeri sempre più piccoli ma che non arrivano mai ad diventare zero! D'altra parte zero è proprio un *limite inferiore* invalicabile, poiché "dall'altro lato" iniziano i numeri negativi!

Un attimo di riflessione prima di procedere oltre... la faccenda si fa intrigante, poiché già una delle successoni numeriche più semplici in assoluto, *la successione dei reciproci dei numeri naturali,* porta ad un concetto delicatissimo che è quello di "limite infinitesimo".

Ora raccogliamo le idee ed i frutti delle nostre riflessioni. Dire che i numeri diventano vieppiù piccoli si potrebbe interpretare in quest'altro modo: se noi pensiamo ad un numero "abbastanza piccolo", allora in quella successione ci deve essere qualche elemento che è più piccolo di quello che avevamo pensato! e dato che il pensiero nostro è libero di rappresentare quantità sempre più piccole, allora, dire che quella successione produce numeri sempre più piccoli, ma che non diventano mai "zero", significa che riusciremo sempre a trovare qualche elemento della successione che è minore del numero arbitrariamente piccolo avevamo pensato. Se poi, la successione diventa *definitivamente minore* di ogni numero arbitrariamente piccolo fissato, allora diremo che la **successione è infinitesima,** ovvero che *tende a diventare nulla* pur mai raggiungendo lo zero. In questo caso si dice anche che il **limite della successione è zero.**

Traduciamo il tutto in linguaggio simbolico. Sia data una successione a_n ed una quantità arbitrariamente piccola [4] ϵ, se $\exists\,\bar{n}$ tale per cui $\forall\,n > \bar{n}$ si abbia $a_n < \epsilon$, allora diciamo che la successione *converge a zero,* oppure che è infinitesima e racchiudiamo tutta questa definizione in questo modo:

$$a_n \longrightarrow 0.$$

In breve una successione è infinitesima se definitivamente i suoi elementi diventano più piccoli di qualsiasi quantità arbitrariamente piccola.

Osservazione: Se consideriamo la successione $a_n = 3 + \frac{1}{n} = \frac{3n+1}{n}$ questa è evidentemente una successione che a tre, aggiunge una quantità che diventa sempre più piccola e vicino a zero: per tale motivo possiamo dire, almeno a livello intuitivo, che

$$a_n \longrightarrow 3$$

intendendo che *definitivamente* la successione produce tutti numeri che differiscono da 3 per una quantità arbitrariamente piccola: diremo che la successione a_n **converge** a tre, ovvero che il suo limite è tre.

La divergenza Consideriamo ora un altro tipo di successione... ed andrebbe bene anche la successione dei numeri naturali, in prima considerazione, ma non volendo confondere le idee considerando i numeri naturali sia come elementi della successione, sia come posto che occupano nell'elencazione ordinata, consideriamo la successione formata prendendo il doppio di un numero naturale. Ovvero consideriamo la successione:

$$a_1 = 2,\, a_2 = 4,\, a_3 = 6, \ldots,\, a_n = 2 \cdot n, \ldots.$$

[4] Ormai è abitufine, nella comunità matematica, di indicare le quantità arbitrariamente piccole con la lettere dell'alfabeto graco ϵ.

Evidentemente questa successione produce numeri vieppiù grandi e, questo, senza limitazione alcuna. L'intuizione, comunque, ora deve portarci ad una descrizione dal contorno ben definito della situazione. Perché diciamo che questa successione genera numeri sempre più grandi senza alcuna *limitazione superiore?* Anche in questo caso, a pensar bene, potremmo fare quest'altra affermazione incontrovertibile: se una successione sta diventando grande senza limitazioni è perché, avendo pensato ad una "quantità" smisuratamente grande, allorora tra gli elementi di quella successione ci sono anche quantità maggiori di quella che noi avevamo pensato smisuratamente grande!. Anche in questo caso, dato che il pensiero nostro è libero di rappresentare quantità sempre più grandi, allora dire che la successione produce numeri sempre più grandi, significa che riusciremo sempre a trovare qualche elemento della successione che è maggiore del numero arbitrariamente grande che avevamo in mente. Se poi, dato un numero arbitrariamente grande, la successione diventa *definitivamente* maggiore di tale numero, allora diremo che essa **diverge,** od ancora che *tende all'infinito* [5].

Traduciamo, anche in questo caso, il tutto in linguaggio simbolico. Sia data una successione a_n ed una quantità arbitrariamente grande N, se $\exists \bar{n}$ tale per cui $\forall n > \bar{n}$ si abbia $a_n > N$ allora diciamo che la successione *diverge* all'infinito, oppure che è infinita e racchiudiamo tutta questa definizione in questa scrittura:

$$a_n \longrightarrow +\infty.$$

In breve una successione è infinita se definitivamente i suoi elementi diventano più grandi di una quantità arbitrariamente grande.

Osservazine: Non è il fine di questo piccolo lavoro descrivere completamente tutti i comportamenti possibili di una successione numerica: basti, per ora, sapere che oltre alla convergenza ad un numero (infinitesima se questo numero è zero) ed alla divergenza all'infinito positivo (od anche negativo, se la successione diventa più piccola, definitivamente, di un numero arbitrariamente grande in negativo), c'è anche la possibilità che il limite non esista affatto, poiché *definitivamente* la successione né diventa più grande/più piccola di un numero arbitrariamente grande in positivo/negativo, né si avvicina ad un valore ben determinato, a meno di una quantità arbitrariamente piccola [6].

L'infinito di Leopardi e l'infinito in Matematica Siamo giunti alla fine di questa breve lezione di introduzione al concetto di infinito e, come avevamo anticipato, faremo vedere che l'intuizione del Poeta è stata perfetta ed ha centrato in pieno il nucleo fondamentale della definizione di infinità. Quando il Leopardi parla della siepe, noi stiamo parlando di indice $\bar{n}$ che "dell'ultimo orizzonte il guardo esclude", ovvero limita la successione fino ad un certo punto, tagliando fuori *la coda* della successione. Quando parla di "spazi di là da quella", riferendosi alla siepe, sta parlando di quello che avviene oltre l'indice $\bar{n}$. L'idea di infinito, insomma, si delinea se noi fissiamo una barriera e riusciamo ad andare sempre oltre tale barriera: e questo lo si deve poter fare per qualsiasi posizione "arbitrariamente" lontana a cui si pone la barriera (siepe). Stiamo, in ultima analisi, dicendo che **definitivamente** riusciamo a superare la barriera imposta

[5] Bisogna però capire bene che **l'infinito non è un numero**, quindi dire che "tende" non significa che si avvicina ad una quantità ben definita, bensì che *sfugge* a qualsiasi controllo.

[6] Come si dice in gergo **non entra definitivamente in un intorno arbitrariamente piccolo di alcun numero.**

dalla siepe che, già di per sé, potrebbe essere posta molto lontana da noi! Ma anche l'infinitesimo è racchiuso nelle idee di Leopardi, infatti dire che si fissa una quantità arbitrariamente piccola, significa che noi vediamo una siepe che è vicinissima a noi (vicina tanto, ma non è dato sapere quanto vicina, dato che ha una distanza piccolissiama da noi "arbitrariamente"). Dire che la successione converge a zero, vuol fire che essa "sta sempre definitivamente al di qua" di tale siepe/barriera [7]. Insomma, tra la siepe e lo zero, si può sempre trovare tutta la successione tranne che per un numero finito di elementi (dal primo all'$\bar{n}-$esimo). D'altra parte la successione formata con i reciproci di una successione infinita è infinitesima e, viceversa, formando la successione con i reciproci di una successione infinitesima, si ottiene una successione infinita. Potremmo sintetizzare la situazione in queste due scritture, intendendo con q una *quantità* qualsiasi

$$q \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q} \to 0$$

ovvero

$$\frac{1}{q \to \infty} \to 0$$

e, viceversa

$$q \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q} \to \infty$$

ovvero

$$\frac{1}{q \to 0} \to \infty.$$

Detto in termini molto laschi "l'inverso di zero è l'infinito e l'inverso dell'infinito è lo zero": chiaramente non stiamo dicendo che si possa fare davvero $\frac{1}{0}$, dato che la divisione per zero non si può fare, né tantomento $\frac{1}{\infty}$ dato che l'infinito nemmeno è un numero! Si deve intendere sempre tutto il discorso di applicazione di un *processo al limite*. Questo giustifica anche l'affermazione che l'infinito alla Leopardi parla sostanzialmente dei limiti per come concepiti e definiti, oggigiorno, in Matematica

[7]Mentre per il limite infinito "sta al di là", per come avevamo già chiarito.

Come una osservazione banale possa risolvere diversi problemi

Prof. Emanuele Castagna
Docente di Matematica presso I.T.S.T. "E.Scalfaro" Catanzaro
email: castagnaprofemanuele@gmail.com

23 maggio 2020

Sommario

Presentiamo il principio della cassettiera, noto altrove come *pigeonhole principle* ovvero "principio della piccionaia" o, ancora, dato che fu descritto ed utilizzato da Dirichlet, sebbene già enunciato prima di lui da altri, "principio di Dirichlet". Successivamente alla discussione di tale principio, porteremo qualche esempio di problema che può essere risolto ricorrendo al suo utilizzo.

1 Il principio della cassettiera

Una "evidente" banalità a cui noi tutti arriviamo senza porre particolare attenzione è che se il numero degli oggetti da mettere dentro una cassettiera è superiore al numero dei cassetti, allora sicuramente qualche cassetto deve contenere almeno due oggetti! Si dirà "bella scoperta"! ed in effetti, essendo una cosa tanto evidente, poi è difficile capire che è anche una osservazione molto utile. Facendo un esempio più che chiaro: se ho due cassetti e tre penne, sicuramente in uno dei due cassetti devo mettere almeno due penne (ciò non esclude che potrei mettere tutt'e tre in un solo cassetto, ma se sistemo una penna in uno dei cassetti e poi un'altra nell'altro cassetto... be', allora la terza penna deve andare a fare compagnia ad una di quelle che avevo già depositato in uno dei due cassetti!). Possiamo pertanto enunciare in forma più generale possibile tale principio in tal guisa:

Principio 1 (Principio della cassettiera) *Se un numero* "n" *di oggetti deve essere sistemato in un certo numero* "m" *di cassetti e* $n > m$ *allora* <u>*almeno*</u> *un cassetto deve contenere* <u>*almeno*</u> *due oggetti*

Il principio può essere reso più generale, *estendendolo* al caso di un numero maggiore di oggetti. Ad esempio se abbiamo due cassetti e cinque penne, supponendo di distribuire le penne uno alla volta una in un cassetto ed una nell'altra si avrebbe una situazione del tipo (il numero indicato esprime quante penne sono presenti nel cassetto):

1^o cassetto	2^o cassetto	
1	1	prima introduzione
2	2	seconda introduzione
3	2	terza introduzione

Dato che questa è la "distribuzione più uniforme" che possiamo ammettere, chiaramente osserviamo che in uno dei due cassetti devono stare almeno 3 penne. Se anziché 5, avessimo 7 oppure 31 penne possiamo, a priori, sapere quante penne dovrebbe contenere al minimo quel cassetto che ne contiene di più? Basta pensare un attimo ed accorgersi che i cassetti contengono un numero pari di penne [1] fino a che queste penne sono in numero multiplo dei cassetti, dopodiché almeno uno dei cassetti deve contenere un numero di penne pari al quoziente (intero) tra il numero delle penne e dei cassetti, aumentato di uno. Nel nostro esempio avremmo dovuto eseguire la divisione (intera) $5 : 2$, ottenendo quoziente 2, e quindi il numero minimo di penne che almeno uno dei cassetti deve contenere è $2 + 1 = 3$ come verificato direttamente con la tabella. Nel caso avessimo avuto 31 penne da distribuire, allora avremmo calcolato il quoziente di $31 : 2$, che è 15 (infatti $15 \cdot 2 = 30$) e quindi

[1] Sempre nel caso di distribuzione "uno alla volta per ogni cassetto", ovvero volendo tenere uniforme la distribuzione stessa

avremmo potuto affermare che *ci doveva essere almeno un cassetto contenente almeno* $15+1=16$ *penne.*

Possiamo quindi "estendere" il principio dato precedentemente in questo modo:

Principio 2 (Principio esteso) *Se un numero* "n" *di oggetti deve essere sistemato in un certo numero* "m" *di cassetti e* $n > k \cdot m$ *allora almeno un cassetto deve contenere almeno* $k+1$ *oggetti.*

Procediamo ora a vedere quanto questo principio possa essere utile nella risoluzione di alcuni problemi.

2 Esempi di problemi risolti dal "pigeonhole principle"

Prima di tutto un esempio classico proposto e risolto da Peano nella prima metà del '900 (anche se già nella prima metà del '600 il problema era stato formulato).

Problema 1 *Se una città ha* 150.000 *abitanti, allora ci devono essere almeno due persone che hanno lo stesso numero di capelli!*

Come dimostrarlo? La soluzione di Peano si basa sulla stima secondo cui sulla testa di un uomo vi sono capelli per circa $775\,\mathrm{cm}^2$ e che ogni cm^2 contiene al massimo 165 capelli. Da questo si può dedurre che sulla testa di un uomo ci possono essere al massimo $775 \cdot 165 = 123.875$ capelli. Visto che questo numero è minore del numero degli abitanti della città, per il principio della cassettiera almeno due teste devono avere lo stesso numero di capelli! [2]

□

Il prossimo problema, invece, è tipicamente proposto nelle "gare di matematica".

Problema 2 *In un cassetto ci sono 12 palline nere, 8 rosse e 6 bianche. Pescando a caso, quante se ne devono prendere per essere sicuri di averne 3 dello stesso colore?*

Ragionando secondo il principio della cassettiera, la distribuzione più equa è due palline per ciascun colore, fino a sei palline estratte [3]: necessariamente alla settima estrazione uno dei colori deve uscire per tre volte. Quindi bisogna, nella peggiore delle ipotesi, arrivare a 7 estrazioni per essere sicuri di avere tre palline dello stesso colore.

□

Problema 3 *In un gruppo di 5 persone, ce ne devono essere almeno due con lo stesso numero di amici* [4]

Considerate le cinque persone, una di esse deve avere un numero di amici che può andare da zero (0) a quattro (4): anche se uno si "ama" molto, non può essere considerato amico di se stesso! Ora da zero a quattro sono cinque possibili configurazioni, però se uno del gruppo avesse *zero* amicizie, allora un qualsiasi altro non potrebbe averne che, al massimo, tre [5]! quindi tutt'e cinque le configurazioni non sono possibili e, dato che il numero delle persone (gli oggetti) è maggiore del numero delle possibili configurazioni di amicizie (i cassetti), allora due persone almeno devono avere lo stesso numero di amicizie [6].

□

Problema 4 *In una classe di 30 studenti, uno di essi commette 12 errori in un test, mentre il resto della classe ha un migliore risultato. E' vero che almeno 3 studenti hanno fatto lo stesso numero di errori?*

Sembrerà strano, ma la risposta è affermativa. Infatti il numero degli studenti, 30 (che è il numero degli oggetti) è maggiore del numero degli errori fatti nel test, che è 12 (ci sono 12 cassetti "virtuali", quello che contiene zero errori, quello con un errore ecc... fino ai 12 errori). Ora, il quoziente $30 : 12$ è due, per cui ci deve essere almeno un cassetto con almeno $2+1=3$ studenti [7]. □

[2] Osserviamo che, in questo problema, il numero degli abitanti è da interpretare come gli oggetti da sistemare (o il numero dei piccioni a disposizione), mentre il numero dei capelli è da identificare con il numero dei cassetti presenti (ovvero dei nidi dove sistemare i piccioni).

[3] Ovvero nei tre cassetti si sistemerebbero, rispettivamente, due nere, due rosse e (nell'ultimo cassetto) due bianche.

[4] Si intende amici all'interno dello stesso gruppo.

[5] Ovvero, se c'è chi ha 0 amicizie, non ci può essere uno che ne ha 4.

[6] Questo risultato si può generalizzare ad un numero qualsiasi n di persone.

[7] Applicando il "principio esteso".

Problema 5 *Ci sono 200 sacchi di castagne. E nessun sacco è vuoto, ma si sa pure che nessuno contiene più di 48 castagne. E' vero che fra questi cestini, ce ne sono almeno 5 con esattamente lo stesso numero di castagne?*

Vero, vero... il quoziente tra 200 e 48 fa 4 e per il principio esteso [8], ci devono essere almeno $4+1=5$ sacchi con lo stesso numero di castagne.

$\square$

Problema 6 *Dimostrare che fra 400 persone, ce ne sono almeno 2 che festeggiano il compleanno lo stesso giorno.*

Il numero dei giorni dell'anno è 365 (che rappresenta il numero dei cassetti), dato che $400 > 365$, allora almeno due persone devono stare "nello stesso cassetto", ovvero essere nate nello stesso giorno!

$\square$

Problema 7 *Se in un test si può prendere un punteggio intero da 0 a 10 e 48 candidati lo hanno effettuato, allora il gruppo più numeroso di studenti, che hanno ottenuto lo stesso punteggio, ha al minimo k elementi.. e quanto vale k ?*

I punteggi possibili sono i cassetti, in numero di 10. I candidati sono da distribuire in questi cassetti e dato che il quoziente $48 : 10$ è 4, allora il numero minimo di elementi che il cassetto più numeroso possiede è almeno $4 + 1 = 5$. Quindi possiamo dire che almeno 5 candidati hanno ottenuto lo stesso punteggio.

$\square$

Problema 8 *Ci sono 35 tavoli circolari e 110 sedie vengono disposte intorno ad essi. Dimostra che ci sarà almeno un tavolo intorno al quale verranno disposte almeno 4 sedie.*

Il quoziente tra 110 e 35 è 3, per cui, per il principio esteso, ci deve essere un tavolo con almeno $3 + 1 = 4$ sedie.

$\square$

[8] I cassetti sono 48 e gli oggetti 200, ovvero i nidi in totale 48 ed i piccioni 200.

Per finire, una dimostrazione che è strettamente collegata al vostro indirizzo di studio.

Problema 9 *Non è possibile scrivere un algoritmo di compressione dati senza perdita di informazioni (lossless) che funzioni sempre, nel senso che a partire da un qualunque file in ingresso ne produca uno in uscita più corto.*

Supponiamo di avere un *file* di lunghezza n bit. Di questi ne possiamo avere in numero di 2^n. Ora, i *file* di lunghezza tra 1 e $n-1$ (dato che vogliamo comprimere, allora vogliamo che il *file* risultante abbia dimensione minore di n) sono al più 2^{n-1}, e pertanto, per il principio della cassettiera, dobbiamo avere almeno due *file* che vengono "compressi" nello stesso identico modo: ovvero in uno stesso *file*. Ma questo non può essere, poiché volendo risalire al *file* originario, non sapremmo più decidere a quale *file* iniziale corrisponde quello che abbiamo decompresso! Quindi l'unico modo per poter comprimere tutto è che ci sia qualche perdita di informazione! l'alternativa è di dover accettare che qualche *file*, "passato" attraverso l'algoritmo di compressione, non venga affatto accorciato: ovvero non venga compresso per nulla.

$\square$

Dal casuale al deterministico

Come dare una approssimazione di π lanciando pietre in uno stagno

Emanuele Castagna
I.T.T.S. “E.Scalfaro” -Catanzaro

-versione 28.05.2020-

Premessa

In questo breve articolo daremo una giustificazione teorica ed indicheremo una via di implementazione, tramite foglio di calcolo, di un metodo molto curioso per la “determinazione” di una prima approssimazione della costante “π” che, notoriamente, esprime il rapporto tra la lunghezza della circonferenza ed il proprio diametro. Sebbene la dimostrazione, che tale rapporto è sempre lo stesso per circonferenze di qualsiasi dimensione, sia data, in modo non troppo difficile da capire, già negli “Elementi” di Euclide ed essenzialmente si basa su una caratteristica tipica dei poligoni regolari inscritti (o circoscritti) alla circonferenza stessa, che poi viene estesa “al limite infinito” per un poligono di infiniti lati di lunghezza infinitesima (come si può pensare che sia una circonferenza), il valore di tale costante è stato oggetto di parecchi studi, fatiche e discussioni. Ora, senza fare tutta la cronologia delle varie conquiste del pensiero matematica riguardanti il π, che portarono a chiarire che tale numero è un irrazionale trascendente (ovvero con una rappresentazione decimale illimitata non periodica e, per di più, non ottenibile come soluzione di una equazione algebrica a coefficienti razionali), vogliamo solo ricordare che il grande Archimede (287 a.c. - 212 a.c.) diede una approssimazione di tale numero utilizzando un metodo ricorsivo, inscrivendo (e circoscrivendo) dentro (e fuori) la circonferenza poligoni regolari ed aumentando il numero dei lati sempre del doppio rispetto alla approssimazione data nel passo precedente, riuscendo a raggiungere il ragguardevole valore di 3,14 per un poligono di 96 lati! Il metodo è semplice e se ne può parlare in altra occasione, dato che occorrono poche nozioni di geometria euclidea per capire la formula ricorsiva e poi abilità davvero elementari per implementare il metodo su un foglio elettronico.

Quello invece che vorremmo presentare qui è il cosiddetto “Metodo Montecarlo” che, sorprendentemente riesce a collegare il valore “deterministico” della costante π, con il risultato di una serie di esperimenti di cui non si può -a priori- conoscere gli esiti. In effetti, il metodo Montecarlo è notevole proprio perché getta un ponte tra due universi che, a prima vista, potrebbero essere totalmente separati l’uno dall’altro: il primo è il mondo della “realtà geometrica”, che è oggettiva, determinata, dedotta dagli assiomi iniziali con un ragionamento basato su una logica ferrea. Il secondo universo è rappresentato dal mondo della casualità: “il Caso”, di cui non si può prevedere con certezza alcunché ma, al più, dare un parere di affidabilità, basato su una “misura” del “grado di fiducia” che qualcosa debba succedere. Insomma, da un lato c’è la Geometria, per come la concepisce la scuola greca di Euclide, se vogliamo anche sullo sfondo del mondo delle idee perfette di platonica memoria e, dall’altro lato, la Probabilità, che riguarda esperimenti di cui a priori non si può dire con certezza quale sarà il risultato tra i tanti possibili.

Accenni di Probabilità

Diremo che un *evento* è qualcosa che può accadere e, pertanto, può essere, in qualche modo, osservato. Per esempio, se lanciamo un dado, un evento potrebbe essere l’ “uscita di un numero pari”, oppure “l’uscita del quattro”. In verità, la cosa fondamentale per definire l’*evento* è proprio che si possa affermare che sia accaduto oppure no. Gli eventi sono essenzialmente di tre tipi: quelli che avvengono sicuramente, quelli che sicuramente non avvengono e quelli che potrebbero accadere oppure no. Nel primo caso parleremo di *eventi certi*, nel secondo di *eventi impossibili* e nel terzo caso di *eventi aleatori* (o casuali).

Chiarito cosa sia un evento, si può ora procedere in diversi modi per definire il concetto di *probabilità* e, soprattutto per fondare una *Teoria delle Probabilità* che poi porterà, inevitabilmente, a fondare un *Calcolo delle Probabilità*. Procediamo con una considerazione elementare: per poter utilizzare gli strumenti messi a disposizione dalla Matematica, sarebbe opportuno introdurre delle quantità numeriche da associare, in qualche modo coerente, agli eventi oggetti del nostro interesse. Per fare questo ci sono almeno quattro modi distinti di procedere: ma dato che il modo di procedere è per lo più una questione filosofica, conducendo tutte e quattro i modi a stessi risultati a livello di calcolo, scegliamo il più semplice in assoluto. Per cui fissiamo, in modo del tutto arbitrario, una *scala graduata* di valori da zero a uno e poi troviamo un metodo per inserire, tra questi due estremi, frazioni dell’unità (che rappresentano i vari gradi) in modo ragionevole. Come prima cosa, visto che avevamo suddiviso gli eventi in tre casi, verrebbe naturale imporre la seguente corrispondenza per la sistemazione dei valori estremi della scala:

EVENTO IMPOSSIBILE → 0

EVENTO CERTO → 1.

Ora rimane il problema di associare numeri agli eventi aleatori. Un modo “primitivo” per assegnare valori tra zero ed uno, che funziona bene ed è anche stato posto, classicamente, come prima definizione di *probabilità* è di considerare il rapporto tra il numero dei casi favorevoli al verificarsi di un dato evento ed il numero dei casi possibili (da considerarsi comunque tutti con la stessa possibilità di verificarsi[1]!): in effetti questo rapporto è sempre un numero compreso tra zero e uno, dato che il numero degli eventi favorevoli non può eccedere quello di tutte le possibili sortite di un dato esperimento. Inoltre, considerando che per gli eventi impossibili non vi sono, evidentemente, casi favorevoli, mentre per quelli certi, tutte le possibili uscite sono anche da considerarsi casi favorevoli, allora si fa presto a definire ***la probabilità[2] del verificarsi di un evento E*** in tal modo: indicando con “|E|” il numero dei casi favorevoli ad E e con N il numero di tutti i casi possibili

1 Ovvero “equiprobabili”: questo comporta una definizione circolare di probabilità che è piuttosto fastidiosa da accettare.

2 La probabilità quindi risulta essere un valore su una scala da zero a uno: in Matematica si dice che essa è una **misura (normata ad uno)** associata al verificarsi di un evento, intendendo con tale termine, una funzione positiva che associa numeri ad elementi di un insieme (l’insieme degli eventi possibili) e per la quale il valore di tutto l’insieme (di tutti i casi presi in blocco -dell’evento certo, insomma-) è il valore massimo uguale ad 1.

$$Pr(E)=\frac{|E|}{N}=\frac{numero\ casi\ favorevoli\ ad\ E}{numero\ casi\ totale}\ .$$

Ad esempio, se lanciamo una moneta (non truccata) e volessimo "fissare" i giusti valori di probabilità, per gli unici due eventi che possono accadere, avremmo ragionevolmente $Pr(Testa)=\frac{1}{2}$, $Pr(Croce)=\frac{1}{2}$ essendo i casi in totale due e quelli favorevoli sempre uno, sia nel caso di testa, sia nel caso di croce. Se lanciassimo un dado e ci chiedessimo "quanto vale la probabilità di leggere sulla faccia superiore un valore maggiore o uguale a cinque" (che chiamiamo, per brevità, evento E) potremmo rispondere così: $Pr(E)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, essendo i casi favorevoli solo due (leggiamo 5 o leggiamo 6) ed i casi in totale 6 (il dado ha sei facce numerate da uno a sei).

La cosa interessante, che poi sta alla base del metodo Montecarlo, è che un altro modo coerente e ragionevole di assegnare il valore di probabilità ad un evento, per *esperimenti ripetuti* un numero adeguato di volte, è di considerare la **frequenza relativa** dell'accadimento sul numero totale di prove. Questo modo di procedere è tipico di coloro che approcciano il calcolo delle probabilità, per come si dice, fondando la teoria dal punto di vista *frequentista* (e non *classico* per come fatto precedentemente). Per cui la probabilità di un evento è anche -in una serie di esperimenti ripetuti- il rapporto tra casi registrati favorevoli su numero di prove, ovvero

$$Pr(E)=\frac{Numero\ casi\ favorevoli}{Numero\ di\ prove\ effettuate}$$

Ad esempio, se lanciamo una moneta per 100 volte e registriamo i risultati in una sequenza di "T" (per testa) e "C" (per croce) e, ad esempio, sono state scritte 48 T e 52 C, allora la $Pr(Testa)=\frac{48}{100}$. Dato che dal punto di vista classico la probabilità era già stata calcolata *a priori* in $Pr(Testa)=\frac{1}{2}$, qualcuno potrebbe ragionevolmente obiettare che qualcosa non torna e, soprattutto, la definizione frequentista sia troppo legata "al caso". In effetti, in quelle 100 prove del lancio della moneta, pur supponendo che essa sia non truccata, nulla vieta che per 100 volte esca sempre una stessa faccia, oppure che la "T" esca sono 10 volte, anziché 48 o 50.

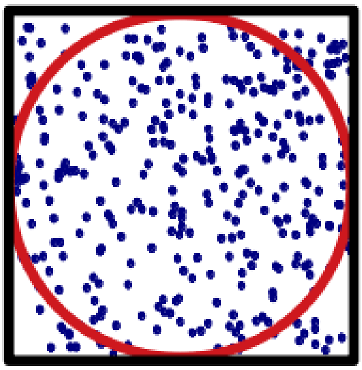
Ma a sgombrare il campo da ogni tipo di dubbio ci pensa un corollario, più o meno immediato, di un teorema di Bernoulli, conosciuto come "*Legge dei grandi numeri*" che potremmo parafrasare in tal guisa: ***"All'aumentare del numero delle prove, la frequenza relativa tende[3] al valore di probabilità calcolata in qualsiasi altro modo teorico".***

Abbiamo adesso tutto quello che serve per definire e giustificare, nel prossimo paragrafo, il metodo per il calcolo di π.

3 Questo "tende" significa essenzialmente che non è uguale, ma che la differenza è trascurabile. Soprattutto va capito che bisogna intendere, ad esempio per il lancio della moneta per 100 volte, non che adesso le lanceremo 400 o 900 volte, per poter ottenere un valore di probabilità assimilabile a quello calcolato a priori in modo "teorico", ma che effettueremo il lancio della moneta per 100 volte, che è l'esperimento "base", ripetutamente per tantissime volte e, facendo la media dei risultati, il valore ottenuto è "praticamente" il valore di probabilità calcolato, ad esempio, secondo la definizione classica. Questo spesso viene frainteso, ma il teorema di Bernoulli è chiaro a riguardo, dato che, in effetti, parla di "medie di valori di variabili aleatori i.i.d.".

Un problema di aree

Supponiamo di lanciare delle pietre, in modo del tutto aleatorio -ad esempio sopra le spalle senza guardare dove andranno a cadere e, pertanto, senza prendere di mira alcuna zona particolare, in un laghetto circolare che sta inscritto esattamente in un quadrato, come nella figura seguente.



Possiamo considerare l'evento *E*= *"il sassolino cade nel laghetto"* e calcolarne la probabilità nei due modi: il primo -a priori- dal punto di vista classico e, il secondo, dal punto di vista frequentista, utilizzando all'uopo un foglio di calcolo per effettuare l'esperimento. Invocando la *legge dei grandi numeri* poi, potremmo uguagliare i risultati e trarre delle interessanti conclusioni.

Per fissare le idee, immaginiamo che il quadrato sia di lato due (cosicché, evidentemente, il cerchio abbia raggio unitario). Per calcolare la $Pr(E)$, bisogna essenzialmente capire che ogni punto del cerchio potrebbe rappresentare un caso favorevole, mentre ogni punto del quadrato un caso possibile. Messa in questo modo, dato che questi punti rappresentano, complessivamente, o l'area del cerchio, ovvero quella del quadrato, allora possiamo scrivere, abbastanza banalmente:

$$Pr(E)=\frac{Area\ cerchio}{Area\ quadrato}=\frac{\pi*r^2}{l^2}=\frac{\pi*(1)^2}{2^2}=\frac{\pi}{4}$$

Quindi, se ora lanciassimo "virtualmente" questi sassolini in questo laghetto, inscritto nel quadrato, la frequenza relativa dei sassolini andati nell'acqua rappresenterebbe un quarto di π. Ergo arriviamo alla conclusione:

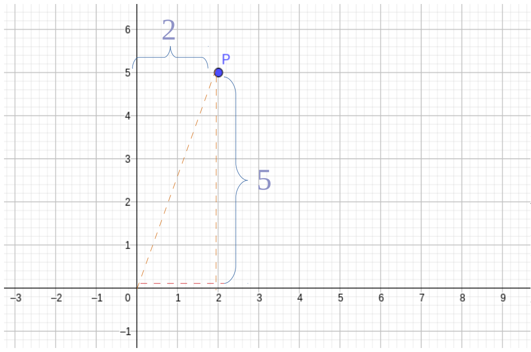
$$\pi = 4*Pr(E) \quad .$$

Accenni di Geometria Analitica

Come risaputo ormai da tempo (infatti in alcune scuole di primo grado già si procede a dare rudimenti di geometria analitica), per stabilire la posizione di un punto su di un piano basta prendere due rette che si incontrano perpendicolarmente in un punto O, detto origine del sistema, "spalmare" sui due assi i numeri (reali), a partire dall'origine verso qualche parte[4], tramite unità stabilite arbitrariamente, possibilmente monometriche e poi indicando le distanze del punto dagli assi del sistema di riferimento: in breve, si stabilisce la posizione di un punto (oggetto geometrico) tramite una corrispondenza biunivoca con coppie di numeri reali (oggetti algebrici). Il primo numero, generalmente si chiama "ascissa" ed il secondo "ordinata" e rappresentano rispettivamente la distanza in orizzontale dall'asse verticale e la distanza in verticale dall'asse orizzontale: tali numeri, nel complesso, si chiamano *coordinate cartesiane del punto nel piano.*

Ad esempio, il punto P di coordinate (2,5) sarà posizionato come nella seguente figura.

4 Generalmente un asse verticale si orienta "verso" l'alto ed uno orizzontale "verso" destra; ma non è obbligatorio...



Supponiamo ora di voler calcolare la distanza del punto P dall'origine del sistema di coordinate. E' evidente che il "triangolino tratteggiato" delinea un triangolo rettangolo e la distanza cercata è la lunghezza dell'ipotenusa di tale triangolo[5]: essa si può determinare tramite il teorema di Pitagora, essendo noti i cateti, di lunghezza pari proprio alle coordinate cartesiane del punto P.

Implementazione del Metodo Montecarlo

Per stabilire se un punto cade all'interno di un cerchio bisogna semplicemente verificare che la sua distanza dal centro sia minore del raggio. Ora, se disegniamo il laghetto, ovvero il cerchio con il centro nell'origine di un sistema di coordinate cartesiane, la verifica che un sasso lanciato casualmente finisce nel laghetto significa essenzialmente che un punto dato in modo aleatorio, ovvero generato da una coppia di due numeri casuali compresi tra -1 ed 1, abbia distanza dal centro minore di 1.

Possiamo sfruttare la funzione "casuale()" di un foglio elettronico -ad esempio Libreoffice Calc- che genera un numero aleatorio tra 0 ed 1. Dato che il cerchio, centrato nell'origine (così come il quadrato) avrà anche punti di coordinate negative, allora per generare punti aleatori, nel quadrato, ci inventiamo un "doppio utilizzo" della funzione testé citata. In pratica facciamo così: prima generiamo un valore casuale (tra zero e uno), dopodiché verifichiamo se è minore di ½, nel qual caso assegniamo un valore negativo ad un altro numero casualmente generato tra zero ed uno, altrimenti lo generiamo positivo. Questo semplicemente si fa inserendo in una cella la funzione "di selezione" SE(condizione;così;altrimenti così).

=SE(CASUALE()<0,5;-CASUALE();CASUALE())

Questa stringa la scriviamo su due celle contigue, in modo che il primo numero rappresenti l'ascissa ed il secondo l'ordinata del punto generato casualmente (sarebbe il sasso lanciato verso il lago).

Poi controlliamo se il punto cade all'interno del laghetto verificando che la sua distanza dal centro sia minore del raggio: la distanza la ricaviamo come la radice della somma dei cateti al quadrato. Mettiamo quindi una cella di controllo che scriva 1, nel caso la condizione di "essere nel laghetto" sia rispettata, altrimenti metta 0. Ancora una volta usiamo la funzione "SE":

=SE(RADQ(A2^2+B2^2)<1;1;0)

A questo punto possiamo generare, semplicemente "trascinando" tutt'e tre le caselle selezionate verso il basso, quanti lanci di pietre vogliamo. In questo modo, come dovreste sapere, si copiano le formule direttamente per come sono state scritte, aggiornando i riferimenti di cella.

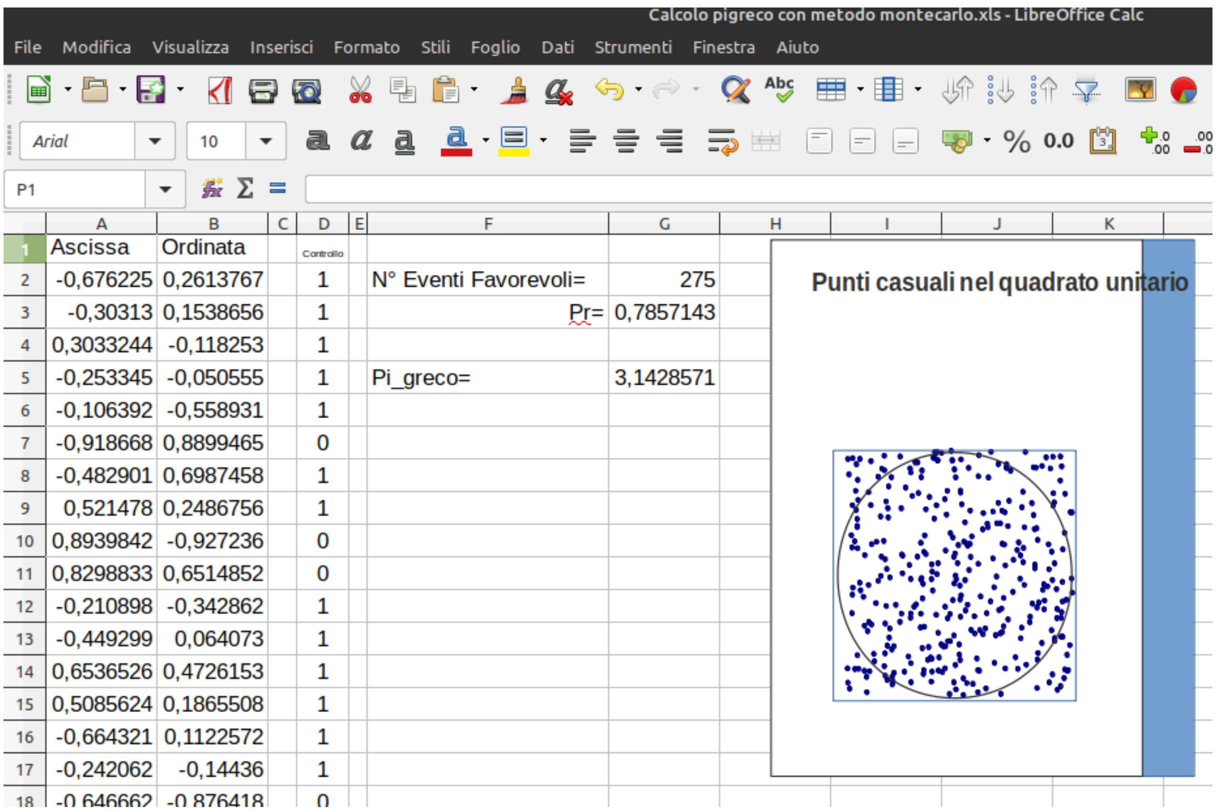
Per finire basta contare il numero dei casi favorevoli, semplicemente sommando tutti i valori della colonna di controllo (basta utilizzare la funzione "SOMMA(da cella:a cella)"), calcolare la

5 I sistemi di coordinate ortogonali, detti anche sistema cartesiani, hanno avuto enorme successo proprio perché tracciando linee parallelamente agli assi di riferimento, si ottengono "triangoli rettangoli" su cui si può applicare, evidentemente, il Teorema di Pitagora!

probabilità dividendo tale somma per il numero di celle generate (che corrisponde anche al numero di sassi lanciati “virtualmente” verso il laghetto) e poi quadruplicare il risultato per avere una approssimazione di π.

Ricordiamo che effettuando questo esperimento tante volte e facendo la media dei risultati ottenuti, il valore ottenuto sarà “trascurabilmente” diverso dal valore “reale” della costante che stiamo cercando… questo dovrebbe provocare tanta meraviglia!

Qui di seguito riporto uno screenshot del foglio di calcolo per come immagino ognuno di voi debba impostare, almeno come primo approccio, il lavoro: poi sarete sicuramente più bravi di me ad abbellire con grafiche varie e trovare artistiche questa piccola sperimentazione numerica. Nel foglio della foto, si è proceduto con una simulazione di 350 lanci di pietre verso il laghetto.



	A	B	C	D	E	F	G
1	Ascissa	Ordinata		Controllo			
2	-0,676225	0,2613767		1		N° Eventi Favorevoli=	275
3	-0,30313	0,1538656		1		Pr=	0,7857143
4	0,3033244	-0,118253		1			
5	-0,253345	-0,050555		1		Pi_greco=	3,1428571
6	-0,106392	-0,558931		1			
7	-0,918668	0,8899465		0			
8	-0,482901	0,6987458		1			
9	0,521478	0,2486756		1			
10	0,8939842	-0,927236		0			
11	0,8298833	0,6514852		0			
12	-0,210898	-0,342862		1			
13	-0,449299	0,064073		1			
14	0,6536526	0,4726153		1			
15	0,5085624	0,1865508		1			
16	-0,664321	0,1122572		1			
17	-0,242062	-0,14436		1			
18	-0,646662	-0,876418		0			

Indice analitico

Bibliografia

[1] Apostol Tom M. - Calcolo Vol.1,2 - Bollati Boringhieri - 1977
[2] Berzolari L., Vivanti G., Gigli D.: Enciclopedia delle Matematiche elementari e Complementi - Ulrico Hoepli Editore, 1943
[3] Caunt G.W. - An Introduction to the Calculus - Oxford at the Clarendon Press - 1914
[4] Cresci Luciano - Le cruve celebri - Franco Muzzio Editore. - 2012
[5] Cockshott Arthur, Walters Rev. F.B. - A Treatise on Geometrical Conics - Macmillan And Co. - 1898
[6] Demidovic Boris P. - Esercizi e Problemi di Analisi Matematica - Editori Riuniti - 2001
[7] Efimov N. - Elementi di Geometria Analitica - Editori Riuniti - 1986
[8] Gemignani Michael C. - Calculus and Statistics - Dover - 1970.
[9] Kline Morris - Calculus - Dover - 2017
[10] Kreyszig Erwin - Advanced Engineering Mathematics - Wiley - 1993
[11] Minorsky V.P. - Problems in Higher Mathematics (Trauslated from the Russian by Yuri Ermolyev) - Mir Publishers Moscow - 1975
[12] Murray Daniel A. - Introductory course in Differential Equations - Longmans, Green and Co. - 1910
[13] Pagani CD., Salsa S. - Analisi Matematica Vol.1,2 - Masson- 1993.
[14] Piskunov Nikolaj - Calcolo differenziale e integrale Vol.1,2- Editori Riuniti -1999.
[15] Ross Sheldon - A first course in PROBABILITY - Pearson Education International - 2010
[16] Wonnacott T.H., Wonnacott R.J. - Introduzione alla Statistica - FrancoAngeli - 1998

ISBN 979-12-210-5058-5

(*Prezzo:* € *00,00*)